20世纪经济学
经典译丛

博弈论与经济行为 上册

John Von Neumann and
Oskar Morgenstern

〔美〕冯·诺伊曼 摩根斯顿 著
王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店

20世纪经济学经典译丛

博弈论与经济行为

下册

John Von Neumann and Oskar Morgenstern

〔美〕冯·诺伊曼 摩根斯顿 著

王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店

20世纪经济学经典译丛

上册

博弈论与经济行为

[美] 冯·诺伊曼 摩根斯顿 著
王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店

20 世纪经济学经典译丛

下册

博弈论与经济行为

〔美〕冯·诺伊曼 摩根斯顿 著
王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店

图书在版编目(CIP)数据

博弈论与经济行为/(美)冯·诺伊曼、摩根斯顿著;王文玉,王宇译. -北京:生活·读书·新知三联书店,2004.12
(2005.6重印)
(20世纪经济学经典译丛)
ISBN 7-108-02152-8

Ⅰ.博… Ⅱ.①摩… ②王… ③王… Ⅲ.对策论-应用-经济学 Ⅳ.F224.32

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第079489号

策划编辑 贾宝兰
责任编辑 薛松奎
封扉设计 罗 洪
出版发行 生活·讀書·新知三联书店
(北京市东城区美术馆东街22号)
邮 编 100010
经 销 新华书店
排 版 北京京鲁创业图文设计有限公司
印 刷 北京京海印刷厂
版 次 2004年12月北京第1版
2005年6月北京第2次印刷
开 本 850毫米×1168毫米 1/32 总印张 33.375
字 数 660千字 图字01-2000-0843
印 数 05,001-10,000册
定 价 50.00元(上、下册)

出版说明

目前为止，国内已经出版了四套有一定影响的经济学译丛。它们是：1.商务印书馆的“汉译世界学术名著丛书”经济学部分，其特点是“马克思主义诞生以前的古典学术著作，适当介绍当代具有定评的各派代表作品”；2.80年代北京经济学院出版社出版的“诺贝尔经济学奖获得者著作丛书”，其特点是获诺贝尔经济学奖的著作；3.80年代上海三联出版的“当代经济学译库”，其定位是当代经济学的名人名著；4.90年代后期中国人民大学出版社开始出版的“经济科学译丛”则以经济学教科书为主。这四套译丛定位各异，互不重叠，从而赢得了市场份额。

我们编辑出版的这套译丛，把时间限定在20世纪，想重点体现时代特点，反映20世纪经济学所关注的问题，汇集20世纪的经济学成果，为我们现在的改革提供一个参照系统，意义在现实性。

丛书主编　梁小民

第一版序

本书内容是关于博弈数学理论的阐述及应用。该理 V
论是由我们两人之中的一个从 1928 年开始发展起来的。本书把这一理论第一次完整地呈现在读者面前。该理论的应用分两类：一是其在真正意义上的博弈问题中的应用，二是其在经济和社会问题中的应用。正如我们希望证明的那样，经济和社会问题可以从这个角度得到最好的解释。

我们将把这一理论应用于一些普通博弈之中，与其说是为了研究这些博弈，不如说是为了证实我们的理论。两者之间的相互促进将随着我们的研究进程变得越来越清晰。当然，我们的主要兴趣还是在经济和社会方面。这里，我们只能够探讨一些最简单的问题。不过，这些问题都是最基本的问题。另外，我们的最初目的是希望证明，研究如下问题的精确方法是存在的：利益的一致与对立、完善或不完善信息、自由的理性决策或机会因素的影响。

诺伊曼

摩根斯顿

1943 年 1 月　于普林斯顿

第二版序

第二版只是对第一版进行了一些小的改动。我们尽可能彻底地改正了印刷上的错误，并希望借此机会感谢那些在这方面曾经帮助过我们的几位读者。在这一版中，我们增加了一个附录，其内容是数字效用的公理化推导。这个问题在正文中有详细的讨论，主要是第3节中的定性分析。第一版中曾许诺的这个证明在一本期刊中发表，后来我们发现，将其作为一个附录也许更方便一些。本来，我们还计划增加更多附录，这些附录是关于工业布局的理论、四人博弈和五人博弈问题研究等，但是由于更为紧迫的其他工作而被迫放弃。

自第一版问世以来，出现了许多与这个题目有关的文章。

对数学感兴趣的读者也许已经注意到下面的著作或文章：关于统计估计的基础，沃尔德（A. Wald）发展了一种新理论，它密切联系并运用到了二人零和博弈理论［“最大
Vi 风险最小化统计决策函数”，《数学年报》，第46卷（1945），第265—280页］。他还把二人零和博弈的主定理（见17.6）推广到了特定连续—无穷—情形［“诺伊曼的一个二人零和博弈定理的推广”，《数学年报》，第46卷（1945），第281—

286 页]。鲁密斯(L. H. Loomis)["论诺伊曼的一个定理", Proc. Nat. Acad. ,第 32 卷(1946)第 213—215 页]给出了这一定理的一个新的十分简单的初等证明(它也覆盖了第 154 页脚注①中提到的更为一般的定理)。再有,卡普兰斯基(I. Kaplanski)得出了有关二人零和博弈中纯策略和混合策略的一些有意思的结果["对诺伊曼的博弈论的一个贡献",《数学年报》,第 46 卷(1945),第 474—479 页]。我们也倾向于回到这一问题的数学方面。切沃雷(C. Chevalley)解决了第 258 页脚注中提到的群论问题。

对经济学有兴趣的读者可以阅读赫威茨(L. Hurwicz)["经济行为",《美国经济评论》,第 35 卷(1945),第 909—925 页]和马斯查克(J. Marschak)["诺伊曼和摩根斯顿的静态经济学新方法",《政治经济学杂志》,第 54 卷(1946),第 97—115 页]的分析,其中对本书中一些问题的分析和描述更容易理解。

诺伊曼

摩根斯顿

1946 年 9 月 于普林斯顿

第三版序

vii 第三版与第二版的不同之处，仅仅在于进一步改正了我们发现的印刷错误。我们也想借此机会感谢在这方面向我们提供帮助的读者。

自从第二版问世以来，有关这一主题的研究文献迅速增加。在写这个序的时候，一个全面的文献目录已经包括数以百计的著作和文章。我们不想在这里给出这样一个文献目录，而仅仅列举有关这个题目的一些著作：

(1)库恩(H. W. Kuhn)和塔克(A. W. Tucker)(编辑)，"博弈论进展(I)"，《数学年报》，第 24 号，普林斯顿(1950)，其中包括 13 位作者的 15 篇文章。

(2)库恩和塔克(编辑)，"博弈论进展(II)"，《数学年报》，第 28 号，普林斯顿(1953)，其中包括 22 位作者的 21 篇文章。

(3)迈克多纳尔多(J. McDonald)，《扑克、商业和战争中的策略》，纽约(1550)。

(4)迈克金西(J. C. C. McKinsey)，《博弈论入门》，纽约(1952)。

(5)沃尔德，《统计决策函数》，纽约(1950)。

(6)威廉姆斯(J. Williams)，《成熟的谋士、博弈论的

初学者》,纽约(1953)。

除(6)之外,上述著作中都可以找到与这个题目有关的参考文献目录。在过去的几年中,加利福尼亚圣莫尼卡的兰德公司的研究人员也在这个领域做了大量工作。有关这些工作的文献目录见兰德的出版物,第 RM - 950 号。

在 n 人博弈理论中,关于"非合作"博弈问题的研究取得了一些进展。在这方面,尤其值得一提的是纳什(J. F. Nash)的工作["非合作博弈",《数学年报》,第 54 卷(1951),第 286—295 页]。(1)、(2)和(4)中也提到了这一点。

关于经济学的发展,特别值得一提的是关于"线性规划"和"分配问题"方面的研究,它们呈现出与博弈论越来越密切的联系。读者会在(1)、(2)和(4)再次发现这种现象。

1.3 节和第二版增加的附录中提出了效用理论,这一理论已经在理论、实验和各种各样的讨论中有了相当大的进展。这方面,读者可以参阅如下著作:

弗里德曼(M. Friedman)和萨维奇(L. J. Savage),"包含风险的选择的效用分析",《政治经济学》,第 56 卷(1948),第 279—304 页。

马斯查克,"理性行为、不确定前景和可度量的效用",《计量经济学》,第 18 卷(1950),第 111—141 页。 Viii

莫斯泰勒(F. Mosteller)和诺吉(P. Nogee),"效用的一个实验度量",《政治经济学》,第 59 卷(1951),第 371—404 页。

弗里德曼和萨维奇,"期望效用假说和效用的可测

性”,《政治经济学》,第 60 卷(1952),第 463—474 页。

也可参见《计量经济学》的基数效用专题论丛,第 20 卷(1952):

沃尔德,“序数偏好还是基数效用”。

梅恩(A. S. Manne),“强独立性假设——汽油混合物和概率混合物”。

萨缪尔森(P. A. Samuelson),“概率、效用和独立性公理”。

马林夫得(E. Malinvaud),“诺伊曼—摩根斯顿的强独立性公理注释”。

关于上述专题研究中几位作者的方法论批判问题,我们想说明的是,我们以习惯的方式谨慎地应用了公理化方法。因此,(3.6 节和附录中的)效用概念的严格公理化描述被辅以(3.1—3.5 节中的)试探性准备讨论。后者的作用是向读者传递一些观点,以评价和界定随后的公理化过程成立与否。尤其是,我们的讨论和那些章节中“自然运算”的选取覆盖了萨缪尔森—马林夫得“独立性公理”,而这一公理对于我们的研究工作来说是非常有意义的,也是非常基础性的。

诺伊曼

摩根斯顿

1953 年 1 月　于普林斯顿

技术说明

在很多情况下，本书所研究问题的本质和所使用的技巧使得我们必须运用纯粹的数学分析方法。其中没有怎么用到高等代数或微积分等，从这个意义上说，我们运用的只是初等数学。（两个不太重要的例外是：19.7 中的理论讨论和 A.3.3 中的说明中使用了简单的积分。）集合论、线性几何和群论的一些概念在这本书中发挥了重要作用，不过，它们也都是从这些学科的基础章节中被照搬过来的，而且，我们在一些章节中对之进行了翻来覆去的分析和解释。但是，本书毕竟不是一本入门书，因为数学演绎总是相对更难理解一些，更何况本书还广泛运用了逻辑学。

很难说当代数学中的哪一分支学科及其哪一部分是必需的。不过，要想比较透彻地了解本书所分析的问题，读者必须超越传统的数学推理方式，这些推理主要是数理逻辑、集合论和泛函分析式的推理。

我们以这种方式展现这个题目，为的是使那些精通数学的读者有机会体验这一研究过程。我们希望我们的这一努力会有所收获。

相应地，我们的论述没有完全按照数学本应该有的分

析方式进行，所有的定义和演绎都比其本应有的更加宽泛。另外，纯粹文字讨论和分析也占有相当大的篇幅。尤其是，我们尽可能给出主要数学演绎的文字解释。我们希望，这一过程将用非数学的语言阐明数学方法所要表达的内容——并说明，在什么地方，它会给出数学演绎所不能给出的结果。

结合我们的方法论立场，我们将遵从理论物理学这个优秀典范来进行我们的分析。

对数学不大感兴趣的读者应该略去那些数学太多、太复杂的章节。我们没有明确列出这些章节，因为这纯属读者的个人判断问题。不过，对于一般读者来说，目录中带有星号的章节有可能是数学太多的章节。读者会发现，从严格意义上说，略去这些章节会暂时断开本书逻辑上的链条，但对前面部分的理解影响不大。越来越深入地阅读下去的时候，略去的那些章节将变得越来越重要，演绎中的缺陷也将变得越来越明显。这时，建议读者重新从头开始阅读，越熟悉就越易于理解。

致　谢

作者感谢普林斯顿大学和该校高等研究院，没有它们的真诚帮助，本书就不可能出版。

我们也深深感谢普林斯顿大学出版社在战时困难的条件下，为本书出版所付出的诸多努力。本书出版者最大限度地理解了作者的意图。

目录

第一版序 1
第二版序 2
第三版序 4
技术说明 7
致谢 9

第1章 经济问题的描述 1
1. 经济学中的数学方法 1
1.1 概要 1
1.2 数学方法运用中的困难 2
1.3 对目标的必要限制 9
1.4 总结 10
2. 理性行为问题的定性分析 11
2.1 理性行为问题 11
2.2 “鲁滨孙”经济与社会交换经济 14
2.3 变量个数和参与者人数 18

2.4　多个参与者的情况：自由竞争　20
2.5　“洛桑学派”的理论　22
3. 效用的概念　23
3.1　偏好和效用　23
3.2　度量原理的准备性讨论　25
3.3　概率和数字效用　26
3.4　度量原理的详细讨论　30
3.5　数字效用的公理化　36
3.6　公理及其解释　39
3.7　关于公理的一般说明　42
3.8　边际效用概念的作用　45
4. 理论结构：解和行为标准　47
4.1　对于一位参与者来说解的最简单概念　47
4.2　推广到所有参与者　51
4.3　作为分配集的解　52
4.4　不可递的“优越”或“占优”概念　56
4.5　解的精确定义　59
4.6　解的“行为标准”解释　61
4.7　博弈和社会组织　65
4.8　总结　66
第2章　策略博弈的一般形式　70
5. 概论　70
5.1　从经济学到博弈的重点转移　70
5.2　一般分类原则和程序　71
6. 简化的博弈概念　74

6.1　术语解释　74

6.2　博弈的要素　75

6.3　信息和预备关系　77

6.4　预备性、可递性和信号传递　79

7. 完备的博弈概念　84

7.1　每个动作特征的可变性　84

7.2　一般描述　88

8. 集合和分拆　93

8.1　对博弈进行集合论描述的必要性　93

8.2　集合及其性质图示　94

8.3　分拆及其性质图示　97

8.4　集合与分拆的逻辑学解释　101

9. 博弈的集合论描述　103

9.1　描述一个博弈的分拆　103

9.2　分拆及其性质讨论　109

10. 公理化描述　113

10.1　公理及其解释　113

10.2　公理的逻辑讨论　118

10.3　关于公理的一般说明　119

10.4　图示　120

11. 策略和博弈描述的最终简化　123

11.1　策略的概念及其形式化描述　123

11.2　博弈描述的最终简化　127

11.3　在一个博弈的简化型中策略的作用　130

11.4　零和约束的含义　131

第 3 章　二人零和博弈：理论　132
12. 准备性研究　132
12.1　概论　132
12.2　一人博弈　133
12.3　机会和概率　135
12.4　下一个目标　136
13. 谓词演算　137
13.1　基本定义　137
13.2　最大值和最小值　139
13.3　交换性　143
13.4　混合情况：鞍点　146
13.5　主要结果的证明　149
14. 严格决定的博弈　153
14.1　问题描述　153
14.2　小博弈和大博弈　156
14.3　辅助博弈　158
14.4　结论　164
14.5　严格决定性分析　167
14.6　玩家对换和对称性　171
14.7　非严格决定的博弈　173
14.8　严格决定性的详细分析方案　175
15. 具有完美信息的博弈　176
15.1　目的　176
15.2　严格条件（第一步）　179
15.3　严格条件（完整归纳）　183

15.4 归纳步骤的严格讨论 186
15.5 归纳步骤的严格讨论(续) 191
15.6 完美信息情况下的结果 194
15.7 在国际象棋中的应用 196
15.8 文字讨论 198
16. 直线性和凸性 202
16.1 几何背景 202
16.2 向量运算 204
16.3 支撑超平面定理 210
16.4 矩阵择一定理 214
17. 混合策略:全部博弈的解 221
17.1 两个基本例子 221
17.2 上述观点的推广 223
17.3 上述程序应用于一次具体博弈的理由 226
17.4 混合策略的小博弈和大博弈 229
17.5 广义严格决定性 231
17.6 主要定理证明 235
17.7 纯策略与混合策略方法比较 238
17.8 广义严格决定性分析 242
17.9 良策的其他特征 245
17.10 错误、错误的后果和永久最优 247
17.11 交换玩家:对称性 252
第 4 章 二人零和博弈的例子 258
18. 一些基本的博弈 258
18.1 最简单的博弈 258

18.2 简单博弈的定量分析 260
18.3 定性的特征化描述 264
18.4 具体例子：硬币配对的推广 268
18.5 更复杂一些的例子 272
18.6 机会和不完美信息 278
18.7 上述结果的解释 282
19. 扑克与诈叫 284
19.1 扑克游戏描述 284
19.2 诈叫 288
19.3 扑克游戏描述(续) 289
19.4 规则的严格描述 291
19.5 策略描述 292
19.6 问题陈述 296
19.7 从离散情况过渡到连续情况 299
19.8 解的数学决定 302
19.9 解的详细分析 308
19.10 解的解释 310
19.11 更加一般的扑克 315
19.12 各手牌离散的情况 316
19.13 m 个可能的叫牌 318
19.14 交替叫牌 320
19.15 全部解的数学描述 327
19.16 解的解释：结论 330
第5章 三人零和博弈 333
20. 准备性研究 333

20.1　一般观点　333
20.2　联盟　335
21. 三人简单多数博弈　337
21.1　博弈描述　337
21.2　博弈分析："协议"的必要性　338
21.3　博弈分析：联盟和对称性的作用　340
22. 更多例子　342
22.1　不对称分配：补偿的必要性　342
22.2　不同力量的联盟　345
22.3　一个不等式　348
23. 一般情况　351
23.1　详尽讨论：非本质博弈和本质博弈　351
23.2　完全公式化描述　353
24. 关于一个反对意见的讨论　355
24.1　完美信息及其意义　355
24.2　详细讨论：三个或更多个玩家之间补偿的必要性　357
第6章　一般理论的描述：n 人零和博弈　361
25. 特征函数　361
25.1　动机和定义　361
25.2　v(S)概念的讨论　364
25.3　基本性质　365
25.4　直接的数学结果　367
26. 用一个给定的特征函数构造一个博弈　369
26.1　博弈的构造　369

26.2 总结 373
27. 策略等价性:非本质博弈和本质博弈 373
27.1 策略等价性与简化型 373
27.2 不等式和数量 γ 377
27.3 非本质性和本质性 378
27.4 各种准则和不可加效用 380
27.5 本质博弈中的不等式 382
27.6 特征函数的向量运算 385
28. 群、对称性和公平 387
28.1 置换、置换群及其对博弈的影响 387
28.2 对称性和公平 392
29. 三人零和博弈的重新讨论 395
29.1 定性讨论 395
29.2 定量讨论 399
30. 一般定义的严格形式 401
30.1 定义 401
30.2 讨论和简要重述 403
30.3 饱和的概念 406
30.4 三个直接目标 413
31. 结果 414
31.1 凸集、平集和占优关系准则 414
31.2 全部解的系和一元解 423
31.3 与策略等价性相对应的同构 427
32. 本质三人零和博弈的全部解的确定 430
32.1 数学描述和几何方法 430

32.2　全部解的决定　434
33. 结论　438
33.1　解的多样性、歧视及其含义　438
33.2　静态与动态　441
第7章　四人零和博弈　442
34. 准备性研究　442
34.1　概要　442
34.2　本质四人零和博弈的形式化描述　443
34.3　玩家的置换　446
35. 立方体Q的一些特殊点的讨论　449
35.1　隅角Ⅰ(和Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ)　449
35.2　隅角Ⅷ(和Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ)　454
35.3　关于Q内部的点及其说明　459
36. 主对角线讨论　463
36.1　隅角Ⅷ的邻近:试探性讨论　463
36.2　隅角Ⅶ的邻近:严格讨论　467
36.3　主对角线的其余部分　475
37. 中心及其周围　477
37.1　中心周围情况概述　477
37.2　两种选择及对称性的作用　480
37.3　中心点处的第一选择　481
37.4　中心点处的第二选择　483
37.5　两个中心解的比较　485
37.6　不对称的中心解　486
38. 中心点邻近的一族解　489

38.1　属于中心点处第一种选择的解及其变换　489
38.2　严格讨论　492
38.3　上述解的解释　501
第8章　关于 $n \geqq 5$ 博弈的一些说明　505
39. 各类博弈的参数个数　505
39.1　$n=3,4$ 的情况　505
39.2　$n \geqq 3$ 的情况　506
40. 对称五人博弈　508
40.1　对称五人博弈的形式体系　508
40.2　两种极端情况　509
40.3　对称五人博弈与1、2、3对称四人博弈之间的关系　512
第9章　博弈的合成与分解　519
41. 合成与分解　519
41.1　全部解能够被决定的 n 人博弈　519
41.2　第一个类：合成和分解　520
41.3　严格定义　523
41.4　可分解性分析　526
41.5　修改的必要性　529
42. 理论的修改　530
42.1　零和条件的不完全放弃　530
42.2　策略等价：常数和博弈　530
42.3　新理论中的特征函数　534
42.4　新理论中的分配、占优和解　536
42.5　新理论中的本质性、非本质性和可分解性　538

43. 分解分拆 541
43.1 裂集和成分博弈 541
43.2 全部裂集的系的性质 542
43.3 全部裂集的系的特征与分解分拆 544
43.4 分解分拆的性质 547
44. 可分解博弈:理论的进一步推广 550
44.1 一个可分解的博弈的解及其成分的解 550
44.2 分配和分配集的合成与分解 551
44.3 解的合成与分解:主要结果 554
44.4 理论的推广:外部来源 557
44.5 剩余 559
44.6 对剩余的限制:新结构中一个博弈的非孤立特征 562
44.7 新结构 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的讨论 563
45. 对剩余的限制和扩展的理论结构 566
45.1 剩余的下限 566
45.2 剩余的上限:独立分配和完全独立分配 567
45.3 关于两个界限的讨论:它们的比率 571
45.4 独立分配与各种解 575
45.5 定理证明 577
45.6 总结 583
46. 一个可分解的博弈全部解的决定 586
46.1 分解的基本性质 586
46.2 分解及其与解的关系:有关 $F(e_0)$ 的初步结果 589

46.3 连续性 592
46.4 连续性 596
46.5 $F(e_0)$中的全部结果 599
46.6 $E(e_0)$中的完全结果 602
46.7 部分结果的图示 605
46.8 解释:正常区域和各种性质的遗传性 607
46.9 哑玩家 610
46.10 博弈的嵌入 611
46.11 正常区域的意义 615
46.12 转移现象的首次出现:$n=6$ 618
47. 新理论中的本质三人博弈 619
47.1 讨论的必要性 619
47.2 预备性分析 619
47.3 六种情况讨论:情况(Ⅰ)—(Ⅲ) 624
47.4 情况(Ⅳ):第一部分 625
47.5 情况(Ⅳ):第二部分 629
47.6 情况(Ⅴ) 635
47.7 情况(Ⅵ) 638
47.8 结果的解释:解中的曲线(一维部分) 640
47.9 连续性:解中的区域(二维组成部分) 642
第10章 简单博弈 644
48. 胜利联盟、失败联盟及其出现的博弈 644
48.1 41.1中的第二个类:联盟的决策 644
48.2 胜利联盟与失败联盟 646
49. 简单博弈的特征描述 649

49.1 胜利联盟与失败联盟的一般概念 649

49.2 一元集的特殊作用 653

49.3 实际博弈的 W、L 的特征描述 655

49.4 简单博弈的严格定义 658

49.5 简单博弈的一些基本性质 658

49.6 简单博弈及其 W、L：最小胜利联盟 W^m 659

49.7 简单博弈的解 661

50. 多数博弈和主解 663

50.1 简单博弈的例子：多数博弈 663

50.2 齐次性 667

50.3 分配的概念在求解中的更直接运用 669

50.4 直接方法 670

50.5 与一般理论的联系：严格阐述 673

50.6 结果的重新描述 677

50.7 结果解释 680

50.8 与齐次多数博弈的联系 682

51. 全部简单博弈的枚举方法 684

51.1 概论 684

51.2 饱和法：借助 W 来枚举 686

51.3 从 W 到 W^m 的理由：使用 W^m 的困难 689

51.4 改变后的方法：借助 W^m 的枚举 693

51.5 简单博弈与分解 697

51.6 非本质博弈、简单博弈和博弈的分解：剩余的处理 700

51.7 W^m 意义上的可分解性准则 701

52. n 较小时的简单博弈 705
52.1 $n=1,2,3$ 的情况 705
52.2 $n\geqq 4$ 时的二元集及其在 W^m 分类中的作用 706
52.3 情况 C^*、C_{n-2} 和 C_{n-1} 的可分解性 708
52.4 (有哑玩家的)不同于$[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的简单博弈:$C_k, k=0,1,\cdots,n-3$ 712
52.5 $n=4,5$ 713
53. $n\geqq 6$ 的简单博弈及其新情况 715
53.1 $n<6$ 时的有规律性 715
53.2 六个主要反例($n=6,7$) 717
54. 适宜博弈中全部解的确定 728
54.1 简单博弈不同于主解的解 728
54.2 全部解已知的博弈的枚举 729
54.3 分析简单博弈$[1,\cdots,1,n-2]_h$ 的理由 731
55. 简单博弈$[1,\cdots,1,n-2]_h$ 732
55.1 准备性说明 732
55.2 占优和首要玩家:情况(Ⅰ)和(Ⅱ) 733
55.3 情况(Ⅰ)的解决 735
55.4 情况(Ⅱ):$\underline{\mathrm{V}}$ 的确定 739
55.5 情况(Ⅱ):$\overline{\mathrm{V}}$ 的确定 743
55.6 情况(Ⅱ):$\mathscr{A}$ 和 S_* 747
55.7 情况(Ⅱ′)和(Ⅱ″):(Ⅱ′)的解决 749
55.8 情况(Ⅱ″):$\mathscr{A}$ 和 V′占优 752
55.9 情况(Ⅱ″):V′的确定 754

55.10　情况(Ⅱ′)的解决　762
55.11　完全结果的重新阐述　766
55.12　结果的解释　769
第11章　一般非零和博弈　777
56. 理论的扩展　777
56.1　问题描述　777
56.2　虚构玩家:零和扩展 $\overline{\Gamma}$　779
56.3　有关 $\overline{\Gamma}$ 的特征的一些问题　781
56.4　$\overline{\Gamma}$ 的运用所受到的限制　784
56.5　两种可能的过程　788
56.6　有歧视的解　789
56.7　其他情况　791
56.8　新结构　793
56.9　Γ 是零和博弈情况的重新分析　796
56.10　占优概念分析　801
56.11　严格讨论　807
56.12　解的新定义　811
57. 特征函数及相关问题　813
57.1　特征函数:扩展型和受约束型　813
57.2　基本性质　814
57.3　全部特征函数的确定　817
57.4　可去除玩家集　821
57.5　策略等价:零和博弈与常数和博弈　825
58. 特征函数的解释　830
58.1　定义分析　830

58.2 获益欲与损人欲 831

58.3 讨论 833

59. 一般分析 836

59.1 方案讨论 836

59.2 简化型和不等式 837

59.3 各种各样的题目 841

60. $n \leqq 3$ 一般博弈的解 845

60.1 $n=1$ 的情况 845

60.2 $n=2$ 的情况 846

60.3 $n=3$ 的情况 848

60.4 与零和博弈的比较 854

61. $n=1,2$ 时结果的经济学解释 855

61.1 $n=1$ 的情况 855

61.2 $n=2$ 的情况:二人市场 855

61.3 二人市场及其特征函数的讨论 858

61.4 第58节中观点的正当理由 861

61.5 可分割的物品:“边际对” 862

61.6 价格 866

62. $n=3$ 时结果的经济学解释:特殊情况 869

62.1 $n=3$ 时的特殊情况:三人市场 869

62.2 预备性讨论 871

62.3 解:第一种子情况 872

62.4 解:一般形式 876

62.5 结果的代数形式 877

62.6 讨论 879

63. $n=3$ 时结果的经济学解释：一般情况 882
63.1 可分物品 882
63.2 有关不等式的分析 885
63.3 准备性讨论 888
63.4 解 889
63.5 结果的代数形式 892
63.6 讨论 894
64. 一般市场 897
64.1 问题描述 897
64.2 一些特殊性质：垄断和买方垄断 899
第 12 章　占优与解的概念扩展 903
65. 扩展：特殊情况 903
65.1 问题描述 903
65.2 一般说明 905
65.3 排序、可递性和非周期性 906
65.4 对称关系和完备排序的解 910
65.5 半排序的解 912
65.6 非周期性和严格非周期性 915
65.7 对于一个非周期关系来说的解 921
65.8 解的惟一性、非周期性和严格非周期性 925
65.9 应用于博弈：离散性和连续性 929
66. 效用概念的推广 931
66.1 推广：理论描述的两个阶段 931
66.2 第一个阶段的讨论 932
66.3 第二个阶段的讨论 934

66.4 统一两个阶段的可取之处 937
67. 一个例子 938
67.1 描述 938
67.2 解及其解释 942
67.3 推广:不同离散效用刻度 946
67.4 有关讨价还价的结论 949
附录:效用的公理化描述 951
A.1 问题描述 951
A.2 基于公理的推导 953
A.3 总结说明 969
人名索引 976
词条索引 979
译者后记 1017

下册目录

第8章　关于$n \geqq 5$博弈的一些说明　505
39. 各类博弈的参数个数　505
39.1　$n=3,4$的情况　505
39.2　$n \geqq 3$的情况　506
40. 对称五人博弈　508
40.1　对称五人博弈的形式体系　508
40.2　两种极端情况　509
40.3　对称五人博弈与1、2、3对称四人博弈之间的关系　512
第9章　博弈的合成与分解　519
41. 合成与分解　519
41.1　全部解能够被决定的n人博弈　519
41.2　第一个类:合成和分解　520

41.3 严格定义 523
41.4 可分解性分析 526
41.5 修改的必要性 529
42. 理论的修改 530
42.1 零和条件的不完全放弃 530
42.2 策略等价:常数和博弈 530
42.3 新理论中的特征函数 534
42.4 新理论中的分配、占优和解 536
42.5 新理论中的本质性、非本质性和可分解性 538
43. 分解分拆 541
43.1 裂集和成分博弈 541
43.2 全部裂集的系的性质 542
43.3 全部裂集的系的特征与分解分拆 544
43.4 分解分拆的性质 547
44. 可分解博弈:理论的进一步推广 550
44.1 一个可分解的博弈的解及其成分的解 550
44.2 分配和分配集的合成与分解 551
44.3 解的合成与分解:主要结果 554
44.4 理论的推广:外部来源 557
44.5 剩余 559
44.6 对剩余的限制:新结构中一个博弈的非孤立特征 562
44.7 新结构 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的讨论 563
45. 对剩余的限制和扩展的理论结构 566
45.1 剩余的下限 566

45.2 剩余的上限:独立分配和完全独立分配 567
45.3 关于两个界限的讨论:它们的比率 571
45.4 独立分配与各种解 575
45.5 定理证明 577
45.6 总结 583
46. 一个可分解的博弈全部解的决定 586
46.1 分解的基本性质 586
46.2 分解及其与解的关系:有关 $F(e_0)$ 的初步结果 589
46.3 连续性 592
46.4 连续性 596
46.5 $F(e_0)$ 中的全部结果 599
46.6 $E(e_0)$ 中的完全结果 602
46.7 部分结果的图示 605
46.8 解释:正常区域和各种性质的遗传性 607
46.9 哑玩家 610
46.10 博弈的嵌入 611
46.11 正常区域的意义 615
46.12 转移现象的首次出现:$n=6$ 618
47. 新理论中的本质三人博弈 619
47.1 讨论的必要性 619
47.2 预备性分析 619
47.3 六种情况讨论:情况(Ⅰ)—(Ⅲ) 624
47.4 情况(Ⅳ):第一部分 625
47.5 情况(Ⅳ):第二部分 629

47.6 情况(V) 635

47.7 情况(VI) 638

47.8 结果的解释:解中的曲线(一维部分) 640

47.9 连续性:解中的区域(二维组成部分) 642

第10章 简单博弈 644

48. 胜利联盟、失败联盟及其出现的博弈 644

48.1 41.1中的第二个类:联盟的决策 644

48.2 胜利联盟与失败联盟 646

49. 简单博弈的特征描述 649

49.1 胜利联盟与失败联盟的一般概念 649

49.2 一元集的特殊作用 653

49.3 实际博弈的 W、L 的特征描述 655

49.4 简单博弈的严格定义 658

49.5 简单博弈的一些基本性质 658

49.6 简单博弈及其 W、L:最小胜利联盟 W^m 659

49.7 简单博弈的解 661

50. 多数博弈和主解 663

50.1 简单博弈的例子:多数博弈 663

50.2 齐次性 667

50.3 分配的概念在求解中的更直接运用 669

50.4 直接方法 670

50.5 与一般理论的联系:严格阐述 673

50.6 结果的重新描述 677

50.7 结果解释 680

50.8 与齐次多数博弈的联系 682

51. 全部简单博弈的枚举方法 684
51.1 概论 684
51.2 饱和法：借助 W 来枚举 686
51.3 从 W 到 W^{*} 的理由：使用 W^{*} 的困难 689
51.4 改变后的方法：借助 W^{*} 的枚举 693
51.5 简单博弈与分解 697
51.6 非本质博弈、简单博弈和博弈的分解：剩余的处理 700
51.7 W^{*} 意义上的可分解性准则 701
52. n 较小时的简单博弈 705
52.1 $n=1,2,3$ 的情况 705
52.2 $n\geq 4$ 时的二元集及其在 W^{*} 分类中的作用 706
52.3 情况 C^{*}、C_{n-2} 和 C_{n-1} 的可分解性 708
52.4 （有哑玩家的）不同于 $[1,\cdots,1,l-2]_{h}$ 的简单博弈：$C_{k}, k=0,1,\cdots,n-3$ 712
52.5 $n=4,5$ 713
53. $n\geq 6$ 的简单博弈及其新情况 715
53.1 $n<6$ 时的有规律性 715
53.2 六个主要反例（$n=6,7$） 717
54. 适宜博弈中全部解的确定 728
54.1 简单博弈不同于主解的解 728
54.2 全部解已知的博弈的枚举 729
54.3 分析简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_{h}$ 的理由 731
55. 简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_{h}$ 732

55.1 准备性说明 732
55.2 占优和首要玩家：情况（Ⅰ）和（Ⅱ） 733
55.3 情况（Ⅰ）的解决 735
55.4 情况（Ⅱ）：$\underline{V}$ 的确定 739
55.5 情况（Ⅱ）：$\overline{V}$ 的确定 743
55.6 情况（Ⅱ）：$\mathscr{B}$ 和 S_0 747
55.7 情况（Ⅱ'）和（Ⅱ"）：（Ⅱ'）的解决 749
55.8 情况（Ⅱ"）：$\mathscr{B}$ 和 V'占优 752
55.9 情况（Ⅱ"）：V'的确定 754
55.10 情况（Ⅱ'）的解决 762
55.11 完全结果的重新阐述 766
55.12 结果的解释 769
第 11 章 一般非零和博弈 777
56. 理论的扩展 777
56.1 问题描述 777
56.2 虚构玩家：零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 779
56.3 有关 $\overline{\Gamma}$ 的特征的一些问题 781
56.4 $\overline{\Gamma}$ 的运用所受到的限制 784
56.5 两种可能的过程 788
56.6 有歧视的解 789
56.7 其他情况 791
56.8 新结构 793
56.9 Γ 是零和博弈情况的重新分析 796
56.10 占优概念分析 801
56.11 严格讨论 807

56.12 解的新定义 811
57. 特征函数及相关问题 813
57.1 特征函数:扩展型和受约束型 813
57.2 基本性质 814
57.3 全部特征函数的确定 817
57.4 可去除玩家集 821
57.5 策略等价:零和博弈与常数和博弈 825
58. 特征函数的解释 830
58.1 定义分析 830
58.2 获益欲与损人欲 831
58.3 讨论 833
59. 一般分析 836
59.1 方案讨论 836
59.2 简化型和不等式 837
59.3 各种各样的题目 841
60. $n \leqq 3$ 一般博弈的解 845
60.1 $n=1$ 的情况 845
60.2 $n=2$ 的情况 846
60.3 $n=3$ 的情况 848
60.4 与零和博弈的比较 854
61. $n=1,2$ 时结果的经济学解释 855
61.1 $n=1$ 的情况 855
61.2 $n=2$ 的情况:二人市场 855
61.3 二人市场及其特征函数的讨论 858
61.4 第58节中观点的正当理由 861

61.5 可分割的物品:“边际对” 862
61.6 价格 866
62. $n=3$ 时结果的经济学解释:特殊情况 869
62.1 $n=3$ 时的特殊情况:三人市场 869
62.2 预备性讨论 871
62.3 解:第一种子情况 872
62.4 解:一般形式 876
62.5 结果的代数形式 877
62.6 讨论 879
63. $n=3$ 时结果的经济学解释:一般情况 882
63.1 可分物品 882
63.2 有关不等式的分析 885
63.3 准备性讨论 888
63.4 解 889
63.5 结果的代数形式 892
63.6 讨论 894
64. 一般市场 897
64.1 问题描述 897
64.2 一些特殊性质:垄断和买方垄断 899
第12章 占优与解的概念扩展 903
65. 扩展:特殊情况 903
65.1 问题描述 903
65.2 一般说明 905
65.3 排序、可递性和非周期性 906
65.4 对称关系和完备排序的解 910

65.5 半排序的解 912
65.6 非周期性和严格非周期性 915
65.7 对于一个非周期关系来说的解 921
65.8 解的惟一性、非周期性和严格非周期性 925
65.9 应用于博弈:离散性和连续性 929
66. 效用概念的推广 931
66.1 推广:理论描述的两个阶段 931
66.2 第一个阶段的讨论 932
66.3 第二个阶段的讨论 934
66.4 统一两个阶段的可取之处 937
67. 一个例子 938
67.1 描述 938
67.2 解及其解释 942
67.3 推广:不同离散效用刻度 946
67.4 有关讨价还价的结论 949
附录:效用的公理化描述 951
A.1 问题描述 951
A.2 基于公理的推导 953
A.3 总结说明 969
人名索引 976
词条索引 979
译者后记 1017

第 1 章　经济问题的描述

1. 经济学中的数学方法

1.1　概要

1.1.1　本书的宗旨是讨论经济学理论的一些基本问题，讨论这些问题所使用的方法不同于迄今为止文献中已有的方法。我们将着重分析的是经济行为研究中的一些基本问题，而这些经济行为是经济学家们长期以来一直关注的焦点。这些问题源于经济学家试图严格地描述个人效用最大化或企业家利润最大化的行为。众所周知，即便其中只涉及诸如双方垄断、双头垄断、寡头垄断和自由竞争等典型情况下二人或多人之间的直接或间接的商品交换，要完成这一任务，我们也会遇到相当大的困难，甚至会遇到一些难以克服的困难。我们希望弄清楚的一点是，经济系的每个学生都熟悉的这些问题，其结构在很多方面与人们目前的想像有很大的不同。另外，我们还将发现，这些问题的严格界定和求解只能借助于一些特殊的数学方 1

法进行，而这些方法完全不同于老一代数理经济学家或现代数理经济学家们所使用的传统方法。

1.1.2 我们的思考将把我们引向“策略博弈”(games of strategy)的数学理论应用上。这一理论是我们两人在 1928 年、1940 至 1941 年相继发展起来的。[①] 阐明这一理论之后，我们将按照前面所说明的那样将其运用于
2 经济学问题研究。这一理论将为一系列尚未解决的经济学问题提供一种全新的思考方法。

首先，我们必须以某种方式把博弈论与经济理论联系起来，并找出它们之间的共同之处。为此，我们首先简要地描述一些基本的经济学问题的本质，以使我们认清这些共同的要素。这将使我们明白，它们之间的联系不是随意的拼凑，相反，博弈论是建立经济行为理论的最恰当的方法。

我们的讨论仅仅指出了这两个领域之间的相似之处，我们的意图有可能因此而被误解。我们希望，在给出若干个合理的公式之后，读者会认识到，典型的经济行为问题完全等价于恰当的数学概念上的“策略博弈”。

1.2 数学方法运用中的困难

1.2.1 恰当的做法也许是首先描述经济理论的本

---

① 这一工作第一阶段的成果已经出版：冯·诺伊曼(J. von Neumann)，“Zur Theorie der Gesellschaftsspiele”，《数学年刊》第 100 卷(1928)，第 295—320 页。这一理论的后续完善和上述文章中的想法的更详尽的说明首先出现在本书之中。——1，①——表示该注条在原版书中的页码和编号。书中所提注条的所在均指原版书中的编序。——译者注

质，然后再简要地说明数学在经济学理论发展中的作用。

第一，我们要意识到，目前还不存在一个大一统的经济学理论体系，即便这样一个体系有一天能够发展起来，也不是我们这一代人所能够看到的事情。理由很简单，经济学是一门十分复杂的科学，它的建设可能不是在短期内一蹴而就的事情，更何况经济学家们对其所研究的现象所知还十分有限、描述也很不全面。只有那些未能认识到这一现状的人才有胆量尝试建立一个大一统的体系。在远比经济学先进得多的物理学中，目前也不存在这样一个统一的体系。

下面，我们来比较一下经济学与物理学：偶尔，某一物理理论看似为一个统一的体系提供了基础，但迄今为止，这类例子都不过是昙花一现，最多持续 10 年。物理学家们每天的工作肯定不是为了建立这样一个大一统的体系，而是致力于一些具体问题的研究。如果真的强调这一超乎寻常的标准，物理学大概不会有任何进步。物理学家们注重研究个案问题，在这些案例中，有些具有重大实际意义，有些则不那么有意义。也许，原本分崩离析、相距甚远的诸多领域的统一会取代这类工作，然而，这类幸事毕竟少见，并且只有在各领域被研究透彻了之后才会发生。考虑到经济学作为一门科学远比物理学复杂和困难得多、更难为人们所理解，并且尚处于早期发展阶段，因此，我们显然不应该指望经济学已经超过了上面所描述的物理学现状。

第二，我们必须注意到，不同的科学问题迫使我们尝试不同的分析方法，其中有些方法后来因为更好的方法的

出现而被摒弃。这一点有着重要意义:在某些经济学分支中,最富有成果的工作或许正是那些认真而有耐心的描述性工作。其实,这也许是现在或不远的将来,我们所要做的最主要的工作。换句话说,以一种缜密的方式发展一种理论是可能的,为此,数学的运用是必需的。

事实上,数学已经在经济学理论中得到了广泛运用,甚至过于广泛的运用。不过,到目前为止,这些应用都不太成功。这一点与我们在其他学科中看到的情况形成了鲜明的对比:在数学被运用得十分成功的大多数学科中,
3 这些学科的进步甚至离不开数学。这一现象的解释十分简单。

1.2.2 数学本不应该被运用于经济学的说法其实并没有多少站得住脚的理由。一种常见的观点是:数学之所以在经济学中无用武之地,是因为存在着所谓不可度量的重要因素,即人的因素和心理因素等。这些观点是错误的,我们完全可以对之嗤之以鼻。今天以数学作为主要分析工具的很多领域中在几百年以前都有过——或许曾经有过——此类反对意见。这里,“或许曾经有过”的意思是:让我们设想我们生活在物理学的数学化或近乎数学化前夕,即16世纪;在化学和生物学的发展中,这一时期是18世纪。在这些时期,物理学和生物学的境况还不如今天的经济学——经济学毕竟已经有了一些发展,因此,基于这些理由而怀疑数理经济学显然是站不住脚的。

关于大多数重要因素无法度量的观点,热理论提供了一个最具说服力的例子。在数学理论发展之前,热的测量并不比今天的经济学更令人乐观。热量和质量(能量和温

度）的精确度量是数学理论发展的结果，而不是其前奏。与此相比，在经济学中，价格、货币和利率，这些定量的和严格的概念早在几百年前就已经发展起来了。

反对在经济学中使用定量度量的另一种意见是，强调经济量缺乏无限可分性，从而认为处理无穷小量的微积分无法得到运用。这一观点也是站不住脚的，因为物理学和化学中有原子理论，电动力学中有量子等，在这些学科分支中，数学分析取得了众人皆知的成就，并不断取得成功。

这里，我们还应该提到在经济学文献中常见的另外一种观点，它也有可能作为反对数学方法的一种理论。

1.2.3　为了说明将要运用于经济学的概念，我们已经从物理学方面给出了一些讨论，我们将继续这样做。基于各种各样的理由，很多经济学家反对进行这样的比较。有人断言，经济学理论无法像物理学那样建立模型，因为它是一门关于人类社会现象的科学，从而必须把心理因素 4
等考虑进去。我们认为，这类说法至少是不成熟的。毫无疑问，一个合理的做法是，找出引导其他科学进步的因素，并探寻同样的原理是否也会引导经济学的进步。如果说经济学需要运用不同于其他学科的原理的话，那么，这也只能由经济理论的实际发展过程来揭示。这本身就是一项重大变革。不过，可以断言的是，我们还没有达到这一阶段——这并非意味着经济学需要完全不同的科学原理的那一天永远也不会到来。物理学的方法导致了物理科学的建立，以不同于物理学方法的其他方法来研究我们的问题是十分不明智的。

1.2.4　数学没有在经济学中取得成功肯定是另有理

由。主要原因是一些不利的环境因素的共同作用，而它们当中的一些是可以逐步消除的。首先，许多经济问题一直没有被表述清楚，并且常常是用模棱两可的术语表述的，由于问题到底是什么都相当不确定，以至于给人的第一印象是进行数学处理是毫无希望的。当概念和问题本身不清楚的时候，精确的方法的确无用武之地。因此，我们的首要任务是，通过更细心的描述把问题弄清楚。不过，即使是在问题描述较令人满意的经济学领域，数学工具也极少得到恰当的运用。原因在于，它们要么没有得到充分发展——如在试图决定一个一般均衡状态时只计算方程式和未知数的个数；要么只是完成了从文字表达到符号表达的转换，没有后续的数学分析。

其次，经济科学的经验基础是不充分的。当我们要把有待分析的问题数学化时，我们关于经济事实的知识与物理学中的相应知识仍然无法比拟。事实上，在物理学中，具有决定性的转折发生在 17 世纪，尤其是在力学领域。其所以成为可能，是因为此前天文学的发展，它的背后是几千年系统而科学的天文观察。具有独一无二才能的布拉赫(Tycho de Brahe)[①]代表着天文观察的顶峰。这样的事情在经济科学中还没有发生过。在物理学中，没有布拉赫，就不可能有开普勒和牛顿；我们更没有理由指望经济学会轻而易举地发生飞跃。

---

① 丹麦天文学家，进行了大量天文观察(其观察资料为开普勒行星运动三定律奠定了基础)，并发现了黄赤交角变化、月球运动的二均差等。——译者注

这些浅显的评述当然不应该被理解为是对统计经济研究的贬低。统计经济研究的发展为数学在经济学中的应用朝着正确方向前进带来了希望。

由于上述环境因素的共同作用,数理经济学尚未取得重大成功。数学是一种有着强大解释力的工具,但其不充 5
分和不恰当的运用却无法消除潜在的模糊性和无知。

由此出发,我们可以把我们的立场表述为:本书的宗旨不是进行经验学的研究。经济科学在这方面的进步显然还非常有限,但其必要性无论怎么强调也不过分。人们也许抱有这样的希望,即由于科学技术的进步和其他领域取得的经验,描述性经济学的发展历程将不会像天文学那样漫长。但是,不管怎样,这肯定不是一个按照预先计划能完成的任务。

我们将尽力利用有关人类行为的一般经验,这些人类行为适合数学研究并具有经济学上的重要性。

我们相信,这些现象得到数学处理的可能性是对1.2.2节中提到的“基本”反对意见的有力反驳。

然而,我们将会看到,这一数学化的过程并不总是轻而易举的。实际上,上面所提到的那些反对意见,也许有相当大的部分是来自直接数学化过程中可能遇到的显著困难。

我们将会看到,我们必须利用数理经济学中迄今为止还没有使用过的数学技术,而且进一步的研究很有可能引致新的数学分支的创立。

最后,我们还有可能看到,经济学理论的数学处理之所以不尽如人意,主要根源是这样一个事实:它提供的不

是证明，而是断言，且同一断言的数学表述实际上并不比其文字表述更好。缺乏证明的原因在于一种数学方法所尝试的领域过于庞大和过于复杂，以至很长时期以来——在获得大量新知识之前——几乎没有任何理由指望在经济学的数学化方面取得突破。经济波动理论和生产的时间结构理论就属于这类领域。这一事实说明，大量由此而产生的困难被低估了。它们在数量上是巨大的，而我们现在还没有对付它们的办法。

1.2.5 我们曾提到过数学成功地运用于一个新的学科可能带来的数学技术——事实上，数学本身——的那些变化的实质和可能结果。正确预见到这些变化是重要的。

我们绝不要忘记，这些变化有可能是十分重要的。数学在物理学中运用的决定性阶段——牛顿创立一个合理的力学分支——既带来了微积分的发明，更与微积分的发展密不可分。（存在着若干其他例子，但都不如这个例子更有说服力。）

6 社会现象的重要性、财富及其表现形式的多样性以及它们结构的复杂性绝不亚于物理学中那些相应的东西。因此，我们预计，甚或担忧，要在这一领域取得突破，必须要有足以与微积分的发明相提并论的新的数学发明。（顺便说一句，正是出于这种精神，我们当前的努力必须打一些折扣。）更不容置疑的是，仅仅重复我们在物理学中的成功做法，不大可能使我们在面对社会现象时取得同样的成功。这种可能性的确很渺茫，我们将证明，我们的讨论会遇到一些新的数学问题，这些问题完全不同于我们在物理学中所遇到的那些问题。

由于人们现在过于强调把微积分和微分方程等当作数理经济学的主要工具，因此，这些观察结果更应该被牢记在心。

1.3　对目标的必要限制

1.3.1　我们不得不先回到前面所提到的观点上：我们必须从已经描述清楚了的问题开始，即使从另外一个角度看，这些问题本来不那么重要。还应该指出的一点是，对这些较为简单的问题的研究所带来的也许只是众所周知的结果，但这些结果的严格证明无论如何是从未有过的。在给出这些结果之前，不存在堪称科学理论的理论。在星球的运行轨道被牛顿理论计算出来并得到解释之前，人们已经知道了星球的运动。其他领域中也发生过这样的事情，只不过不那么引人注目罢了。与此相类似，在经济学理论中，有些结果也是已知的，比如双头垄断结果的不确定性。然而，从一套严格的理论中推导出它们仍是有意义的。对于已经建立起来的经济学理论，我们也能够这么说，而且也应该这么说。

1.3.2　最后，还应该补充的一点是，我们不打算思考所研究问题的实践意义，因为这属于我们在前面所提到的理论领域的选择问题。在这方面，经济学与其他科学并没有什么不同。在这些科学漫长而富有成果的发展时期，从实践的角度看，最重要的问题也许根本没有被触及到。经济学中的情况肯定也是这样。如何稳定经济，如何增加国民收入，或如何合理地分配国民收入，这些问题都是非常重要的，没有人能够真正回答这些问题，我们也不必故弄

玄虚，假装这些问题已经有了科学的答案。

一门科学有其终极目标，也有与其终极目标相比而言的适中的问题，每当在这些问题的研究中发现了能够不断得到推广的方法，这门科学的飞跃就到来了。自由落体运动是一种很不起眼的现象，但正是对这一极为简单的事实
7 的研究及其与天文观察资料的对比，产生了力学。

对于我们来说，判断问题适中性的同一标准也应该适用于经济学，那种试图“系统地”解释所有经济现象的做法是徒劳的。恰当的做法是首先在一个有限的领域中做到精确和详尽，并由此进入另一个更广阔的领域，如此依次进行。这样还可以避免那些带有负面影响的理论实践，即把所谓的理论运用于其不适用的经济或社会改革之中。

我们相信，我们必须尽可能多地了解个人的行为和最简单的交换形式。边际效用学派的创立者正是采取了这一立场，并取得了令人瞩目的成功，不过，这一观点到现在还没有被广泛接受。经济学家常常提出一些过大和过于“棘手”的问题，而全然不顾那些有碍他们对这些问题做出陈述的任何事情。较早得到发展的学科——如物理学——的经验表明，急于求成只会阻碍进步，也阻碍对那些“棘手”问题的研究。我们没有理由认为在经济学中存在着一条捷径。

1.4 总结

1.4 经济学家们不能指望自己有比其他科学分支中的科学家更好的命运，认识到这一点非常必要。可以预见的是，经济学家必须首先研究那些包含在经济生活中的最

简单的问题，并努力建立一个能够解释这些问题的和真正符合精确科学标准的理论体系。我们能够满怀信心地说，从此以后，经济科学将会顺利发展，并逐步地把一些更为重要的问题纳入其中。[①]

这一起始阶段必然是试探性的，即从非数学的貌似合理的想法向正式的数学过程转变。最后确立的理论必须具有数学的严密性和概念的一般性。我们必须将其首先应用于对一些基本问题的解释中，这些问题的答案是人们从未怀疑过的，而且是不需要借助理论解释就可以获得的。在早期阶段，应用是为了使这一理论更加准确。当理论被应用于较为复杂的情况时，会在一定程度上超出我们熟悉的范围，并变得不那么易于理解，这时，我们就进入了 8
另一个阶段。在这里，理论和应用验证相互促进。这一阶段之后才是真正的成功：真正根据理论做出预测。众所周知，所有数学化了的学科都无一例外地经历了这些发展阶段。

2. 理性行为问题的定性分析

2.1　理性行为问题

2.1.1　经济理论的主题是极具复杂性的价格和生

---

① 实际上，这一出发点是有一定意义的，因为少数人之间的交换形式与我们在现代工业社会中观察到的最重要的交换形式或国际贸易中国家之间的易货贸易是相同的。——7，①

产、收入的投入产出机制。在经济学的发展进程中，人们发现，而且今天公认的是，研究这一庞大问题的方法之一是从分析组成经济社会的个人行为开始。在很多方面，这一分析已经走得相当远。尽管存在着很多分歧，也无论困难有多么大，这一方法的意义都是不容置疑的。不过，即使我们应该且必须首先限于静态经济分析，也仍然存在很多困难。主要困难是恰当地描述关于个人动机的公理。这些公理是无法回避的。传统上，这一问题被表述为：消费者追求最大效用或满足，企业家追求最大利润。

众所周知，要把效用这个东西界定清楚并加以应用是非常困难的，要将其描述为一个数字则更为困难。解决这些困难并非这本著作的目标。不过，在有些情况下，我们又不得不对其进行讨论，尤其在3.3和3.5节中。关于这个重要而有意义的问题，本书的观点将主要是机会主义的。我们要着重分析的问题并不是效用或偏好的度量问题，因此我们将尽可能合理地简化其他特征。我们将假设经济系统中所有参与者——消费者和企业家——的目的只是金钱或某种货币商品。我们假设这种商品具有无限可分性、完全可替代性、可以自由转移，甚至在数量上等价于每个参与者所渴望的“满足”或“效用”。（关于效用的数量特征，见上面提到的3.3节。）

有些经济学文献认为，根本没有必要讨论效用和偏好的概念，因为这些纯属没有经验观察结果的文字游戏，即套套逻辑。但是，对于我们来说，在数量分析的意义上，这些概念的重要性并不亚于物理学中明确建立起来的一些
9 概念，如力、质量和电荷等。也就是说，它们的直接形式是

定义，但通过建立于其上的理论，它们则由经验决定——且没有其他途径。因此，效用概念在这些经济理论中的地位就不仅仅是套套逻辑了，而是这些经济理论要运用它，且结果是能够与经验或至少能够与常识相对照的。

2.1.2　追求这些目标最大化的个人也被认为具有“理性的”行为。但是，我们可以有把握地说，目前并不存在关于理性行为问题的令人满意的答案。例如，有可能存在若干实现最优状态的途径，它们依赖于个人具有的知识和理解力。对所有这些问题的定性研究不可能详尽无遗地描述它们，因为它们必然包含着数量关系。因此，我们有必要对其进行定量描述，以使所有定量描述的因素都被考虑进去。这是一项极为艰巨的任务。我们可以有把握地说，在关于这一题目的浩如烟海的文献中，这一任务还远远没有完成。主要原因在于还未能针对这一问题发展出一套数学的分析方法，并将其正确运用。这表明，假设的伴随理性行为而产生的最大值问题还没有被描述清楚。事实上，较为详尽的分析（见 4.3—4.5 节）表明，这些重要关系远比大众和哲学家们使用的“理性”一词所包含的内容更为复杂。

关于个人行为的一个有价值的初步定性描述是由奥地利学派提出的，尤其关于与世隔绝的“鲁滨孙”（Robinson Crusoe）一个人组成的经济。我们也会偶尔提到伯姆巴沃克（Böhm-Bawerk）关于两个人或多个人之间的交换的一些看法。个人选择理论较近期的阐述是无差异曲线分析方法，它也建立在同样的事实或所谓事实之上，不过，这一方法通常被认为有诸多优越性。对此，我们更倾

向于 2.1.1 和 3.3 中的讨论。

然而,我们希望从一个完全不同的角度来研究交换问题,以实现对这一问题的真正理解。这一全新的角度正是"策略博弈"(game of strategy)。我们的方法即将清楚展现出来,尤其在一些概念得到正确的定量描述之后。这些概念已经在一些学者的著作中得到发展,比如伯姆巴沃克。不过,他的观点或许只能被当作这一理论的一个原型。

2.2 "鲁滨孙"经济与社会交换经济

2.2.1 让我们更深入地研究"鲁滨孙"模型所代表的那种经济。这是与世隔绝的一个人的经济,或者说是完全按照一个人的意志组织起来的经济。这一经济有着特
10 定数量的商品和若干有待满足的需要,问题是如何实现最大满足。其实,这是一个普通的极值问题,尤其考虑到我们前面已经证明了的关于效用特征的公理。这一问题的困难显然依赖于变量个数和要最大化的函数性质。不过,这更多地表现为实践中的困难,而不是理论上的困难。[1] 如果对连续生产和消费随时间延续(常常使用耐用消费品)这一事实进行抽象,就有可能得到最简单的模型。它被假设为经济理论的重要基础,不过,这一企图——奥地利版本的一个显著特征——常常会遭到质疑。用关于一个孤立的人的这一极简单模型作为一个社会交换经济的理论基础,必然会招致如下反对意见:这一模型并不代表

① 对于下面的内容来说,这一理论是否全面并不重要。——10,①

一个在许多方面都会受到社会影响的人。因此，有人说，如果一个人的选择是在一个社会中做出的，那么，他会受到模仿、广告、习俗等诸多因素的影响，关于他的分析就完全不同于对“鲁滨孙”的分析。这些因素肯定会造成重大不同，不过，关键问题是，它们是否改变最大化过程的形式上的性质。事实上，还从未有人证明有这种影响存在，加之我们仅仅关注的是最大化问题，因此，我们也不必考虑上述社会影响。

“鲁滨孙”与一个社会交换经济参与者之间的某些不同并不会影响我们的分析。例如，在前一情况中不存在充当交换媒介的货币，只存在一个计价标准，任何商品都可以用于这一目的。我们在 2.1.2 中假定的数字效用或货币的效用概念已经消除了这一困难。我们重申：我们的兴趣在于这样一个事实：做出这些极端简化之后，“鲁滨孙”所面对的只是一个形式上的问题，这一问题与一个社会经济的参与者所面对的问题有着本质不同。

2.2.2 我们假设“鲁滨孙”有一组给定的物理数字（有待满足的需要和商品），他的任务是以某种方式使用它们，以实现满足最大化。毫无疑问，他完全控制着决定结果的所有变量，如资源的分配、决定同一种商品在不同需要中的使用等。①

因此，“鲁滨孙”面对的是一个普通的极大值问题，正

① 有时，不可控制的因素也会出现，如农业中的气候。不过，这些纯属统计现象，因此能够通过众所周知的概率计算过程加以消除：即确定各种可能结果的概率和“数学期望”的概念。其对效用概念的影响见 3.3。——10，②

如我们在前面指出的那样，其困难纯粹是技术性的，而不是概念性的。

2.2.3 现在，我们考虑社会交换经济中的一位参与
11 者，他的问题当然与一个极大值问题有很多共同之处。不过，其中也包含一些很基本的、本质上完全不同的要素。他也追求最优结果，但是，为了实现这一目的，他必须与其他人发生交换关系。如果两个或多个人之间相互交换商品，那么，对于每一个人来说，结果不仅取决于他本人的行为，还取决于其他人的行为。因此，每一个参与者都试图最大化一个函数（前面所说的结果），其中的变量并不全然由他控制。这肯定不再是一个极大值问题，而是若干极大值问题的一个令人惊奇和令人茫然不知所措的混合。每一个人都受到另外一个原则的指导，并且无法确定影响其利益的所有变量。

这类问题是经典数学从未遇到过的。我们也许有点故弄玄虚地强调，这并不是函数分析等条件极值问题，也不是各种各样的微积分问题。很明显，即使是在最“基本的情况”下，如所有变量只能够有有限个取值，这类问题也会产生。

对这一极值问题存在许多误解，其中一个最严重的误解是如下一个非常有名的说法，即社会经济活动的目的是“为尽可能多的人提供尽可能多的商品”。因此同时满足两个（或多个）函数最大化要求的单一指导原则是不可能建立起来的。

毫不夸张地说，这样一个指导原则是自相矛盾的。（一般来说，当一个函数在某处有极值时，另一个函数在此

处没有极值。)这如同一个厂商应该在资金周转最快时有最高价格还是在支出最小时有最大销售收入之类的说法。如果这些原则的重要性有一个顺序,或者把它们加权平均的话,矛盾就消失了。然而,在一个社会交换经济中,这样的事情是不存在的,因为各个参与者同时都在追求各自的极大值。

有人错误地认为,这样的困难是能够克服的,就像第10页脚注②中"鲁滨孙"借助概率理论这一工具来消除其困难那样。每一位参与者都能够确定的是描述他本人行为的变量,但他无法确定描述他人行为的变量。从某一个人的角度看,那些有关"他人"的变量是无法由统计学来假设和描述的。这是因为,其他人,像他本人一样,也都受着理性原则的指导,无论这些原则具体意味着什么。不理解这些原则和所有参与者相互冲突的利益之间的相互影响,任何方法都不可能是正确的。

有时,这些原则中的一些会存在或多或少的一致性,那么,我们会接近于有一个简单的极值问题。但是,它们也可能是相互对立的。一个具有一般性的理论必须考虑到所有可能情况、所有中间情况及其所有组合。

2.2.4　"鲁滨孙"的想法肯定不同于社会交换经济中一个参与者的想法,关于这一点可以以如下方式来说明:除了他能够控制的那些变量之外,"鲁滨孙"面对的是 *12*
一些"死的"数据;它们是这一情况中不可改变的物质背景。(即便它们明显是变量,如第10页脚注②说明的那样,它们事实上也受到固定不变的统计学规律的支配。)他所面对的数字中,没有一个反映的是另外一个人的经济愿

望或企图。社会交换经济中的每一个参与者则不得不面对反映其他人的经济愿望的数据:这些数据是其他参与者的行为或(价格之类的)选择的结果。他对这些数据的预期将会影响他的行为;反过来,这些数据又反映了其他参与者对他的行为的预期。

因此,关于"鲁滨孙"经济的研究以及适用于他的那些方法,在经济理论中的价值要比迄今为止人们所认识到的更为有限。其理由并不在于我们在前面提到的那些社会关系——尽管我们还没有对它们的意义提出怀疑,而是在于起初的("鲁滨孙"的)极值问题与上面所提到的较为复杂的问题之间存在着概念上的不同。

希望上面的分析能够使读者相信,我们面对的是概念上的困难,而不仅仅是技术上的困难。"策略博弈"理论正是为了解决这一困难而建立的。

2.3 变量个数和参与者人数

2.3.1 在上一节用于说明一个社会交换经济的形式结构中,我们需要用一定个数的"变量"来描述这一经济中参与者的行为。因此,每一个参与者被指定一组变量——"他的"变量——用于描述他的行为,即他的愿望的准确表达形式。我们称这些集合为部分变量集。所有参与者的部分变量集合起来构成全部变量的集合,称为全集。因此,总变量个数取决于参与者即部分变量集的个数和每个部分变量集中变量的个数。

从纯数学的角度看,把一个部分变量集的所有变量当作一个变量并无不妥,有关这个参与者的变量对应着这个

部分变量集。事实上，这是我们在后面的数学讨论中经常用到的做法。在概念上，它绝对不会造成任何差异，而且将大大简化符号。

然而，在这里，我们建议暂时还是要区别每个部分变量集中的各个变量，自然地发展起来的经济模型都会有这样一个过程。因此，我们提倡用变量逐一描述每个参与者希望获得每种商品的数量。

2.3.2 我们必须强调的是，参与者部分变量集中变 13
量个数的任何增加都会使问题变得更加复杂，但这只是技术上的复杂。在一个"鲁滨孙"经济中，只有一个参与者和一个同时是全集的部分变量集。变量个数的增加会使极值的确定在技术上更为困难，但是，它不改变这一问题纯属一个极大值问题的特征。另一方面，如果参与者的个数，即部分变量集的个数增加了，那么，在本质上完全不同的事情就会发生。用后面的博弈论术语说，这意味着博弈中玩家个数的增加。简单地说，一个三人博弈根本不同于一个二人博弈，而一个四人博弈根本不同于一个三人博弈。在以后的分析中，我们将会看到，随着参与者个数的增加，这一问题的组合复杂性也会增加，正如我们在前面所看到的那样，它甚至不再是一个极值问题。

我们已经进入这一问题的一些细节性讨论，因为大多数经济学模型所描述的现象往往是这两类现象的稀奇古怪的混合。每当玩家，即社会交换经济的参与者的个数增加时，这一经济系统的复杂性通常也会随之增加。比如，交换商品和服务数量的增加和使用的生产过程更为复杂

等。这样,每个参与者的部分变量集中的变量个数很有可能随之增加。但是,参与者的个数,即部分变量集的个数也增加了,因此,上述两个原因以相同比例增加总的变量个数。想像出其中每一个的确切作用非常必要。

2.4 多个参与者的情况:自由竞争

2.4.1 在2.2.2—2.2.4中,我们详细比较了一个“鲁滨孙”经济和一个社会交换经济。我们强调,当存在适度个数的参与者时,即当其个数大于1时,后者的特征将变得更为突出。每个参与者受到预料之中的他人对其行为做出的反应的影响。对所有参与者来说,事情都是这样。这是双头和寡头垄断等经典问题中尚未解决的最大困难。当参与者的个数真的变得很大时,就出现了每个参与者的影响小得可以忽略不计的希望,上述困难就会消失,传统的经济学理论就会成为可能。当然,这些正是“自由竞争”的经典条件。的确,这是一切经济学理论的出发点。与大量卖者——自由竞争——这一情况相比,少数卖者的情况——垄断、双头垄断和寡头垄断——成了例外和非正常情况。(即使是在这些情
14 况中,考虑到买者之间的竞争,参与者的个数仍然很大。真正的小个数情况是双边垄断、一边垄断一边寡头、两边都是寡头的情况。)

2.4.2 关于这一传统观点,有如下公正说法:一个众所周知的现象是,在精确学科和物理学中,极大个数的情况常常比中等个数的情况更容易对付。关于包含10^{25}个分子的一团气体的精确理论远比关于九个主要天体组成

的太阳系的精确理论容易，更比关于三个或四个同样大小的星球组成的系统的理论容易。这当然归于在前一情况中应用统计和概率规律的可能性。

然而，对于我们的问题来说，这一类比还远远不够全面。关于 2,3,4,…个物体的力学理论是人所共知的，而且其一般理论形式（有别于其个别的和计算上的形式）是大数统计学理论的基础。对于社会交换经济——即“策略博弈”这一等价体，有关 2,3,4,…个参与者的理论还不存在。我们的上述讨论正是为了这一要求，而且我们以后的研究就是要努力满足这一要求。换句话说，只有当关于中等个数的参与者的理论得到了令人满意的发展，才有可能确定极大个数参与者是否是一种简化情况。让我们重述：由于上述与其他领域的类比，使我们有了这样一种希望，即这样的简化的确会发生。有关自由竞争的现有断言是对结果的一个很有价值的推测和很有诱惑力的预期。但是，它们不是结果，当上述条件没有得到满足时，将其作为结果在科学上是不成立的。

有大量经济学文献试图说明，存在着（交换比率的）
一个不确定的中间区域，它随着参与者人数的增加而逐步 15
变窄并趋于消失。这就提供了一个向自由竞争——参与者个数极大——这一理想情况的渐进过程，这时，所有的解都是惟一地决定的。我们希望这一情形具有一般性，但是，我们不能认为类似这一观点的任何事情已经结论性地建立起来了。无法逃避的步骤是：我们必须就小个数参与者的情况描述、解决和理解这一问题，然后才有可能说明大数极限（如完全竞争）情况下问题的特征是否会发生

变化。

2.4.3 我们需要从根本上重新审视这个题目，因为仅仅参与者个数的增加最终总能够导致自由竞争的说法既是不肯定的，也是不可能的。在自由竞争的经典定义中，除了参与者个数很大之外，还包含着其他假设。例如，如果一些大的组织出于某种理由联合起来采取行动，那么，大个数参与者这一条件显然也就无效了。“决定性”的交换有可能发生在少数大的“联盟”内部[1]，而不是在大量独立行事的个人之间。我们后面关于“策略博弈”的讨论表明，“联盟”的作用和规模在这整个题目中始终是决定性的，因此，上述困难仍旧是一个重要问题。任何有关从小个数参与者到大个数参与者“极限转变”的理论如果要令人信服，都必须解释这样一个问题：在什么环境中，这类大的联盟不会形成。也就是说，在什么情况下，大个数参与者这一条件会变得有效，并导致一定程度的自由竞争。在这些可能结果中，何者将会出现取决于问题中的物理数据。我们认为，如何回答这一问题，对于任何自由竞争理论来说，都是一种真正的挑战。

2.5 “洛桑学派”的理论

2.5 在结束这一节之前，我们必须提到洛桑学派的一般均衡理论和其他各种各样的理论体系，这些理论体系考虑了单个的“个人计划”和相互联系着的“个人计划”。

---

① 如工会、消费者合作组织、工业卡特尔和政治圈子中可以想像到的某些组织。——15，①

这些理论体系注意到了社会经济参与者之间的相互依存关系。然而,这是在有着广泛的约束条件下完成的。有时,自由竞争是假设条件,这时,参与者面对的是固定不变的条件,其行为就像“鲁滨孙”一样,专心致志于自己的满足最大化。在这些条件下,每个人的满足是相互独立的。在其他一些情况中,引入了其他约束条件,目的是排除各类参与者自由形成“联盟”。关于参与者之间的利益一致和利益对立如何影响参与者的行为,使其合作或有其他表现,常常存在着明确的假设,尽管有时这些假设被隐藏了起来。我们希望我们已经说明了,这样一个过程中的一个逻辑错误是,把未经证明的东西当作了论据,至少在我们希望对其进行讨论的层面上是这样。它回避了真正的困难,是在做文字游戏,而不是真正解决问题。当然,我们并不怀疑,这些研究还是有意义的,不过,它们的确没有能够回答我们的问题。

3. 效用的概念

3.1　偏好和效用

3.1.1　我们已经在2.1.1中指出,希望用一个相当宽泛的效用概念来描述个人偏好这一基本概念。很多经 *16*
济学家会认为,我们假设得太多(见我们在2.1.1做出的假设),相对于“无差异曲线”这一现代技术方法来说是一种倒退。

在给出具体讨论之前，作为一个一般理由，我们声明，我们的方法最坏也不过是经典的基本分析方法：通过简化和公式化来分解困难，即为了集中解决一个困难（正在进行的研究适合解决的问题），尽量合理地减少其他困难。还应该指出的一点是，关于偏好和效用的这一武断假设，将在我们讨论的主要内容中得到应用。不过，我们也会研究，如果回避这一假设的话，会给我们的理论带来什么影响（见66和67节）。

然而，我们认为，我们假设的一部分——即把效用当作是可度量的数量——其影响并不像经济学文献中通常认为的那么严重。我们将在下面的章节中证明这一点。我们希望读者原谅，我们仅仅简短地讨论效用这一如此重要的概念。由于效用的可度量性问题类似于物理学中具有相似特征的问题，所以，下面几点简要说明也许是非常有意义的。

3.1.2 历史地看，效用最初被假设为能够被定量地度量，即被假设为一个数字。针对这一观点的最初形式，站得住脚的反对意见是提得出来的，并且已经被提出来了。显然，每一种度量——毋宁说每一可度量性——必定最终基于某种直觉，这一直觉无法、并且肯定没有必要被进一步分析。[①] 至于效用，关于一件（或一组）物品和另一件（或一组）物品的偏好的直接感觉就提供了这样的基础。但是，这仅仅允许我们就同一个人来说，在同一时刻，一件物品的效用大于另一件物品的效用，它无法成为就某

① 如物理学各分支学科中对光、热和肌肉力之类的感觉。——16，①

一个人进行效用的数字比较的基础，更无法成为不同人之间效用比较的基础。这是因为，对于同一个人来说，不存在任何在直觉上有意义的方法把两个效用相加，说效用不具有数字特征似乎更合理。无差异曲线分析这一现代方法是描述这种情形的一个数学过程。

3.2　度量原理的准备性讨论

3.2.1　所有这些不由使人想起早期热理论中的情形：它也基于一个物体比另外一个物体更热这一个在直觉上非常清楚的概念，不过，并没有直接的方法来清楚地表达热多少、热多少倍或在什么意义上更热。

与热理论的比较还说明，关于这样一种理论最终会变成什么样子，一个人能够先验地预测到的东西是多么有限啊！正如我们已经知道的那样，上述粗略的说明并不代表后来实际发生的事情。后来发生的事情是，热是能够被度量的，但不是由一个数字度量，而是由两个数字度量：热量和温度。前者是数字性的描述，因为它表现出可相加性，并且以一种未曾预料到的方式联系着机械能，而机械能总是数字性的。后者也是数字性的，但更为微妙，它在任何意义上都不是可相加的，但是，关于它的一个严格数字刻度却因对一种具有一致行为的理想气体的研究而产生了，并且绝对温度的作用联系着熵定理（entropy theory）。 17

3.2.2　热理论的发展历史表明，在对任何概念做出最终的否定断言时，都必须十分小心。今天看来，效用是非数字性的，但是，热理论的发展史也许会在效用理论中

重演，没有人能够预言它会有哪些衍生后果和不同的表现形式。① 我们应该鼓励从理论上解释一个数字效用的形式上的多种可能性。

3.3 概率和数字效用

3.3.1 我们还可以再前进一步，超越上述双重否定——那只是对数字效用的不可能性这一不成熟断言的警告。我们能够证明，基于无差异曲线分析所依据的基础，只需稍做努力就可以得到数字效用。

我们曾多次指出，数字效用取决于对效用差异进行比较的可能性。与假设能够说明偏好相比，一个更为宽泛的假设是能够对效用差异做出比较。但是，经济偏好必定是关于各种选择机会的偏好，这些选择机会允许我们忘却这一区别。

3.3.2 让我们暂时接受下面关于一个人的描述：他的偏好体系是无所不包的和完备的，即对任意两件物品或想像中的任意两个事件，他总有清楚的直觉上的偏好。

更确切地说，对于摆在他面前的任意两个可供他选择的东西，他总能够说出他偏好其中哪一个。

这一情形的一个十分自然的推广是，允许这样一个人不仅能够比较两个事件，而且能够比较具有明确概率的不同事件组合。②

---

① 光、颜色和波长理论的全然不同发展就是这类广泛可能性的一个很好例子。所有这些概念也成了数字性的，但方式截然不同。——17，①

② 如果他从事明显依赖于概率的经济活动，那么，这一点的确是必需的。见第 10 页脚注②。——17，②

这里，两个事件的组合的意思是：假设 B 和 C 分别是两个事件，为简单起见，其出现的概率各为 50%，那么，它 18
们的一个"组合"是以 50% 的概率 B 发生，而且（如果 B 不发生）以（余下的）50% 的概率 C 发生。我们强调，这两个事件是相互排斥的，这样，其他与之互补的事件都不可能发生。还有，B 和 C 之一肯定发生。

重申我们的观点。我们期望，这个人在直觉上清楚他倾向于事件 A、事件 B 和 C 的 50—50 组合中的哪一个。显然，如果他认为 A 优于 B 且 A 优于 C，那么，A 优于 B 和 C 的组合。同样，如果他认为 B 优于 A，且 C 也优于 A，那么，B 和 C 的组合优于 A。但是，如果他认为 A 优于 B，同时 C 优于 A，那么，要断言 A 优于 B 和 C 的组合就必须获得更多信息。具体来说：如果他认为 A 优于 B 和 C 的 50—50 组合，那么，这为偏好强度的数字估计提供了一个合理的基础，即 A 与 B 之中他偏好 A 的程度超过 C 与 A 之中他偏好 C 的程度。[①②] 如果接受了这一观点，那么，就存在着一个尺度，根据这一尺度来比较 C 优于 A 的程度和 A 优于 B 的程度。如此一

---

① 用一个简单的例子来说：假设一个人认为一杯茶优于一杯咖啡，而一杯咖啡优于一杯牛奶。如果要想知道后一偏好在程度上是否超过前者——即效用差异，我们只需将他置于如下必须做出决定的环境之中：一只杯子中是咖啡，另一只杯子中 50% 的概率是茶，50% 的概率是牛奶。——18，①

② 注意，我们仅仅做出了有关个人直觉的假设，即允许决定偏好两个"事件"之中的哪一个。但是，我们并没有假设如何估计两个偏好的相对强度大小——即用后面的术语来说，效用的差。

这一点是重要的，因为通过"提问"，前一种信息应该能够以一种重复的方式获得。——18，②

来，效用——毋宁说效用的差——就变得可以用数字度量了。

只需对 A、B 和 C 做出这种程度的比较就足以提供“距离”的数字度量。在经济学中，这一结果首先为帕累托（Pareto）发现。在数学中，关于直线上点的位置，欧几里得（Euclid）给出了与此完全相同的观点——事实上，这是他那经典的数字距离的推导的重要基础。

如果所有可能的概率都得到使用，数字度量的引入甚至能够弄得更直接：考虑三个事件，C、A 和 B，关于这三个事件的个人偏好顺序是我们在前面说明的顺序。令 α 是一个界于 0 与 1 之间的实数，B 发生的概率等于 $1-\alpha$，余下 C 发生的概率等于 α，这使得渴望 A 的程度与渴望 B 和 C 的组合的程度相等。然后，用 α 作为 A 优于 B 的程度对 C 优于 B 的程度的比率的数字估计。[①] 这些
19 想法的严格而详尽说明需要运用公理化方法。对这一基础的简单处理的确是可能的。我们将在 3.5—3.7 论述它。

3.3.3 为避免误解，我们在这里明确指出，上面作为偏好基础的“事件”是未来事件，以使所有逻辑上可能的各种结果同样值得考虑。不过，就我们当前的目标来说，考虑关于未来不同时期的事件的偏好问题则是毫无必要

① 这为另一个例子提供了良好的机会。上述技术允许直接确定拥有 1 单位某种商品的效用相对于占有 2 单位同一种商品的效用的比率 q。这个人必须面对如下选择机会：确定地得到 1 单位；以概率 α 得到 2 单位或有 $1-\alpha$ 的概率什么也得不到。如果他倾向于前者，那么，$\alpha<q$；如果他倾向于后者，那么，$\alpha>q$；如果他不能说出他倾向于何者，那么，$\alpha=q$。——18，③

的复杂化。[①] 然而,这类困难是可以消除的,为此,我们只需把我们在同一个标准化的时刻感兴趣的“事件”都放在最近的未来。

概率通常被设想为一个主观概念,本质上或多或少是一种估计。由于我们打算用它来建立个人效用的数字估计,上述概率观点就无法服务于我们的目的。因此,最简单的办法是坚持概率是长期频率的解释。这样就直接提供了必要的数字基础。[②]

3.3.4 个人效用的这一数字度量方法当然有赖于个人偏好系统的完备性假设。[③] 可以想像出这样的情况,个人既不能够说出两个选择机会中他偏好哪一个,而且对它们的渴望程度又不相等。这种情况甚至以某种方式变成现实。在这种情况下,无差异曲线分析将无法运用。[④]

对于个人和组织来说,这种可能性到底有多么真实似乎是一个极为有趣的问题,不过,它的确是一个有关事实的问题,值得进一步研究。我们将在3.7.2中重新讨论它们。

无论如何,我们希望我们已经解释清楚了,无差异曲线要么包含的内容太多;要么太少:如果个人偏好是完全 20

---

① 众所周知,这联系到储蓄和利息理论。这类关系很有意思且极难捉摸。——19,①

② 如果你反对关于概率的频率解释,那么,这两个概念(概率和偏好)可以一起被公理化。这也带来了一个令人满意的数字效用概念。我们将在后面有机会讨论它。——19,②

③ 我们还没有获得不同人的效用的定量或定性比较的基础。——19,③

④ 这类问题纯属数学中的有序集理论。上述问题尤其等于这样一个问题,即根据偏好,事件是否形成一个完备或半序集。见65.3。——19,④

不可比较的，那么，无差异曲线也就不存在[①]；如果个人偏好是完全可比的，那么，我们就能够获得一个（惟一界定的）数字效用，无差异曲线就成了多余的东西。

当然，对于能够计算（货币）成本和利润的企业家来说，所有这些都没有意义。

3.3.5 一种可能的反对意见是，关于效用的可度量性的这些繁琐细节都是不必要的，因为我们要描述的普通人并不严格计算其效用，他的经济活动是在相当模糊的情况下决定下来的。当然，他关于光、热和肌肉努力等的行为也是这样。但是，为了建立一门物理科学，这些现象必须得到度量。其后，个人则不得不直接或间接地——甚至在其日常生活中——使用这类度量。经济学中也许也会有这么一天。一旦建立了使用这一工具的经济理论，在这一理论的帮助下，做到对经济行为的较为充分的理解，那么，个人生活也许就会受到实质性的影响。因此，研究这些问题并非是不必要的繁琐细节。

3.4 度量原理的详细讨论

3.4.1 读者也许会认为，基于上述内容，我们惟有求助于假设一个刻度的存在来得到效用的数字刻度。我们在3.3.2中曾经指出，如果一个人认为 A 优于概率各为50%的 B 和 C 的组合（同时 C 优于 A 且 A 优于 B），这为

---

① 位于同一条无差异曲线上的点必须是完全等同的，从而不存在不可比的情况。——20，①

如下数字估计提供了合理的基础：在 A 与 B 中偏好 A 的程度大于 B 与 C 中偏好 C 的程度。这里，我们是否在假设——或理所当然地认为——一个偏好大于另一个偏好，即这一说法传递了某种含义？这一观点完全误解了我们的分析方法。

3.4.2　我们并没有做出这样的假设，其实，我们只假设了这样一件事情，即想像中的事件能够与概率结合起来，而且，这一做法有着充分的经验证据。因此，关于赋予事件的效用，我们也必须做出同样的假设，无论这些事件是什么。

用更为数学化的语言来说：科学中常有事情是，先验的而非数学的数量被赋予物理世界的特定方面。偶尔，这些数量能够被归类在一个域中，在这个域之内，特定的、自然或物理地定义的运算（physically defined operation）是可能的。因此，物理地定义的“质量”允许加法运算。物理几何地定义的“距离”[1]这一数量允许同样的运算。另一方面，物理几何地定义的“位置”则不允许加法运算[2]，但 21
是它允许建立两个位置的“重心”这一运算[3]。再有，其他物理几何地定义的概念，如通常表达为向量的速度和加速

① 为便于说明，让我们把几何学看作物理学的一个分支。这是一个完全站得住脚的观点。说到“几何学”，我们指欧几里得几何学。这同样是为了便于说明。——20，②

② 我们正在考虑一个“齐次的”（homogeneous）欧几里得空间，其中没有原点或上面提到的参照系。——21，①

③ 设有两个给定的质量 α 和 β 占据两个位置，正规化使总质量等于 1 个单位并非难事，即 $\beta=1-\alpha$。——21，②

度，也允许“加法”运算。

3.4.3 在所有这些事例中，“自然的”运算被赋予一个名称，这一名称使人们联想到一种数学运算——如上述“加法”，但是，我们必须小心避免误解。这个专有术语并非总意味着具有相同名称的两种运算是完全相同的——显然不是这种情况；它只表示，它们具有相似的踪迹，而且有望最终建立起它们之间的对应关系。这当然是通过为要研究的物理领域建立数学模型来完成的，在这一模型之内，这些数量是由数字定义的。这样一来，在模型中，数学运算描述同名称的“自然”运算。

回到我们的例子：“能量”和“质量”变成了数学中的数字，“自然”加法变成了普通的加法。“位置”和向量变成了三维数组[①]，分别称为坐标或分量。“质量”分别为 α 和 $1-\alpha$ 的两个位置 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$。[②] “重心”这一“自然”概念变成了

$$\{\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \alpha x_3 + (1-\alpha)x'_3\}。[③]$$

向量 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ 的“自然”“加法”运算变成了

$$\{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3\}。[④]$$

关于“自然”运算和数学运算的讨论同样适用于自然关系和数学关系。物理学中各种各样的“更大”的概

---

① 我们正在考虑三维欧几里得空间。——21，③

② 我们用它们的三个数字坐标来描述它们。——21，④

③ 通常记为 $\alpha\{x_1, x_2, x_3\} + (1-\alpha)\{x'_1, x'_2, x'_3\}$。见 16.2.1 中的(16:A:c)。——21，⑤

④ 通常记为 $\{x_1, x_2, x_3\} + \{x'_1, x'_2, x'_3\}$。见 16.2.1 的开头。——21，⑥

念——更大的能量、更大的力、更热和更高的速度等——就是很好的例子。

这些"自然"关系是建立数学模型并将其与物理领域联系起来的最好基础。①②

3.4.4 这里，我们必须再做一些说明。假设某一物 22
理领域的上述意义上的一个数学模型被发现了，而且其中的物理量已经与数字联系了起来。在这种情况下，(数学模型的)描述不一定非要通过惟一一种方式来使物理量与数字联系起来。也就是说，它可以指定一族这样的联系——其数学术语是映射，其中任何一个都可以被用于这一理论目的。从这类关系中的一个到另一个的过渡等于描述物理量的数字的一个变换。我们说，在这一理论中，问题中的物理量由适合这一变换系统的数字来描述。这类变换系统的数学名字是群。③

这类情况的例子很多。因此，距离这一几何概念是一个数，可以被(正的)因子乘。④ 物理学中的质量也是这

---

① 并不总是这样。温度是一个很好的反例。"更大"这一自然关系不足以建立今天的数学模型，即绝对温度计量。实际应用的是一个不同的方法。见3.2.1。——21，⑦

② 我们不想给人一个错误的印象，好像我们要在这里详细描述物理学理论的数学模型的建立。应该牢记的是，这一过程有着很多出人预料的发展阶段，十分多变。例如，一个重要的阶段是清理概念：即把表面看来是一个物理实体的东西分解为若干数学概念。因此，力和能的"分离"、热量和温度的分离在各自领域中都是关键性的。

很难预料，在经济学理论中，有待做出的这类区别有多少。——21，⑧

③ 在28.1.1中，我们会再论及群。我们还在那里指出了一些参考文献。——22，①

④ 也就是说，在欧几里得几何中不存在固定一单位距离的东西。——22，②

样。物理学中的能量是一个适合任意线性变换的数，即加上任意一个常数和被一个(①的)因子乘。[①] 位置这一概念按定义适合非齐次正交线性变换。[②③] 按定义，向量概念适合做同样类型的齐次变换。[④]

3.4.5 我们甚至能够设想，物理量是一个适合单调变换的数。当仅仅涉及“更大”这一自然关系时，情况就是这样。例如，关于温度，在只关注“温度更高”的概念时，情况就是这样[⑤]；这一点适用于测量矿物硬度的莫氏

23 硬度标；当这一概念建立在传统偏好概念之上时，它也适用于效用概念。在这些事例中，你也许会采取这样一种观点，即考虑到用数字描述的随意性，问题中的数量根本不是数字。然而，我们应该尽量避免这类定性陈述，而应该客观地说明数字描述由什么变换系统决定。变换系统全由单调变换组成的情况当然是极端情况，从这一极端到另一极端，存在着各种各样的变换系统：空间中非齐次或单

---

① 也就是说，不存在固定能量单位的东西。见上面的脚注②。距离有一个自然的零，即任何一个点到其自身的距离。——22，③

② 也就是说，$\{x_1,x_2,x_3\}$ 被替换为 $\{x_1^*,x_2^*,x_3^*\}$，而

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1,$$

$$x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2,$$

$$x_3^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3。$$

其中 a_{ij} 和 b_i 是常数，矩阵 (a_{ij}) 是正交矩阵。——22，④

③ 当关注的是位置时，几何中不存在固定原点参照系的东西，而且，当关注的是向量时，也不存在固定参照系的东西。——22，⑤

④ 即，脚注④中 $b_i=0$。有时，一个更广的矩阵概念是允许的，即行列式不等于零的矩阵。我们不必在这里讨论这些矩阵。——22，⑥

⑤ 但是，没有定量地可重复的检温学方法。——22，⑦

调正交线性变换、一个数字变量的线性变换、这一变量被一个常数乘。[①] 最后，数字描述绝对严格的情况也会发生，在这种情况下，任何变换都是不允许的。[②]

3.4.6 给定一个物理量，由数字描述的、适合它的变换可能会随时间变化，即随事物的发展阶段而变化。温度最初是一个数，只允许单调变换。[③] 随着检温学的发展，尤其是一致理想气体检温（concordant ideal gas thermometry）的发展，变换被限定为线性变换，即失去的只是绝对零和绝对单位。后来，热力学的发展甚至固定了绝对零，以至热力学中的这一变换仅仅是用一个常数乘。这类例子还有很多。不过，我们不打算过于深入地讨论这个题目。

关于效用，似乎存在着类似性质。你可以采取这样一种态度：在这一领域中存在着的“自然”数据只有“更大”，即偏好这一关系。在这种情况下，效用是适合做单调变换的数。事实上，在经济学文献中，这是一个已经被广为接受的观点，并且非常漂亮地用无差异曲线来描述。

要缩小这种变换系统，就必须在效用领域内找到其他“自然”运算或关系。因此，帕累托[④]曾指出，对于效用差来说，一个相等关系就足够了。用我们的术语来说，这会

---

① 你也能够想像出一些其他中间情况，比这些更大但不包括所有单调变换的变换系统。各种各样的相对论就是这类例子。——23，①

② 通俗地说，在这种情况中，我们能够为物理量定义一个绝对的零和一个绝对的单位。在光速起规范作用的物理理论中，如麦克斯韦电动力学和狭义相对论，绝对速度（不是向量！）就是一例。——23，②

③ 人们仅仅知道“更热”——即“更大”这一自然关系——这一概念。我们已经在前面广泛讨论过这个题目。——23，③

④ 帕累托：*Manuel d'Economie Politique*，巴黎，1907，第 264 页。——23，④

把变换系统缩小为线性变换。[①] 然而，由于这一关系似乎
24 不是一个真正的“自然”关系——即一个能够通过模拟观察来解释的关系——帕累托的建议达不到这一目的。

3.5 数字效用的公理化

3.5.1 一种具体方法的失败不一定意味着没有实现同一目标的其他方法。我们的意思是，效用的域含有一个“自然”关系，这一关系把变换系统限制到了其他方法已做到的同一程度。这就是我们在 3.3.2 中描述的分别有给定的概率 α 和 $1-\alpha(0<\alpha<1)$ 的两个效用的组合。这一过程十分类似于我们在 3.4.3 中提到的重心的建立，所以使用相同的术语也许是有益的。因此，关于 u 和 v，我们有 $u>v$ 这一“自然”关系（读作：u 优于 v），且有 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 这一自然运算（$0<\alpha<1$）（读作：u 和 v 的重心，u 和 v 的权重分别为 α 和 $1-\alpha$；或：u 和 v 的组合，u 和 v 的概率分别为 α 和 $1-\alpha$）。如果这些概念的存在和可模拟的可观察性得到承认，那么，我们的思路就清楚了：我们必须找出效用与数之间的一个对应，它把关于效用的关系 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 变成了关于数的同名概念。

这一对应为

$$u \rightarrow \rho=\mathrm{v}(u),$$

u 是效用，$\mathrm{v}(u)$ 是这一对应赋予它的一个数。我们要求：

---

① 这正是欧几里得对一条直线上的位置所做的事情。“偏好”的效用概念对应着那里的“位于右边”这一关系，而且，效用差的相等关系对应着几何上区间长度的相等。——23，⑤

(3:1:a)　　$u > v$　　意味着　　$\mathrm{v}(u) > \mathrm{v}(v)$,

(3:1:b)　　$\mathrm{v}[\alpha u + (1-\alpha)v] = \alpha\mathrm{v}(u) + (1-\alpha)\mathrm{v}(v)$。[①]

如果存在着如下两个对应:

(3:2:a)　　$u \rightarrow \rho = \mathrm{v}(u)$,

(3:2:b)　　$u \rightarrow \rho' = \mathrm{v}'(u)$。

那么,它们就在数之间建立了一个对应:

(3:3)　　$\rho \leftrightarrows \rho'$,

我们也可以写成

(3:4)　　$\rho' = \varphi(\rho)$。

由于(3:2:a)、(3:2:b)满足(3:1:a)、(3:1:b),对应(3:3),即(3:4)中的函数 $\varphi(\rho)$ 必定保留关系 $\rho > \sigma$[②],而运算 $\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ 未受影响(见第 24 页脚注①)。也就是说,

(3:5:a)　　$\rho > \sigma$ 意味着 $\varphi(\rho) > \varphi(\sigma)$,　　25

(3:5:b)　　$\varphi[\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma] = \alpha\varphi(\rho) + (1-\alpha)\varphi(\sigma)$。

因此,$\varphi(\rho)$ 必定是一个线性函数,即

(3:6)　　$\rho' = \varphi(\rho) \equiv \omega_0\rho + \omega_1$,

其中 ω_0、ω_1 是常数,$\omega_0 > 0$。

如此,我们看到:如果效用的这一数字赋值存在[③],那么,它适合线性变换。[④][⑤] 也就是说,效用是适合线性变换

① 注意,每个式子的左边是效用的"自然"概念,右边是关于数的普通概念。——24,①

② 将其运用于数 ρ、σ! ——24,②

③ 即满足(3:1:a)、(3:1:b)的对应(3:2:a)存在。——25,①

④ 即(3:6)的形式之一。——25,②

⑤ 请回忆 3.4.4 中给出的同样情形的物理学例子。(我们现在的讨论更为详细一些。)我们不是在固定一个绝对的零和一个绝对效用单位。——25,③

的数。

为了保证上述意义上的数字赋值是存在的，我们有必要假设效用关系 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 的一些性质。这些公理或公设的选择及其随后分析带来了一些有一定数学趣味的问题。接下来，我们将给读者一个大致的轮廓，详细讨论见附录。

3.5.2 公理的选择并不纯属有目的的工作。通常，我们期望达到某些特定目的——某个或某些定理能够从这些公理中推导出来，就此而言，这一问题是严格的和有目的的。但是，除此之外，总是存在着一些重要而本质上不那么严格的要求：公理不应该太多，它们的体系要尽可能简单和明确，而且每一个公理应该有一个符合直觉的含义，据此，其合理性直接得以判断。① 在我们现在面对的这种情况中，最后一个要求尤其重要：我们想把符合直觉的概念弄得容易进行数学处理，并尽可能弄明白需要什么假设。

在我们的问题中，目的是明确的：公设必须意味着对应（3:2:a）的存在，而这一对应有3.5.1描述的性质（3:1:a）和（3:1:b）。如上面指出的那样，更多的试探性分析和审美要求并不决定发现这一公理化处理的途

① 第一个和最后一个原则也许——至少在一定程度上——代表着反面影响：如果我们通过合并的办法尽可能减少公理的个数，我们有可能失去区别各种各样的直觉理由。因此，我们本来可以用更少个数的公理来表达3.6.1中的一组公理（3:B），但这样会使3.6.2中的分析令人费解。

要做到恰当的平衡是一个实践问题，一定程度上也是审美判断问题。——25，④

径是惟一的。后面我们将建立一组基本上令人满意的公理。

3.6 公理及其解释

3.6.1 这些公理是 26

我们考虑一个由 $u,v,w,\cdots$ 组成的系统 U。① 在 U 中，对任意 $\alpha(0<\alpha<1)$，给定关系 $u>v$，和运算

$$\alpha u+(1-\alpha)v=w。$$

这些概念满足如下公理：

(3:A)　　$u>v$ 是 U 的一个完备排序。②

这意味着：当 $v>u$ 时，我们写 $u<v$。那么，

(3:A:a)　　对任意的 u,v，下列三个关系中只有一个成立：

$$u=v,\quad u>v,\quad u<v。$$

(3:A:b)　　$u>v,v>w$ 意味着 $u>w$。③

(3:B)　　排序和组合。④

(3:B:a)　　$u<v$ 意味着 $u<\alpha u+(1-\alpha)v$，

(3:B:b)　　$u>v$ 意味着 $u>\alpha u+(1-\alpha)v$，

(3:B:c)　　$u<w<v$ 意味着满足下述条件的 α 存在：

$$\alpha u+(1-\alpha)v>w。$$

---

① 这当然指由我们的公理描述的（抽象的）效用系统。关于公理化方法的一般本质，见 10.1.1 中的说明和参考文献。——26，①

② 关于这一概念的更系统的讨论，见 65.3.1。偏好系统的完备性的等价概念在 3.3.2 和 3.4.6 已经考虑过。——26，②

③ (3:A:a)和(3:A:b)相当于 65.3.1 中的(65:A:a)和(65:A:b)——26，③

④ 请注意，这里 α、β 和 γ 总是 >0，<1。——26，④

(3:C)　　组合代数。

(3:C:a)　　$\alpha u+(1-\alpha)v=(1-\alpha)v+\alpha u$,

(3:C:b)　　$\alpha[\beta u+(1-\beta)v]+(1-\alpha)v=\gamma u+(1-\gamma)v$。

其中 $\gamma=\alpha\beta$。

我们能够证明,这些公理意味着一个对应的存在,而这一对应具有 3.5.1 中描述的性质(3:1:a)和(3:1:b)。因此,3.5.1 的结论是充分成立的:系统 U——即按我们目前的解释,(抽象)效用系统——是一个适合线性变换的数字系统。

按照(3:A)—(3:C)的意思,(3:2:a)、(3:1:a)和(3:1:b)的构建纯属一个有点繁琐的数学任务,符合传统做法
27 且没有特殊困难(见附录)。

同样,我们也没有必要在这里对这些公理进行常见的逻辑讨论。①

不过,接下来我们要简单说说公理(3:A)—(3:C)中每一个的直觉含义——即其合理性。

3.6.2 关于我们的公理的分析:

(3:A:a*)　　这是个人偏好系统完备性的表述。在讨论效用或偏好时,如"无差异曲线分析方法"中,通常都做出这一假设。这些问题已经在 3.3.4 和 3.4.6 中考虑过。

(3:A:b*)　　这是偏好的"可递性",一个明显合理且被

① 第 10 节将较为详细地讨论一个与此类似的情况,那些公理描述的是对于我们的目标来说更为重要的问题。其中 10.2 将进行逻辑讨论。10.3 中一些一般性的说明适用于当前这种情况。——27,①

广为接受的性质。

(3:B:a*)　这是说:如果 v 优于 u,那么,即便(作为 u 的备择的)v 出现的概率是 $1-\alpha$,v 仍然是优先的。这是合理的,因为任何类型的补(或对立)已经被排除,见 3.3.2 的开头。

(3:B:b*)　这是(3:B:a*)的对偶,用"不优于"取代"优于"。

(3:B:c*)　这是说:如果 w 优于 u,且一个更优先的 v 被给定,那么,u 与以小概率 $1-\alpha$ 出现的 v 的组合并不影响 w 对它的优越性。也就是说:无论对 v 本身的欲望多么强烈,一个人都可以通过赋予它一个充分小的概率而使这一欲望变弱。这是明显合理的"连续性"假设。

(3:B:d*)　这是(3:B:c*)的对偶,用"不优于"取代了"优于"。

(3:C:a*)　这是说,说 u、v 的一个组合与说 v、u 的一个组合是一回事,即在一个组合的命名中,其成分 u、v 如何排序无所谓。尤其这里 u、v 是互为备择的事件,这一点更具合理性。见(3:B:a*)。

(3:C:b*)　这是说,无所谓两个成分的一个组合是通过两个相继的步骤——首先,概率 α、$1-\alpha$,然后,概率 β、$1-\beta$——获得的,还是通过一个运算——概率 γ、$1-\gamma$、$\gamma=\alpha\beta$ ①——来获得的。这一说法同样适用于(3:C:a*)。然而,这一假

① 这当然是关于 u、v 的两次相继混合的正确算术运算。——27,②

设可能有更深刻的含义。我们将在3.7.1提到这一点。

3.7 关于公理的一般说明

28 **3.7.1** 至此，我们最好停下来重新思考这一情形。我们已经证明得太多了吗？我们已经能够从(3:A)—(3:C)导出效用的数字特征，它满足3.5.1中的(3:1:a)、(3:1:b)和(3:2:a)，而且，(3:1:b)指出，效用的数值像数学期望那样(与概率)结合！数学期望的概念常常受到怀疑，而且其合理性依赖于有关“期望”的本质的一些假设。① 我们未曾祈求于这一问题吗？我们的公理没有转弯抹角地引入导致数学期望的假设吗？

更具体一些说：参与“赌运气的行为”本身是否有(正的或负的)效用呢？而数学期望的运用消除了碰运气这类行为本身的效用。

我们的公理(3:A)—(3:C)是如何对付这种可能情况的呢？

我们能够看出，我们的公设(3:A)—(3:C)并不试图回避它。排除了“赌博的效用”(3:C:b)(见3.6.2中的论述)的情况看似合情合理，除非使用的是一个更为微妙的心理系统，而不是一个用于经济目的的心理系统。数字效用——数量公式等于数学期望的运用——能

---

① 见门格尔(Karl Menger)：Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre, *Zertschrift für Nationalökonomie*，第5卷(1934)，第495页和丁特纳(Gerhard Tintner)：“对非静态选择理论的一个贡献”，《经济学季刊》，第LVI卷(1942)，第274页。——28，①

够在(3:A)—(3:C)的基础上建立起来。这一事实似乎表明:实际上,我们把数字效用定义成了这样的东西,为了它,数学期望的计算是合理的。[①] 由于(3:A)—(3:C)保证必要的结构得到保留,在这个层面上,"打赌"的效用之类的概念无法不无矛盾地表达出来。[②]

3.7.2　正如我们在 3.6.1 中指出的那样,我们的公理的基础是效用关系 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$。值得注意的是,在人们看来,后者比前者更是直接给定的:如果一个人能够想像出可供选择的两种情况,其效用分别为 u 和 v,那么,他也就能够想像出两者分别以概率 α 和 $1-\alpha$ 出现。这几乎是毫无疑问的。相反,一个人却可能怀疑关于 $u>v$ 的公理(3:A:a),即这一排序的完备性。

让我们对这一点稍作思考。我们已经认识到,有可能受到怀疑的是,在分别具有效用 u 和 v 的两个选择机 29
会之中,一个人是否总能够决定他倾向于其中的哪一个。[③] 但是,无论这一疑问的价值是什么,我们都必须假设(个人)偏好系统的完备性。甚至,为了"无差异曲线方法"[见3.6.2中关于(3:A:a)的说明],我们也必须这么做。但是,如果我们假设了 $u>v$ 的这一性质[④],那么,

① 因此,贝努里(Daniel Bernoulli)的一个著名建议是,用"道德期望"(而不使用数学期望)来解决所谓"圣彼得堡(St. Pertersburg)悖论",意思是把效用数字地定义为一个人的货币财富的对数。——28,②

② 这似乎是一个自相矛盾的断言。但是,任何人要想把如此难以表述的概念公理化,都会同意这一说法。——28,③

③ 或者,他是否能够断定他对两者的渴望程度完全相同。——29,①

④ 即完备性公设(3:A:a)。——29,②

较少受到怀疑的 $\alpha u+(1-\alpha)v$①的应用也给出数字效用!②

如果不做出一般可比性假设③,基于 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 和 $u>v$,一个数学理论仍然是可能的。④ 这导致可以被描述为多维效用向量的概念。这是一个更为复杂和不能令人满意的结构。这里,我们不系统研究它。

3.7.3 这一简要说明没有涉及这个题目的所有方面,但是,我们希望我们已经说出了基本要点。为了避免误解,我们给出如下进一步的说明。

(1)我们重申,我们只考虑由一个人体会到的效用。这些考虑并不意味着任何与不同人的效用之间的可比性有关的事情。

(2)不可否认,对使用数学期望(见第 28 页脚注①)的这一方法的分析远非最终定论。我们在 3.7.1 中的说明中保持了这一方向,应该对这方面做更多讨论。其中涉

---

① 即公设(3:B)和(3:C)和(3:A:b)一起。——29,③

② 这里,读者会回想起这样一种观点,根据这一观点,效用的非数字("无差异曲线")描述优于任何数字效用,原因是它需要的假设更简单和更少。如果数字描述是建立在帕累托的效用差相等关系(见 3.4.6 末尾)之上的,那么,这一反对意见也许是合理的。这一关系的确是一个更强和更复杂的假设,这一假设是对效用的一般可比性(偏好的完备性)假设的补充。

不过,我们却使用了运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$,而且,我们希望读者与我们一样认为,它是一个比偏好的完备性假设更安全的假设。

因此,我们认为,我们的方法不同于帕累托,不需要人为的假设,又不失简捷。——29,④

③ 这等于把(3:A:a)弱化为(3:A:a′),其中用"至多一个"取代"一个且仅有一个"。条件(3:A:a′)、(3:A:b)对应着(65:B:a)、(65:B:b)。——29,⑤

④ 在这种情况下,公设(3:B)、(3:C)中的一些需要修改。——29,⑥

及到很多有意思的问题，不过，这些问题超出了本书的范围。对于我们的目的来说，只需看到的是，我们在 3.6.1 中给出的有关 $u > v$ 和运算 $\alpha u + (1 - \alpha)v$ 的简单而合理的公理(3:A)—(3:C)是成立的，这使得数字效用适合我们讨论过的线性变换。

3.8　边际效用概念的作用

3.8.1　上面的分析表明，我们可以自由地使用数字效用的概念。下面的讨论将要说明，我们无法回避这样一 30
个假设，即所有经济主体都有关于所处情况物理特征的完全信息，并能够进行所有可能的统计和数学运算。这一假设的实质和意义已经在经济学的文献中受到广泛关注，而且这一问题远未得到详尽阐述。我们不打算考虑它。由于这一问题过于庞大和困难，因此，最好的办法是“分解困难”。也就是说，我们希望避开这一复杂性，那些出于对这一复杂性本身的兴趣而进行的研究应该与我们目前的讨论分开。

我们确实认为，我们对这一问题的研究做出了贡献，虽然我们的研究中未做任何讨论地假设了“完全信息”。我们将会看到，许多经济和社会现象常常被归因于个人的“不完全信息”的状态。这些现象也将出现在我们的理论之中，并能够借助“不完全信息”得到令人满意的解释。由于假设了“完全信息”，我们据此得出的结论是，这些现象与个人“不完全信息”无关。有些特别令人注目的这类例子将出现在 33.1 中的歧视(discrimination)和 38.3 中不完全剥夺(incomplete expoitation)或 46.11 和 46.12 中的

贡金(tribute)等分析之中。

基于以上分析,我们甚至能够斗胆向传统的不完全信息在经济和社会理论中的作用进行挑战。[1] 有些现象看似不得不归因于这一因素,其实与其没有关系。[2]

3.8.2 现在,让我们考虑一个孤立的个人,他有一定的物质特征和一定数量的可支配物品。鉴于以上说明,他的问题是确定这一情况下能够获得的最大效用。由于最大值是一个明确界定的数量,当这个人拥有的物品存量增加一单位时,效用的增加也是一个数量。当然,这正是一单位商品的边际效用这一传统概念。[3]

在“鲁滨孙”经济中,这些数量显然有着决定性意义。
31 如果他表现出通常所说的理性行为准则,上述边际效用显然对应于他为了得到额外一单位那种商品而愿意做出的最大努力。

然而,社会交换经济中的一个参与者在决定其行为时,这些数量的意义并不清楚。我们看到,在这种情况下,理性行为准则仍有待阐述,而且它们肯定不能由“鲁滨

---

① 我们将会看到,我们考虑的博弈规则会明确规定,特定参与者不应该拥有某些特定的信息。见6.3和6.4。14.8和15.3.2中的(15:B)中提到了一些不出现这类事情的博弈,并称之为“完美信息”博弈。我们应该认识到并利用这类“不完全信息”。[根据上述说明,我们宁愿将其称为不完美信息(imperfect information)。]但是,我们拒绝用复杂因素和智慧等概念模糊地定义的其他概念。——30,①

② 我们的理论将这些现象归于多重“稳定行为标准”的可能性。见4.6和4.7。——30,②

③ 更严格地说是所谓“间接地依赖的预期效用”(indirectly dependent expected utility)。——30,③

孙"经济的最大值条件来描述。因此,我们无法确定边际效用是否在这种情况下还有意义。[①]

关于这个题目,只有等到我们成功地建立了社会交换经济的理性行为理论——即上面说到的"策略博弈理论"——之后,才有可能得到实证性的陈述。我们将会看到,在这种情况下,边际效用的确也发挥着重要作用,不过,其发挥作用的方式要比人们通常认为的更为微妙。

4. 理论结构:解和行为标准

4.1 对于一位参与者来说解的最简单概念

4.1.1 至此,我们可以明确我们建立理论的方案了,这当然指一个大致的轮廓、主要技术概念和工具。

正如我们在前面指出的那样,我们希望找到一个数学的完备准则来定义社会交换经济参与者的"理性行为",并从中推导出这类行为的一般特征。虽然这类准则应该充分具有一般性——即在任何情况下都成立,但是,如果能够找到解的话,我们可以暂时满足于它们仅仅在某些特殊情况下成立。

首先,关于什么能够作为这一问题的解,我们必须有一个清楚的概念。也就是说,我们必须弄清楚一个解必须

---

① 所有这些将在我们的几个简单假设的范围内得到理解。如果这些假设被放松了,那么,各种进一步的困难就会接踵而来。——31,①

传递多大的信息量。关于其形式结构，我们应该期待些什么。只有这些问题清楚了，严格分析才有可能。

4.1.2 对于每一位参与者来说，解的直接概念是一组规则，这些规则告诉他们在可以想像到的各种情况下如何采取行动。也许有反对意见说，这一观点未必包括所有情况。由于我们要把“理性行为”理论化，因此，关于个人行为，似乎没有必要建议他采取不理性的社会行为。这意味着，我们可以合理地假设其他人的行为也是理性的——无论我们如何描述它。这样一个过程会导致一系列具有惟一性的情况，我们的理论则仅仅属于这些情况。

32 这一反对意见似乎因为下面两点理由而站不住脚：

首先，“博弈规则”(rules of the game)——即决定经济活动实际背景的物质规律可能是统计规律。经济参与者的行动，必须结合按已知概率发生的事件，才能决定结果，见第10页脚注②和⑥。2.1考虑到这种情况，那么，即使是在一个完全理性的社会中，行为准则也不是惟一的，要考虑到各种可能的情况——其中有些远不是最优的。①

其次，更为基本的一点是，理性行为准则必须照顾到有可能出现的其他人的非理性行为。换句话说：可以想像这样一种情况，我们已经为参与者找出了一组可以称为最优或理性的行为准则，如果其他人一致同意的话，这些准则的确是最优的。问题是，如果有些参与者不同意，结果

① 尽管由机会决定的可能结果多种多样，一个具有惟一性的最优行为还是能够想像出来的。这自然归于“数学期望”这一概念的使用。——32，①

会如何呢？如果其他准则有利于不赞成上述解的人，而不利于赞成者，那么，上述解就很难成立。这里，我们并不是在对这些事情进行实证性讨论，我们只是想弄清楚，在这类情况下，这个“解”或至少其动机必须被认为是不完美的或不完全的。无论我们如何表述行为准则和“理性行为”的反对意见，我们都必须附带限制每一种可能的“他人”行为。只有这样，一种令人满意的、详细的理论才能建立。但是，从上述建立行为理论标准的意义上说，如果要确立“理性行为”较其他类型行为的优越地位，其描述必须包括所有情况下的行为准则，包括“他人”采取非理性行为的情况。

4.1.3　至此，读者将看到我们的概念与日常生活中的博弈概念非常相似，这一相似性是基本的。对于经济和社会问题来说，在物理学中成功运用的大量几何数学模型也将出现在博弈论之中。此类模型是理论模型，精确、详细而又不太复杂。另外，它们还必须在要研究的现象的一些基本方面接近现实。详细一点说：定义必须准确和详尽，以使数学研究成为可能。结构不能过于复杂，以使数学研究不仅仅是形式，从而能够得到完备的数字结果。为了使运算有意义，我们必须接近现实。而且，接近现实必须限于 33
一些基本方面，不然的话，上述要求就会相互冲突。[①]

显然，如果一个经济活动模型是根据这些准则建立起来的，那么，我们就有了对博弈的描述。在经济系统的核

① 例如，牛顿用少数几个“质点”来描述太阳系。这些质点相互吸引，并像星球那样运动。这是基本面上的相似，而行星的很多其他物质特征则被忽略了。——33，①

心——市场——的形式化描述中,这一点尤其重要。这一说法在任何情况下都是绝对正确的。

4.1.4 在 4.1.2 中,我们描述了我们希望一个解由什么组成——即"理性行为"特征的描述。这等于任何条件下能够想像出来的一组行为准则。对于社会经济和博弈来说,这一点是相同的。在这个意义上,全部结果是对具有巨大复杂性的组合的枚举。但是,我们已经接受了一个简化的效用概念,据此,个人追求的所有东西都可以由一个数字已知件(datum)来描述(见 2.1.1 和 3.3)。因此,一个复杂组合序列提供了一个很简要的和有意义的总结:如果参与者的行为是"理性的",那么,他能够获得多大的数额。①② 这里,"能够获得的数额"当然被假定为一个最小值;如果其他人犯错误(采取非理性行为),他有可能获得更多。

应该理解的一点是,所有这些讨论都是为沿着前面所指出的思路,建立一个令人满意的理论体系。我们要说明的是衡量我们后面的分析成功与否所需要的东西。即便我们现在还不能满足这些要求,将其先提出来也符合常有的探索过程。的确,要建立一个令人满意的理论,这些预备性推理是必不可少的。③

---

① 效用,对于一个企业家来说是利润,对于一个玩家来说是得或失。——33,②

② 如果存在着明显的机会成分,我们当然指"数学期望"。——33,③

③ 熟悉物理学发展的人自然明白,这样一种试探性思考是多么重要。没有对要建立的理论应该满足的要求的"前理论"讨论,相对论和量子力学都不可能被发现。——33,④

4.2 推广到所有参与者

4.2.1 至此，我们仅仅考虑了，对于一位参与者来说，解应该是什么。现在，让我们想像所有参与者同时出现的情况。也就是说，让我们考虑一个社会经济，或固定个数（如 n 个）参与者的博弈。正如我们在前面讨论过的那样，一个解应该传递的完备信息是组合性的，我们将通过指出每个参与者的理性行为使他获得多大数额来进一步说明一个定量陈述如何包含这部分关键信息。考虑若 34
干个参与者"获得"的数额，如果除了指定这些数额[①]之外，解没有给出更多定量意义上的东西，那么，它就与众所周知的分配概念相重合了：它只不过指出了总收益将如何在参与者之间进行分配。[②]

我们强调，无论收益之和是零还是可变的，分配问题都必须得到解决。就其一般形式来说，在经济学文献中，这一问题既没有得到恰当的描述，也没有得到解决。

4.2.2 我们没有理由满足于这样一个解，即便假设它能够被找到：即一个单一的分配，它满足最优行为的合理条件。（当然，我们还没有阐述这些条件。详尽讨论见

---

① 当然还包括如何实现它们的过程，这些过程指前面描述过的组合意义上的过程。——34，①

② 在博弈中，如通常理解的那样，总的结果总是等于零。也就是说，一个参与者的得必定是另一个参与者的失。因此，存在着一个纯粹分配问题，这里的分配绝对不存在总效用或"社会产品"的增加。在所有经济问题中，后一问题也会产生，但分配问题仍然存在。后面，我们将拓宽博弈的概念，具体做法是放弃总结果为零这一条件。——34，②

下面相应段落。)我们考虑的社会结构极为简单:存在着一个绝对的均衡状态,其中每一位参与者的数量份额被严格决定。

然而,我们将会看到,一个具备所有这些必要性质的解一般来说是不存在的。解的概念必须被大大推广。你将会看到,这也是与社会组织的固有特征密切联系着的,这些组织特征,从“常识”的角度看,是众所周知的,但一直未能从恰当的角度对其进行观察(见 4.6 和 4.8.1)。

4.2.3 对问题的数学分析将会表明,的确存在一类不太重要的博弈,其中,一个解是能够定义并找到的:即一个单一的分配。在这种情况下,每一位参与者通过恰当的、理性的行为至少可以获得属于他的数额。事实上,如果其他参与者也采取理性行为,他恰好获得这一数额;如果他们不采取理性行为,他有可能获得更多的份额。

这些是两个人之间的收益之和为零的博弈。虽然这些博弈并不是主要经济过程中的典型博弈,它们却包含着所有博弈的一般特征,而且从中得到的结果是一般博弈理论的基础。我们将在第 2 章详细论述之。

4.3 作为分配集的解

4.3.1 如果上述两个约束都被放弃,那么,情况会发生实质性变化。

35 超越第二个约束的最简单的博弈是一个二人博弈,其中收益之和是变动的。这对应着一个具有两个参与

者的社会经济，并允许两者相互依存，并且总效用随其行为的改变而改变。① 事实上，这正是双边垄断的情况（见61.2—61.6）。在试图解决分配问题的努力中发现的、众所周知的“不确定带”表明，我们必须找到一个更宽泛的解的概念。这种情况将在上面提到过的段落中讨论。这里，我们仅将其用作困难程度指数，并借此过渡到其他情况，而这些情况更适合作为我们分析的起点。

4.3.2 放弃第一个约束的最简单博弈是一个三人博弈，其中收益之和等于零。与上述二人博弈相比，三人博弈不对应于任何基本经济问题。但是，不管怎样，它代表着人类关系中的一种可能性。其基本特征是，任何两位参与者联合起来对付第三位参与者，总能够占据优势。问题是，取得的优势如何在联合起来的两个人之间分配。任何这类分配方案都必须考虑到，其中任何两个人都可以联合。也就是说，在一个联盟的形成过程中，每位参与者都必须考虑这样一个事实，即他的盟友可能会背叛他，转而与另外一个人联合。

当然，博弈规则将规定一个联盟的收益如何在参与者之间分配。但是，22.1 中的详细讨论表明，这并不是最终判决。想像一个（三人或多人）博弈，其中两个参与者能够形成一个十分有利的联盟，同时，博弈规则还假设收益的较大部分归第一个参与者。另外，假设这一联盟的第二个参与者也能够与第三个参与者结盟。与前

---

① 你会回想起，我们使用的是可转移的效用，见2.1.1。——35，①

者相比，这个联盟从总体上说不那么有效，却能给他带来更大收益。在这种情况下，第一个人的一个合理做法是，把得自第一个联盟的收益的一部分转移给第二个人以拯救其联盟。换句话说，我们必须考虑到，在一定的联盟中，一个参与者愿意给予其盟友补偿。因此，一个联盟内部的收益分配不仅依赖于博弈规则，在有其他结盟机会的情况下，还依赖于上述准则。[①] 常识告诉我们，我们不能指望理论告诉我们哪一个联盟将会形成[②]，但理论能够告诉我们，在一个可能的联盟中，参与者将如何
36 分配得自联盟的好处，以避免其中的一个叛变并与另外一个参与者结成联盟。所有这些将在第5章中得到详细论述。

这里，我们只须指出上述定性分析明显合理的结果。这些结果将在上面提到过的段落中严格建立起来。在这种情况下，解的概念是由三个分配组成的一个系统。它们分别对应于上面提到的三种组合或联盟，并表达从联盟中得到的利益如何在盟友之间进行分配。

4.3.3 上述最后一个结果是一般情况的原型。我们将会看到，我们将在求解过程中得到一个具有一致性的理论，这些解不是单一分配，而是分配的系。

显然，在上述三人博弈中，解中任何单一分配本身都

---

① 这并不是说，博弈规则被破坏了，因为此类补偿性支付是理性思考下的自由行为。——35，②

② 显然，三个两人组合中的每一个都是可能的。在第21节给出的例子中，解内部对任何具体联盟的偏好都被对称性排除了。也就是说，对于三个参与者来说，该博弈是对称的。见33.1.1。——35，③

不像一个解。任何一个具体的联盟仅仅描述的是参与者计划其行动时的具体考虑。即便某一联盟最终形成了，收益在盟友之间的分配也将严重受到其他联盟的影响，这些联盟是每一个人都有的选择机会。因此，只有三种联盟及其分配合在一起才能形成一个合理的整体，决定其细节，并产生自身稳定性。事实上，这个整体才是真正有意义的，超出了组成它的单个分配。即使其中之一在实际中得到运用，即如果某一联盟实际形成了，其他联盟也"事实上"存在着(virtual existence)：虽然它们没有取得物质的存在形式，但它们已经对现实存在的形成起到了根本作用。

在思考这个一般性的问题时，在考虑一个社会经济或等价地说一个有 n 个参与者的博弈时，我们将乐观地期望着同样的事情：一个解应该是一个分配系[①]，有某种整体上的平衡性和稳定性，其本质有待我们研究。我们强调，这里所说的稳定性，无论其具体表现形式是什么，将是整个系统的一个性质，而不是作为其一个组成部分的单个分配的一个性质。关于三人博弈的这些简要分析暂且到此为止。

4.3.4 我们的问题的解是一个分配系。描述一个分配系的严格准则当然是一个具有数学本质的准则。为了进行精确和详尽的讨论，我们必须提请读者随后研读这一理论的数学发展。其本身的严格定义将在 30.1.1 中给 37

① 如 4.3.2 中描述的那样，其中也有一个联盟之内参与者之间的补偿。——36，①

出。这里,我们只给出一个初步的和定性的描述。我们希望,这将有助于理解作为定量分析基础的那些概念。另外,我们的分析在社会理论一般框架中的地位也将变得更加清晰。

4.4 不可递的"优越"或"占优"概念

4.4.1 让我们回到一个较为初步的解的概念,这是我们已知必须放弃的一个概念,即一个解是一个单一的分配。如果这类解存在,那么,它必须是一个分配,从某种意义上说,它优于所有其他分配。在解释分配之间的优越性时,我们必须考虑周围物质环境和社会结构。也就是说,我们应该以如下方式定义分配 x 优于(superior to)分配 y:假设社会,即所有参与者,必须考虑是否接受由分配 y 决定的所有分配问题的一个静态解决,与此同时,由分配 x 决定的解决作为备用选择也得到考虑,那么,x 足以排除 y 被接受的可能性。这就是说,有足够多的参与者出于自身利益而认为 x 优于 y,而且相信或能够使之相信他们能够从 x 获得利益。在 x 与 y 的这一比较中,参与者不应受任何第三种选择(分配)的影响。也就是说,我们认为优越关系是一个基本关系,它仅仅是分配 x 与分配 y 之间的关系。三个、多个或全部分配之间的比较是接下来必须考虑的理论问题,是耸立于优越这一基本概念之上的上层结构。

在上述定义中,是否能够使有利益的各方相信他们能够从选择 x 而放弃 y 中受益,取决于有关情况的物质事实——用博弈论的术语说,取决于博弈规则。

我们倾向于使用一个更专门的术语，而不使用“优越”(superior)这一具有多重意思的术语。当 x 与 y 之间的上述关系成立时①，那么，我们说，x 占优(dominate)y。②

如果我们认真地重新表述单一分配组成的解应该告诉我们些什么，那么，这一表述是：这一分配应该优于所有其他分配，而不被任何其他分配占优。

4.4.2 显然，上面描述的——或指出了的——占优概念从本质上说是一个排序，类似于偏好或任何定量分析 38
理论中的大小问题。一个单一分配解③的概念对应着排序中的第一元素的概念。④

如果问题中的排序，即我们的占优概念，具有可递性这一重要性质，即如果 x 优于 y 且 y 优于 z，那么，x 优于 z，寻找这样一个元素是显然的事情。在这种情况下，我们可以这么做：从任意一个 x 开始，然后，寻找一个 y，y 优于 x；如果这样的 y 存在，那么，选定其中一个，并接着寻找一个 z，z 优于 y；如果这样的 z 存在，那么，选定其中一个，并接着寻找一个 u，u 优于 z，如此等等。在大多数实际问题中，很有可能，这一过程只进行有限步，以某个 w 结束，w 不再被其他任何东西占优；也有可能，存在着一个无穷序列 x，

---

① 也就是说，当它在严格数学意义上成立时，见 30.1.1。——37，①

② 为了顺口，我还是将这一关系译为 x 优于 y。——译者注

③ 尽管我们已经说明了它是一个希望渺茫的方案，我们仍继续将其作为一个例子来讨论。这样做的理由是，首先说明在某些复杂因素不出现的情况下涉及到哪些东西，从而我们能够更好地研究这些复杂因素。当然，在这一阶段，我们真正感兴趣的是这些相当基本的复杂因素。——38，①

④ 排序的数学理论十分简单，而且比任何纯粹口头说明更有助于我们深刻理解这些条件。必要的数学分析见 65.3。——38，②

$y,z,u,...$但这些$x,y,z,u,...$趋向于一个极限w,而w不被其他任何东西占优。而且,鉴于上述可递性,最终的w优于所有先前得到的$x,y,z,u,...$。

我们不想深入更具体的细节。这些细节能够且应该得到详尽讨论。对于读者来说,即将清楚的一点是,这一过程,通过序列$x,y,z,u,...$对应着到达“最优”这一顶点的不断“进步”,这里,最优就是优于所有其他元素且不被占优的“第一”元素。

当可递性不成立时,所有这些会变得十分不同。在这种情况下,通过不断进步来达到“最优”的一切努力都是徒劳的。有可能发生这样的事情,即y优于x,z优于y,但x优于z。[①]

4.4.3 我们所依据的占优这一概念的确不具有可递性。在我们关于这一概念的试探性描述中,我们已经指出,x优于y指:存在一群参与者,其中每一个人都认为他自己在x下的处境优于在y下的处境,而且他们相信他们能够作为一个群体——即联盟——强制实现他们的偏好。我们将在30.2中对此进行详细讨论。这一群参与者将被称为x优于y这一关系的“有效集”(effective set)。当x优于y且y优于z时,这两个占优关系的有效集有可能是分离的,从而无法就z和x之间的关系下结论。甚至有可能发生的情况是,存在一个与前两个有效集分离的第三个

---

① 在具有可递性的情况下,这是不可能的。因为x永远也不会优于它自身。事实上,如果y优于x,z优于y,且x优于z,那么,根据可递性,x优于x。——38,③

有效集，借助这个有效集，z 优于 x。

尤其在上述正式描述中，缺乏可递性有可能成为一个令人烦恼的复杂因素，而且我们甚至希望尽量回避与其有关的理论。然而，读者再浏览一下上面的论述就会注意到，它实际上只是包括在所有社会组织中的最典型现象的一个拐弯抹角的说法。各种分配，$x, y, z, \ldots$——即不同社会状态之间的占优关系，对应着这些关系能够相互造成的不稳定——即一个推翻另一个——的各种方式。各种各样的参与者群体，在各个这类关系中发挥着有效集的作用，有可能导致“循环的”占优，即 y 优于 x，z 优于 y，而 x 优于 z。这是有关这些现象的理论所必须面对的一个典型困难。 39

4.5　解的精确定义

4.5.1　接下来，我们的任务是把“最优”——即第一元素——的概念转换成一个在静态均衡状态中具有同样功能的概念。这样做的必要性在于，原先的概念已经站不住脚了。在4.3.2—4.3.3三人博弈的具体例子中，我们第一次看到了它的漏洞。现在，关于其缺陷产生的根源，我们有了更深刻的理解：它是我们的占优概念所固有的，具体说，它不具有可递性。

对于我们的问题来说，这类关系不足为奇。在很多领域中，这样的例子比比皆是。令人遗憾的是，它们还从未得到过真正的数学处理。我们说的是这样一些概念，本质上它们是偏好的比较、“优先”或排序一类概念，但却不具有可递性，如棋类锦标赛中选手的强弱，运动会中的“成绩

表”等。[①]

4.5.2 4.3.2—4.3.3 中关于三人博弈的讨论说明，一般来说，解是一个分配集，而不是一个单一的分配。也就是说，“第一元素”的概念必须由一组具有适当性质的元素（分配）来取代。4.3.2—4.3.3 中，作为三人博弈的解，我们引入了由三个分配组成的系。在第 32 节关于这一博弈的详尽讨论中（也可参见 33.1.1 中的解释，需要注意某些不同之处），这个系将借助 30.1.1 的假设被严格推导出来。这些假设十分类似于描述第一元素的那些假设。它们当然是一个元素（分配）集的必要条件，但如果这个集合是由惟一一个元素组成的，那么，我们的假设转向（整个分配系中）第一元素的特征。

我们还没有给出提供这些假设的详细动机，不过，我们接下来就要对其进行形式化描述，希望读者能够看出它们的表面合理性。定性分析方面的某些理由或一种可能
40 的解释将在接下来的段落中给出。

4.5.3 这些假设是：元素（分配）集合 S 是一个解，如果它具有如下性质：

(4:A:a) S 中的一个 x 不会被 S 中的 y 占优。

(4:A:b) 每个不属于 S 的 y 都被 S 中的某个 x 占优。

(4:A:a)和(4:A:b)也能够被表述为一个条件：

(4:A:c) S 中的元素恰好是这样一些元素，它们不被

---

① 某些这类问题已经通过引入机率和概率而得到了数学处理。不可否认，这一方法有一定的合理性，不过，我们怀疑，即使是在这些领域中，这是否有益于完全理解。对于我们关于社会组织的思考来说，这是很不够的。——39，①

S 中的元素占优。①

对此类练习有兴趣的读者现在就可以证明我们在前面的断言：对于一个包括惟一一个元素 x 的集合 S 来说，上述条件恰好说明 x 是第一元素。

4.5.4 乍一看，上述假设可能引起的部分担忧很有可能归因于其循环特征。在(4:A:c)中，这一点尤其明显，其中 S 的元素是由一个关系描述的，而这一关系又依赖于 S。重要的是，不要误解这种情况的含义。

由于我们的定义(4:A:a)和(4:A:b)，或(4:A:c)对于 S 来说是循环的，一个满足这些定义的 S 是否真的存在并不清楚；同样不清楚的是，如果存在的话，它是否具有惟一性。事实上，这些有待回答的问题是后面理论的主题。然而，有一点是清楚的，即这些定义毫不含糊地告诉我们一个给定的 S 是否是一个解。如果坚持要求定义的东西的存在性和惟一性，那么，可以说：我们并没有给 S 下一个定义，只不过定义了 S 的一个性质——我们还没有定义解，只是描述了所有可能的解。所有解的总体是否包含 S？包含一个 S 还是若干个 S？这些都是有待进一步研究的问题。②

4.6 解的"行为标准"解释

4.6.1 "单一分配"(single imputation)是经济理论中

---

① 因此，(4:A:c)是(4:A:a)和(4:A:b)合在一起的等价说法。虽然这实际上是一个简单想法的直接表达，没有经过数学训练的读者也许觉得涉及到了别的什么东西。——40,①

② 我们未必能说，(4:A:a)和(4:A:b)，或(4:A:c)的循环性不很清晰，并不意味着它们是套套逻辑。它们当然表达了对 S 的严格限制。——40,②

经常使用，并且为人们理解得较好的一个概念，但是，我们引入的分配集却是比较陌生的。因此，我们希望将其与我们在对社会现象的思考中已经很好地建立起来的概念联系起来。

41 事实上，我们正在考虑的分配集 S 似乎对应着有关社会组织的"行为标准"，接下来，让我们对此进行更仔细的研究。

假设一个社会经济的物质基础是给定的，或采取一种更宽泛的假设，一个社会的物质基础是给定的。[①] 根据各种传统和经验，人类以特定的方式调整自身以适应这一背景。不过，这并不等于一个严格的分配体系，而存在大量选择机会，它们很有可能都表达着某些一般原理，但它们在很多具体方面又有所不同。[②] 这一分配系统描述了"已经建立起来的社会秩序"或"公认的行为标准"。

显然，分配的任何随机归类都不能作为此类"行为标准"，它必须满足一定的条件，而这些条件将其描述为事物的一种可能顺序。这一可能的概念必须明确保证稳定性条件。读者将会看到，我们在上面描述的方法就充分体现了这种精神：分配 $x,y,z,...$ 构成的集合 S 对应着我们现在所谓的"行为标准"，描述解 S 的条件(4:A:a)和(4:A:b)，或

① 在博弈中，正如我们在前面指出过的那样，这简单指博弈规则是给定的。不过，为明确起见，与社会经济的比较更为有用。因此，我们建议读者暂时忘却与博弈的相似性，完全从社会组织意义上进行思考。——41，①

② 也许存在着极端情况，用数学的语言来说是"退化"的特殊情况，其中结构是如此出奇的简单，以至一个严格的单一分配能够被投入运行。不过，把它们视为非典型情况而加以忽略似乎是合理的。——41，②

(4:A:c)则表达了上述意义上的稳定性。

4.6.2　在这种情况下,把(4:A:a)与(4:A:b)分离开尤其合理。不要忘记,x 优于 y 意味着,如果把分配 x 考虑进去,分配 y 被接受的可能性就被排除了。(这并不预示最终被接受的分配是什么。见 4.4.1 和 4.4.2。)因此,(4:A:a)表达了这样一个事实,即行为标准不会发生内部矛盾:属于 S 的分配 y,即符合“公认的行为标准”的 y 不可能被推翻,即不可能被另一个同类的分配 x 占优。另一方面,(4:A:b)表达了“行为标准”能够被用于使不符合“公认的行为标准”的程序不可信:不属于 S 的每一个分配 y 都能够被一个属于 S 的分配 x 推翻——即被占优。

要看到,在 4.5.3 中,我们并没有假设一个属于 S 的 y 永远不会被一个 x 占优。[1] 当然,如果这样的事情发生了,那么,根据(4:A:a),x 就不得不在 S 之外。用社会组织学的术语来说:一个符合“公认的行为准则”的分配 y 有可能被另一个分配 x 推翻,但在这种情况下,x 肯定不符合
“公认的行为准则”。[2] 根据我们在前面提出的条件,x 反 42
过来被第三个分配 z 占优,而 z 符合“公认的行为准则”。由于 y 和 z 都符合“公认的行为准则”,z 不能推翻 y,这进一步证明了“占优”的缺乏可递性。

因此,我们的解对应着具有内部稳定性的“行为标

---

① 我们能够证明,这样一个假设一般来说是无法得到满足的,即在所有真正有意义的情况中,不可能找到一个 S 满足这一假设和我们的其他条件。见 31.2.3 中的(31:M)。——41,③

② 暂时地,我们用“符合”(“公认的行为准则”)一词作为属于解 S 的同义语,用“推翻”作为占优的同义语。——42,①

准”：一旦它们被普遍接受，它们将否决所有其他事情，而且其中的任何一部分也都无法在公认的行为标准范围之内被否决。显然，现实社会组织中的事情就是这样的，而且它强调了 4.5.3 中条件的完全合理性。

4.6.3 我们在前面提到而未加讨论的一个主要反对意见是：4.5.3 中的条件（4：A：a）且（4：A：b），或（4：A：c）意义上的一个解 S 的存在性和惟一性都是没有证据的。

关于解的存在性，当然不存在让步的余地。如果在任何具体情况中，我们关于一个解 S 的条件无法得到满足，那么，这必定意味着理论需要做根本性的修正。因此，对于所有具体情况来说[1]，解 S 的存在性的一般证明是必不可少的。我们后面的研究将会表明，这一证明尚未完成，不过，在至今已经考虑过的各种情况中，答案已经有了。

关于惟一性，情况则完全不同。通常所说的条件“循环性”很有可能意味着解一般不具有惟一性。的确，在大多数情况下，我们将看到解的多重性。[2] 我们曾经把解解释为稳定的“行为标准”。这里存在一个简单而不无道理的含义，也就是说，给定同样的物质背景，“已经建立起来的不同社会秩序”或“公认的不同行为标准”能够被建立起来，它们都具有上述内部稳定性。由于稳定性的这一概念被认为是“内在”的本质——即只有在行为标准被广为接受的条件下它才发挥作用，这些不同的标准有可能是相

---

① 用博弈论的术语说是：对于所有个数的参与者和各种可能的博弈规则。——42，②

② 一个有意思的例外是 65.8。——42，③

互冲突的。

4.6.4　我们的方法应该与我们广为持有的如下观点进行比较:一种社会理论要成为可能,其基础只能是某种事先达成的社会目标原则。这些原则应包括总体上要达到的目标和个人之间分配的定量陈述。一旦它们被接受,剩下的问题只是一个简单的最大值问题。

请注意,令人满意的此类原则陈述目前还没有。常见 43
的原则是,解的内在稳定性,或者解的取值是人们所渴望的等含含糊糊的理由。

关于后一种动机,没有多少可说的。我们的问题,不是在必然具有随意性的先验原则的集合之中确定应该发生什么,而是要研究力的均衡点在什么地方。

关于第一个动机,我们的目标是赋予那些观点一个精确和令人满意的形式,整体目标和个人份额同时受到关注。这使得我们有必要把整个内在稳定性问题当作一个问题来对待。在这一点上,一个具有一致性的理论不可能不考虑到经济利益、影响力和权力之间的相互作用。

4.7　博弈和社会组织

4.7　现在也许是把社会组织与博弈进行比较的恰当时机,这是我们在前面的段落中有意忽略的一个问题(见第41页脚注①)。4.5.3意义上的解 S 与稳定"行为标准"之间的相似性在两个方向上都能够被用作有关这些概念的断言的进一步证据。至少,我们希望这一建议能够对读者有一定的吸引力。我们认为,策略博弈的数学理论方法肯定会受益于其概念与社会组织概念之间的对应关

系。另一方面，我们关于社会组织的每一个陈述几乎都与某些现存观点相抵触。而且，就事情的本质来说，大多数观点在社会理论范围之内至今无法得到证明或证伪。不过，我们的很多断言能够在策略博弈理论中的具体例子里得到证实，这对于我们来说很有帮助。

事实上，在物理学中，模型的使用是标准技术之一。这一双向过程使得模型非常有用。这一点是 4.1.3 中讨论它们时所没有强调的。

举例来说，基于相同的物质背景，有无可能出现多个稳定的“社会秩序”或“行为标准”？这仍然是一个很有争议的问题。用常规方法来解决这一问题希望不大，因为这一问题过于复杂，当然还有其他理由。但是，我们将给出三人或四人博弈的具体例子，其中一个博弈会有若干 4.5.3意义上的解。而且，有些例子将被视为特定简单经济问题的模型(见 62)。

4.8 总结

4.8.1 最后，让我们做几点正式的总结性说明。

44 我们从如下观察开始：我们的分析从单一分配开始，它们最初是从规则的较为详尽的组合集中定量提取。由此出发，我们分析了分配集 S，在一定条件下，集合 S 看似是解。由于解未必具有惟一性，一个具体问题的完全解决不是要找出一个解，而是要决定所有解的集合。因此，在任何具体问题中，我们要寻找的东西其实是分配集的一个集合。这也许有点不自然地复杂化了。另外，无法保证这一过程是否会因为后面的困难而变得必须继续下去。关

于这些疑问，我们只须说：第一，策略博弈理论的数学结构为我们的方法提供了形式上的合理性；第二，前面讨论的（对应着分配集合的）“行为标准”和同样物质背景下“行为标准”的多样性（对应着分配集合的集合），使得问题呈现出如此程度的复杂性。

有人可能指责我们把分配集合解释为“行为标准”。在 4.1.2 和 4.1.4 中，我们引入了一个更为基础的概念，作为一种“行为标准”的一种直接表述，这也许很使读者吃惊：这就是我们当初解的组合概念，对于每一个参与者来说，一个解是一个规则集合，告诉他在每一种可能的博弈情况下应该如何采取行动。（从这些规则出发，单一分配被提取为一个定量总结，见前面的分析。）然而，关于“行为标准”的这一简单观点仅仅在如下博弈中是站得住脚的，即联盟和联盟成员之间的补偿（见 4.3.2）不起作用。这是因为，上述规则没有考虑到这些可能性。联盟和补偿能够被忽略的博弈是存在的，如 4.2.3 中提到的二人零合博弈，以及更一般的，27.3 和 31.2.3 的（31:P）中讨论的“非本质”博弈。但是，在所有有意义的社会交换经济问题中，一般性典型博弈的研究不能没有这些工具。因此，同样的理由迫使我们在分析非单一分配的分配集合时，必须放弃“行为标准”这一狭隘概念。实际上，我们将把这些规则集合称为博弈的“策略”。

4.8.2　接下来，我们谈谈理论的静态本质和动态本质。再次强调，我们的理论完全是静态的。毫无疑问，一个动态理论会更复杂，从而更为可取。但是，其他科学分支中的大量证据表明，当静态方面尚未得到充分理解时，

试图建立动态理论是徒劳的。另一方面，读者可能反对我们在讨论中给出的某些动态观点。这一点尤其适用于关
45 于“占优”关系影响下各种分配的相互作用。我们认为，这是完全合理的。一个静态理论研究的是均衡。① 一个均衡状态的基本特征是，它没有改变的趋势，即它不会助长动态发展。当然，不使用一些基本性的动态概念，这类分析是难以进行的。换句话说，真正的动态分析研究的是远离均衡的精确移动，需要深入讨论这些动态现象。②③

4.8.3 最后，我们还要说明的一点是，关于社会现象的理论完全不同于现有数学物理学的模式。当然，这是对充满不确定性和模糊性的一个学科的猜测。

我们的静态理论具体指均衡状态——即4.5.3意义上的解，是分配集。从较简单意义上说，动态理论一般描述的是在当前时刻成立的一个“单一分配”的变化之类的事情。这表明，这部分理论的形式结构——静态与动态之间的关系——也许与经典物理学理论有着根本的不同。④

所有这些分析再次说明，在社会理论中，我们必定会遇到十分复杂的理论形式。区区静态分析就需要创立一

---

① 动态理论研究的是非均衡——尽管它们有时被称为动态均衡。——45，①

② 上面关于静态和动态的讨论只是顺便提一下。熟悉力学的读者会认识到，这是人们熟知的经典静力学和动力学的特点的重述。这里，我们指，这是涉及力和变化的科学过程的一个一般特征。——45，②

③ 静态均衡分析中的动态概念类似于经典力学中的“虚位移”。这里，读者也许会记起4.3.3中提到关于“实际起作用的存在”的说明。——45，③

④ 尤其不同于经典力学。上述脚注②中适用的类比在这里不成立。——45，④

套概念和形式体系，它们完全不同于数学物理学等使用过的东西。一个解是一个确定的数或数的综合这一传统观点，尽管在其他领域中取得了成功，对于我们的研究目的来说，却显得过于狭隘。对数学方法的强调将更多地转向组合数学和集合论，而且也背离了主导数学物理学的微分方程。

第2章　策略博弈的一般形式

5. 概　　论

5.1　从经济学到博弈的重点转移

46　**5.1**　第1章的讨论告诉我们，一种理性行为理论，即经济学的基础理论和主要社会机制的理论，要求对“策略博弈”进行详细研究。因此，从现在开始，我们必须把博弈论当作一门独立的学科来对待。在把博弈本身作为一个问题研究时，我们就必须对看问题的角度进行大的调整。在第1章里，我们的主要兴趣在于经济学。只是在我们已经确信，没有对博弈的基本理解，就不可能在经济学领域中取得进步之后，我们才开始探索作为这一学科的一部分的公式化描述。毕竟，第1章的主要内容是经济学的。然而，从第2章开始，我们将对博弈进行一般性的研究。因此，我们将不在乎我们的观点是否具有经济学意义，不然的话，对这一学科就显得不公正了。当然，大多数概念仍然是我们在经济学文献中已经熟悉了的（见下一节），不过，具体细节将常常与经济学相去甚远，而且细节常常会

主导我们的阐述并湮没我们的指导原则。

5.2　一般分类原则和程序

5.2.1　在第 1 章最后一节中，我们曾着重介绍过的“策略博弈”的某些方面，它们将不再出现在接下来的讨论的开始阶段。尤其是，我们将不再提及玩家之间的联盟以及他们之间的相互补偿。（关于这些概念，见第 1 章 4.3.2和 4.3.3。）我们将简明扼要地说明其理由，这将有助于我们全面理解这门学科的展开。

一个重要的博弈分类准则是：全体玩家（在博弈结束时）的总收益之和是否等于零。如果和等于零，那么，我们能够说，只存在玩家之间的相互支付，不存在物的生产或破坏。实际当中，所有的娱乐性博弈都属于这一类。不过，有经济意义的计划基本上都不属于这一类。在经济活动中，全部收益之和，即社会总产品，一般来说不等于零， 47
甚至不是一个常数。也就是说，收益总和取决于玩家——即社会经济参与者——的行为。我们在 4.2.1，尤其是第 34 页脚注②中，已经提到这一区别。我们称前一类博弈为零合博弈，称后一类博弈为非零和博弈。

我们将首先建立一个零和博弈理论，不过，你会发现，我们有可能借助零和博弈来分解无任何约束的一般博弈。严格地说：我们将证明，一般 n 人（可变和）博弈能够被简化为一个 $n+1$ 人零和博弈（见 56.2.2）。这样，n 人零和博弈理论将以二人零和博弈这一特殊情况为基础。（见 25.2。）因此，我们将从二人零和博弈理论出发。这一理论将在第 3 章中建立起来。

在二人零和博弈中，不存在玩家联盟和补偿。[1] 在这些博弈中，一些最基本的问题有着不同的本质。这些主要问题是：每一位玩家如何计划他的行动？即一个人如何建立一个严格的策略概念？在博弈的每一阶段，每位玩家能够获得什么样的信息？如果一位玩家被告知其他玩家的策略，这会有什么作用？如果一位玩家被告知这一博弈的整个理论，这又会有什么作用？

5.2.2 当然，在所有博弈中，即使联盟和补偿已经进入这些博弈，对于所有玩家来说，这些问题也都是基本的问题。但是，正如我们将在随后的讨论中证明的那样，对于二人零和博弈来说，惟有这些问题是重要的。这些问题也是经济学中已经有所认识的问题。不过，我们认为，在博弈论中，它们显得更为基本，并有别于那些综合性的问题，从而，我们能够对其进行严格的讨论。而且，正如我们希望的那样，我们能够将其彻底解决。在分析过程中，使用一些离经济学较远，严格地说属于人们经常玩的游戏作为例子并给出图示，会有很多技术上的便利之处。因此，我们的主要例子是国际象棋、“硬币配对”、扑克、桥牌等，而不是卡特尔、市场、寡头等市场结构。

顺便提醒一下，我们假设博弈结束时的交易总是纯货币交易。也就是说，我们假设每位玩家的惟一动机是货币

① 这一说法一个完全令人满意的“证明”是，一个完美的二人零和博弈理论的建立中不涉及玩家联盟和补偿。这将在第 3 章中完成。关键结果包括在第 17 节之中。然而，我们应该清楚，按照常识，在这里，“理智”和“联盟”能够不起作用：任何此类项目必定至少涉及两个玩家，他们也是二人博弈情况下的全部玩家。对于他们来说，收益之和等于零。也就是说，不存在余下的对手和其他可能的目标。——47，①

利润。我们已经在第 1 章的 2.1.1 中分析了这一假设效用概念上的含义。这是绝对必要的简化，尤其为了首先讨论“二人零和博弈”（见 5.2.1 中的讨论）。事实上，在这一理论的大多数地方，我们将坚持这一假设。与此不同的情况将被放在最后研究。（见第 12 章，尤其是第 66 节。） 48

5.2.3　现在，我们的首要任务是严格界定一个博弈由什么组成。在一个博弈的概念尚未用绝对精确的组合数学来描述的时候，我们不可能严格而详尽地回答 5.2.1 末提出的那些问题。如 5.2.1 所描述的那样，虽然我们目前的首要目标是二人零和博弈理论，但关于博弈由什么组成的严格描述不必局限于这种情况。因此，我们能够从一般 n 人博弈的描述开始。在给出这一描述时，我们将尽力考虑到博弈中可能出现的各种因素并一视同仁，除非它们明显具有无关紧要的特征。以这种方式，经过若干步骤，我们将得到一个相当复杂、详尽和具有数学精确性的体系。然后，你将看到，我们有可能用一个大为简单的系统来取代这个一般体系，而且它们之间是严格等价的。另外，对于我们的问题来说，使得这一简化成为可能的数学工具还有着直接的意义，这个工具正是一个严格的策略概念。

不难理解，为了简化问题的描述，避开过于复杂的东西，一些迂回的做法在所难免。我们要首先说明的是，所有可能的复杂因素都被考虑进去了，而且使用的数学工具确实保证涉及到的结构与简单的结构等价。

对于有任意多个玩家的各种博弈来说，这些都能够做到，也必须做到。但是，如上所述，在一般地实现了这一目标之后，我们的下一个目标是为二人零和博弈找到一个完

备解。在这一章中,我们讨论所有博弈。在下一章中,我们将只研究二人零和博弈。在我们研究透彻二人零和博弈并对一些重要的例子进行讨论之后,我们将扩展研究的范围,首先是 n 人零和博弈,然后是所有博弈。

6. 简化的博弈概念

6.1 术语解释

6.1 在用组合数学严格定义博弈的概念之前,我们必须首先澄清一些专门术语。博弈的讨论中要用到一些基本的术语,但这些术语在日常生活中的使用十分含糊。这些术语有时是这个意思,有时是另一个意思。而且,最
49 糟糕的是,有时候它们又好像是同义词。所以,我们必须引入确定的专门用法,从此以后固守这些用法。

首先,我们必须区别作为一个抽象概念的一种博弈(game)与玩一局(一盘或一次)这种博弈(a play)。一种博弈简单指描述这种博弈的规则的总和。在特定情形下或以一定方式玩一次某种博弈是一局(盘)。[①]

第二,关于动作(move),我们也应做出相应的区别,

---

① 在大多数博弈中,日常说法中的玩游戏与游戏是一回事;在国际象棋、扑克和很多体育活动中也是这样。在桥牌中,一个 play 是"一盘"(rubber);在网球中,一个 play 也是"一盘"(set)。不幸的是,这些游戏(博弈)中,一盘(或一局)的特定组成部分也被称为"博弈"。法语术语则不那么含糊:"game" = "jeu","play" = "partie"。——49,①

它们是博弈的组成部分。一个动作是各种备择(alternative)中的一次选择机会,这一选择由玩家之一做出,或由某种装置按照一定的概率分布给出。这些都要严格遵守博弈规则。动作只不过是抽象的"场合",带有参与者的描述性细节,是博弈的一个组成部分。一次具体博弈,即一局博弈中,被选定的备择称为选择(choice)。因此,动作与选择之间的关系如同博弈与一局博弈之间的关系。博弈由一个动作序列组成,而一局博弈则由一个选择序列组成。[1]

最后,博弈规则不应该与玩家"策略"混为一谈。它们严格的定义将在后面给出,这里我们要强调的是,这一区别必须从一开始就是清楚的。每位玩家自由选择他的策略,即一般原则支配着他的选择。任意一个具体策略也许是好的或坏的——假如这些概念能够有严格解释的话(见 14.5 和 17.8—17.10),由玩家斟酌决定接受还是拒绝它。然而,博弈规则是绝对的命令。如果规则被违背了,那么,根据定义,总交易终止,此后的事情不再是这些规则所描述的那种博弈。在很多情况下,违背规则甚至从物理上说都是不可能的。[2]

6.2 博弈的要素

6.2.1 现在,让我们考虑一个博弈 Γ,其中有 n 个玩家,为了简练,分别记为 $1,2,\cdots,n$。一般情况下,一个博

---

① 从这个意义上说,我们可以谈论国际象棋的第一个动作(在棋类中称一招或一步),也可以谈论"E2—E4"这一选择。——49,②

② 例如,在国际象棋中,规则禁止一个玩家将他的王移到"棋盘"的某一位置。但是,一位玩家却能够将他的王移到对手能够将他"将死"的位置,这只不过是不明智,却不是规则禁止的。——49,③

弈由一个动作序列组成。我们假设这些动作的个数和排列从一开始就是给定的。我们将会看到，这些限制并无实际意义，而且我们能够轻易地将其去掉。现在，我们用 ν 记 Γ 中动作的个数，ν 是一个整数，$\nu = 1, 2, \cdots$。动作本身记为 $M_1, \cdots, M_\nu$，而且我们假设这是一个时间序列，即它们按照这一顺序发生。

50 动作 M_κ，$\kappa = 1, \cdots, \nu$ 实际上由若干备择组成，动作 M_κ 是从这些备择中做出选择。这些备择的个数记为 α_κ，备择本身记为 $\mathscr{A}_\kappa(1), \cdots, \mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$。

动作分两类：第一类动作是由某一位玩家做出选择，完全取决于他的自由决策，称个人动作。第二类动作取决于某种机械装置，它按照一定概率给出具有偶然性的结果①，称机会动作。因此，对于每一个个人动作，我们必须指明哪一位玩家的决策决定这个动作，即它是谁的动作。我们用 k_κ 记问题中的玩家（即他的号码），$k_\kappa = 1, \cdots, n$。对于一个机会动作，我们令 $k_\kappa = 0$。这里，各个备择 $\mathscr{A}_\kappa(1), \cdots, \mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$ 的概率必须是给定的，分别记为 $p_\kappa(1), \cdots, p_\kappa(\alpha_\kappa)$。②

6.2.2 在动作 M_κ 中，选择是从 $\mathscr{A}_\kappa(1), \cdots, \mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$

---

① 例如，从洗过的一副扑克牌中抽取一张，投掷一枚骰子等。在包含力量和技巧的某些博弈中，“策略”也能够发挥重要作用，如网球和足球等。在这些博弈中，玩家的动作在一定程度上说是其个人动作，即取决于他们的自由决策，但超过一定程度之后，它们就成了机会动作了，此时，概率成了其中的玩家的特征。——50，①

② 由于 $p_\kappa(1), \cdots, p_\kappa(\alpha_\kappa)$ 是概率，它们必然是不小于 0 的数字。又由于它们是不相交且穷尽的备择（对于一个固定的 κ），它们的和必定等于 1，即：

$$p_\kappa(\sigma) \geq 0, \qquad \sum_{\sigma=1}^{\alpha_\kappa} = 1 \qquad \text{——50，②}$$

中选定一个，即从号码 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中选择一个号码。我们记选定的号码为 σ_κ，那么，这一选择由一个数字 σ_κ 来描述，$\sigma_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$。而且，一个完成的动作由已经被指定的选择来描述，对应着此前的所有动作 $\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_\nu$，即由序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 描述。

现在，博弈 Γ 的规则必须规定，如果对于每一位玩家($k=1,\cdots,n$)来说，一局博弈由一个给定的序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 来描述，那么，一局博弈的结果是什么呢？也就是说，当一局博弈结束时，每位玩家的收益是什么呢？记玩家 k 的收益为 $\mathcal{J}_k$(如果玩家 k 收，那么，$\mathcal{J}_k>0$；如果他支付，那么，$\mathcal{J}_k<0$；如果他不收也不支，那么，$\mathcal{J}_k=0$)。因此，每一个 $\mathcal{J}_k$ 必定是 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的一个函数：

$$\mathcal{J}_k=\mathcal{J}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu),k=1,\cdots,n$$

我们再次强调，博弈 Γ 的规则定义函数 $\mathcal{J}_k=\mathcal{J}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)$，它只不过是一个函数①，即每一个 $\mathcal{J}_k$ 抽象地依赖于变量($\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$)。但是，在任何时候，每一个 σ_κ 都是一个变量，其取值范围是 $1,\cdots,\alpha_\kappa$。为 σ_κ 指定具体数值，即选定一个具体的序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$，并不是博弈 Γ 的组成部分，正如我们在上面指出的那样，它是一局博弈的定义。

6.3 信息和预备关系

6.3.1 我们对博弈 Γ 的描述尚未完成，因为我们还 51
没有指定每一位玩家必须做出决策时所拥有的信息。

我们将以如下方式讨论这个问题：我们依次找出与动

① 函数概念的系统说明见 13.1。——50，③

作 $M_1,\cdots,M_\nu$ 相应的选择。

让我们考虑一个特定的动作 M_κ。如果这是一个机会动作,那么,我们只需说:选择是由机会决定的,任何人的意志或关于其他事情的知识都不能够影响它。但是,如果 M_κ 是一个个人动作,属于玩家 k_κ,那么,当玩家 k_κ 做出有关 M_κ 的决策——即他做出 σ_κ 选择时,他的信息状况就相当重要。

他能够获知的事情仅仅是与 M_κ 之前的动作——即 $M_1,\cdots,M_{\kappa-1}$——相应的选择。也就是说,他可以知道 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值。不过,他也不一定知道那么多。Γ 的一个重要特征是,当轮到一位玩家选择 σ_κ 的值时,他至少需要多少有关 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的信息。我们将很快在若干例子中证明这一约束条件的本质是什么。

玩家 k_κ 在 M_κ 时的信息状况的最简单描述是:一个给定的集合 Λ_κ,它由来自 $\lambda=1,\cdots,\kappa-1$ 中的一些数组成。假定玩家 k_κ 知道 σ_λ 的取值,λ 属于 Λ_κ,而且,当 λ 取其他值时,关于 σ_λ 的取值,他什么也不知道。

在这种情况下,当 λ 属于 Λ_κ 时,那么,我们说 λ 是 κ 的预备(preliminary)。这意味着,$\lambda=1,\cdots,\kappa-1$,即 $\lambda<\kappa$,但 $\lambda<\kappa$ 未必意味着 λ 属于 Λ_κ。换句话说,如果我们考虑的不是 λ,κ,而是与之相应的两个动作 M_λ 和 M_κ,那么,预备意味着先前(anteriority)①,但先前未必意味着预备。

6.3.2 尽管预备这一概念有一定的局限性,它却值得我们进一步研究。在它自身内部,在它与先前性(见上述脚注①)之间的关系中,它给出了各种可能的组合。在

① 从时间意义上说,$\lambda<\kappa$ 意味着 M_λ 发生在 M_κ 之前。——51,①

这些可能的组合出现的博弈中，它们具有特定的含义。下面，我们将借助一些极为特殊的例子来讨论它们。

6.4 预备性、可递性和信号传递

6.4.1 我们从考察这样一类博弈开始，其中预备性与先前性是一回事。也就是说，在这样的博弈中，做出（个人）动作 M_κ 的玩家 k_κ 知道先前所有的动作 $M_1,\cdots,M_{\kappa-1}$ 的选择结果。国际象棋就是这类具有“完美”(perfect)信息博弈的一个典型例子。一般认为，这类博弈具有理性特征。我们将在第 15 节，尤其是 15.7 中看到这一点如何得到精确解释。

国际象棋的另一个特点是，所有动作都是个人动作。52
这样，即便博弈中包含机会动作，保留上述第一个性质——即预备性与先前性之间的等价——也是可能的。巴加门[①]就是一个例子。[②] 你可能提出这样的疑问：机会动作的出现是否会破坏上述例子中提到的博弈的“理性特征”呢？

6.4.2 我们将会在 15.7.1 中看到，如果我们坚持“理性行为”的一个明显的合理解释，这样的事情将不会出现。这就是说，其中做出（个人）动作 M_κ 的玩家 k_κ 并不知道先前发生的所有事情。这类事情发生在一大类博弈

---

① backgammon，15 子游戏，一方各有 15 枚棋子，掷骰子决定行棋格数。——译者注

② 在巴加门游戏中，机会动作是通过投掷骰子来决定每方可以有选择地前进的格数。个人动作是做出的决策，按照做出的决策划分分配给他的总格数。另外，他可以决定加倍风险，当对手加倍时，他可以选择接受或放弃。然而，在每一个动作过程中，对于每位玩家来说，先前所有动作的选择结果都是在棋盘上可见的。——52，①

之中。这些博弈通常既包含机会动作，又包含个人动作。一般认为，它们具有混合特征：其结果肯定依赖于机会，但同时也严重受到玩家的策略能力的影响。

扑克和桥牌就是很好的例子。这两类博弈表明，一旦我们把预备性和先前性区别开，预备性这一概念能够表现出多么奇妙的特征。下面，我们对此做较为详细的分析。

先前性，即动作的时间顺序，具有可递性。① 一般来说，预备性未必具有可递性。事实上，扑克和桥牌中都不是这样，而且出现这类事情的条件相当典型。

以扑克为例：设 M_μ 代表玩家 1 的发牌—— 一个机会动作；M_λ 是玩家 1 的第一次叫牌—— 一个个人动作；M_κ 是玩家 2（紧跟玩家 1 的叫牌之后）的第一次叫牌——玩家 2 的个人动作，那么，M_μ 是 M_λ 的预备且 M_λ 是 M_κ 的预备，但 M_μ 却不是 M_κ 的预备。② 因此，在这个例子中，预备关系不具有可递性。但是，这个预备关系中涉及两位玩家。然而，在任何博弈中，单就具体一位玩家来说，他的个人动作中的预备关系似乎不大可能缺乏可递性。预备关系的缺乏可递性要求这个玩家“忘记”动作 M_λ 和 M_κ 中的选择的结果与 M_μ 有联系。③ 令人难以理解的是，即便强

① 也就是说，如果 M_μ 先于 M_λ，且 M_λ 先于 M_κ，那么，M_μ 先于 M_κ。在第 1 章 4.4.2 和 4.6.2 中分析占优关系时，我们分析了一种特殊情况，其中可递性出现与否具有重要意义。——52，②

② 也就是说，玩家 1 第一次叫牌时知道他自己的牌；玩家 2 第一次叫牌时知道玩家 1 的第一次叫牌；但是，此时玩家 2 却不知道玩家 1 手里的牌。——52，③

③ 我们假设 M_μ 是 M_λ 的预备且 M_λ 是 M_κ 的预备，但 M_μ 却不是 M_κ 的预备。——52，④

制进行,他又如何能够"忘记"呢！然而,下面恰恰就是这 53
样一个例子。

以桥牌为例:虽然桥牌是由四个人玩的,分别记为 A、B、C、D,但它应该被归类为二人博弈。事实上,A 和 C 形成一个组搭档,不仅仅是一个自愿的联盟。B 和 D 也是这样。A 与 B(或 D)合作而不与 C 合作应该属于"作弊";同样,A 看 B 的牌或在玩游戏过程中跟牌不恰当也属于"作弊"。也就是说,这些做法违背了博弈规则。如果三个(或多个)人玩扑克,那么,其中两个(或多个)有一致利益的玩家合伙对付另一位玩家则是规则允许的。但是,在桥牌中,规则规定 A 必须与 C 合作(B 必须与 D 合作),禁止 A 与 B 合作。显然,我们可以把这种情形描述为,事实上,A 和 C 是一个玩家,B 和 D 是一个玩家,分别记为玩家 1 和玩家 2。换句话说,桥牌是一个二人博弈,只是这两个玩家 1 和 2 不亲自玩。玩家 1 派出 A 和 C 两个代表,玩家 2 则派出 B 和 D 两个代表。

现在,让我们考虑玩家 1 的两个代表:A 和 C。博弈规则限制他们之间的信息交换。例如,设 M_μ 代表 A 发牌——玩家 1 的一个机会动作;M_λ 是 A 出的第一张牌——一个个人动作;M_κ 是 C 在这一轮出的牌——玩家 1 的一个个人动作。如此,M_μ 是 M_λ 的预备且 M_λ 是 M_κ 的预备,但 M_μ 并不是 M_κ 的预备。① 因此,我们再次遇到了非可递性,但这次仅仅涉及一位玩家。值得注意的是,玩

① 也就是说,A 出第一张牌时知道他自己手里的牌;C 出牌时知道 A 出的牌;但此刻 C 不知道 A 手里的牌。——53,①

家1“性格分裂”成了A和C，从而在做出M_λ与M_κ之一时“忘记”了M_μ，这表明了“忘记”是多么必要。

6.4.3 上例表明，预备关系的非可递性对应着一个极为著名的实际策略要素：“信号传递”的可能性。如果在M_κ时，玩家对M_μ一无所知，但是，在M_κ时，观察M_λ的结果是可能的，而且（借助知道M_μ的结果）M_λ已经受到了M_μ的影响，那么，对于M_κ来说，M_λ其实是来自M_μ的一个信号——一个（间接）信息传递工具。视M_λ和M_κ是同一个玩家的动作还是两个不同的玩家的动作，出现了两种对立的情况。

在前一种情况下，如发生在桥牌中的情况那样，玩家（$k_\lambda = k_\kappa$）发出“信号”，即“在其组织内部”散播信息是有利的。在桥牌中，这种愿望通过一个精心设计的“约定信号”体
54 系得以实现。[①] 这些是策略的组成部分，而不是博弈规则（见6.1），因此它们可以变化[②]，桥牌这种游戏本身却保持不变。

在第二种情况下，如我们在扑克牌中看到的那样，玩家（指k_λ，注意这里$k_\lambda \neq k_\kappa$）总是试图阻止上述“信号传递”，即尽力不向对手（k_κ）传递信息。为此，在做出M_λ的选择时，玩家会采取不规则的和看似不合逻辑的行为，以使对手难以从（他看到的）M_λ的结果中获得（他对之没有

① 在桥牌中，按照博弈规则允许的行为来传递信号是完全公正的。例如，在游戏开始之前，（玩家1的两个代表，见6.4.2）A和C约定：“开叫”二阶有将定约“表示”其他花色较弱。但是，如果通过抓耳挠腮之类的做法来发出这样的信号则是不对的，属于“作弊”。——53，②

② 两个玩家甚至可以有根本不同的叫牌体系，即A和C有一套体系，而B和D有另一套体系。但是，在一个玩家的“组织内部”，如A和C，他们必须约定一套叫牌体系。——54，①

直接知识的）M_μ 的结果的线索。也就是说，这一过程试图把"信号"弄得不确定而含糊。我们将在 19.2.1 中看到，这正是扑克游戏中"诈叫"的作用。①

我们把这两个过程分别称为直接信号传递和反向信号传递。还应该指出的一点是，反向信号传递——即误导对手——几乎出现在所有博弈中，包括桥牌。这是因为，当有多个玩家时，预备关系很容易缺乏可递性。直接信号传递则比较少见。例如，扑克中就找不到它的蛛丝马迹。事实上，正如我们在前面指出过的那样，在只有一位玩家的情况下，直接信号传递意味着预备关系的非可递性——即它要求一位玩家十分"健忘"，像桥牌那样，这是通过一位玩家"性格分裂"为两个人来实现的。

无论如何，桥牌和扑克游戏是这两类缺乏可递性的两个典型例子：一个是直接信号传递的非可递性，另一个是反向信号传递的非可递性。

两类信号传递都导致的一个棘手问题是：实际博弈过程中两类信号传递的权衡问题，即在试图定义"好的"、"理性的"博弈玩法时的权衡。相对于不"复杂的"博弈来说，过多或过少信号传递必然会偏离"不复杂的"玩法。而且，只有在成本明确的情况下，即"多余"信号或信号"不足"的直接后果是损失的情况下，这才是可能的。因此，问题是调整"多余"信号使掌握信息的收益超过其直接造成的损失。你会觉得，这似乎涉及到了寻找一个最优状态之类

① 当持有一手弱牌时，"诈叫"并不是为了取得额外的好处。见上面提到的段落。——54，②

的事情，尽管这还不是一个清楚的定义。我们将会看到二人博弈理论如何处理这一问题，而且我们将在一个典型例子中对其进行详细讨论（见第 19 节简化的扑克游戏）。

最后，我们要看到，预备关系具有不可递性的重要例子都是含有机会动作的博弈。这是很奇妙的，因为这两类现象
55 之间根本没有明显的联系。[1][2] 我们后面的分析的确证明，在这种情况下，机会动作出现与否极少影响策略的基本方面。

7. 完备的博弈概念

7.1 每个动作特征的可变性

7.1.1 我们在 6.2.1 中引入了动作 M_κ 的 α_κ 个备择 $\mathscr{A}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$。我们用 k_κ 描述这一动作是一个个人动作还是一个机会动作。在前一种情况下，它指明这一动作是哪位玩家的动作；在后一种情况下，我们要给定这些备择出现的概率 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$。在 6.3.1 中，我们用集合 A_κ 描述预备关系的概念，A_κ 是由 λ 的取值（$\lambda = 1,\cdots,\kappa-1$）组成的集合，而 λ 是 κ 的预备。然而，我们尚未明确这些东西——$\alpha_\kappa, k_\kappa, A_\kappa$ 和 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma), p_\kappa(\sigma), \sigma = 1,\cdots,\alpha_\kappa$——是惟一地依赖于 κ，还是还依赖于别的东西。

---

① 见 6.4.1 中预备性与先前性一致从而具有可递性时的相应问题。如我们在那里指出的那样，在这种情况下，机会动作出现与否无关紧要。——54，③

② "硬币配对"就是这样一个重要例子。我们将在第 18 节中讨论其他有关例子。——54，④

当然了，这里的“别的东西”只能是与先于 M_κ 的动作，即与数字 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 相对应的选择结果（见 6.2.2）。

下面，我们要对这一依赖关系进行更加详细的讨论。

首先，备择 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 本身（有别于它们的个数 α_κ！）对 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的依赖关系是无关紧要的。我们还可以假设，与动作 M_κ 相对应的选择不是从 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 中做出选择，而是在它们的号码 σ 中间做出选择。最后，只有 M_κ 的 σ，即 σ_κ，出现在描述这一局博弈的结果表达式之中，即出现在函数 $J_k(\sigma_1,\cdots,\sigma_\kappa)$ 之中，$k=1,\cdots,n$（见 6.2.2）。[①]

第二，当 M_κ 是一个机会动作，即当 $k_\kappa=0$ 时，对 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的各种依赖关系并不带来任何复杂性（见 6.2.1 末尾）。它们并不影响我们关于玩家行为的分析。尤其是，概率 $p_\kappa(\sigma)$ 不再出现在我们的分析之中，因为它们的发生仅仅与机会动作有关。（另一方面，A_κ 也永远不会出现在机会动作之中。）

第三，当 M_κ 是一个个人动作时[②]，我们必须分析 α_κ、k_κ 和 A_κ 对 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的依赖关系。因此，这些可能性的

---

① 如果 $M_\kappa(\sigma)$ 是一个个人动作，那么，在 M_κ 时，玩家 k_κ 能够有的备择 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 的形式和性质将向玩家 k_κ 传递有关这一时刻之前的 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 取值的信息，如果 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 依赖于它们的话。但是，任何这类信息都应该被当作玩家 k_κ 在 M_κ 时的信息来指定。我们已经在 6.3.1 中讨论了关于这一信息问题的最简单的解决方案，而且我们将在 7.1.2 中完成对这一问题的讨论。当 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 作为可能的信息来源的作用受到关注时，我们就必须进一步讨论 α_κ，k_κ 和 A_κ。这将放在稍后进行。——55，①

② 对于一个给定的 κ，这是否发生依赖于 k_κ，从而间接地依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，因为它是由 $k_\kappa\neq 0$ 描述的（见 6.2.1 末尾）。——55，②

依赖关系会使我们的分析变得十分复杂。①

56 **7.1.2** M_κ 时，玩家 k_κ 必须被告知 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 的取值，因为这些是博弈规则的组成部分，他必须看到这些信息。只要它们依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，那么，他就能够从中得出一些有关 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的结论。但是，如果 λ 不在 Λ_κ 之中，关于 σ_λ，我们又假设他什么也不知道！很难看出，我们如何才能回避这一矛盾。

更具体一些说：在如下特殊情况下，根本不存在冲突：设 Λ_κ 独立于所有 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，而且 α_κ 和 k_κ 仅仅依赖于 σ_λ，λ 在 Λ_κ 之中。这样，玩家 k_κ 肯定无法从 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 中得到任何信息。也就是说，他所知道的仅仅是 σ_λ 的取值，λ 在 Λ_κ 之中。如果情况的确如此，我们说，我们有**特殊形式的依赖关系**。

但是，我们是否总有特殊形式的依赖关系呢？取一个极端的例子：如果 Λ_κ 总是空的，即玩家 k_κ 在 M_κ 时一无所知，而且 α_κ 又显然依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 中的一些，结果会怎样呢？

这是不允许的。我们必须要求，所有能够从 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 得出的结论必须是明确的，而且从一开始就被指定为玩家 k_κ 在 M_κ 时能够得到的信息。然而，如果我们试图把 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 所依赖于的 σ_λ 的指数 λ 都包括在 Λ_κ 之中，以

---

① 例如，在国际象棋中，在 M_κ 时，备择的个数 α_κ 依赖于玩家在此时面对的局面，即此前的博弈进程。在桥牌中，下一圈中出第一张牌的玩家，即 M_κ 时的 k_κ，是上一圈出最后一张牌的那位玩家，即他此时的选择机会也依赖于此前的博弈进程。在扑克和其他一些游戏中，在某一给定的时刻，一位玩家能够得到的信息量，即 M_κ 时的 Λ_κ，也会依赖于此前他和其他玩家做过的事情。——55，③

达到上述目的，那么，我们就错了。首先，在分析 Λ_κ 时[①]，为避免这一条件的迂回性，我们必须十分小心。不过，即使这种情况不出现，由于 Λ_κ 仅仅依赖于 κ，而不依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，即每一位玩家在任一时刻能够得到的信息独立于此前的博弈进程，那么，上述做法仍有可能行不通。例如，假设 α_κ 依赖于某些 σ_λ 的特定组合，$\lambda=1,\cdots,\kappa_1$，而且博弈规则的确假设玩家 k_κ 在 M_κ 时应该知道这一组合的取值，但不允许他知道得更多（即不知道个别 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值）。例如，他可能知道 $\sigma_\mu+\sigma_\lambda$ 的值，其中 μ 和 λ 都先于 $\kappa(\mu,\lambda<\kappa)$，但他不知道 σ_μ 和 σ_λ 各自的值。

你可以试着用各种巧妙的办法把上述情况还原为我们在前面提出的简单方案，其中玩家 k_κ 的信息状况由集合 Λ_κ 描述。[②] 但是，如果玩家 k_κ 在 M_κ 时的信息的各个组成部分本身来自不同玩家的个人动作或同一玩家在不同信息阶段的个人动作，那么，要解决它们之间的冲突则是完全不可能的。上例中，如果 $k_\mu\neq k_\lambda$，或 $k_\mu=k_\lambda$，但是，这个玩家在 M_μ 和 M_λ 的信息状况不同，那么，上述事情就会发生。[③] 57

---

① 只有在所有 Λ_κ 就所有序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 做了总体上的考虑，Λ_κ 所依赖的 σ_λ 才能确定下来。每一个 Λ_κ 都应该包含 λ 吗？——56，①

② 在上例中，你可以试着用一个新的动作替换动作 M_μ，在这个新的动作中，被选定的不是 σ_μ，而是 $\sigma_\mu+\sigma_\lambda$。$M_\kappa$ 保持不变。那么，在 M_κ 时，玩家 k_κ 就只知道与新动作 M_μ 有关的选择结果。——56，②

③ 在第 56 页脚注②的例子中，这意味着：如果 $k_\mu\neq k_\lambda$，那么，不存在这样一个玩家，对于他来说，我们能够定义上例中那样的新动作 M_κ（其中 $\sigma_\mu+\sigma_\lambda$ 已经被选定，且这一动作是个人动作）。如果 $k_\mu=k_\lambda$，但是，从 M_μ 到 M_λ，信息状况随之变化，那么，我们就无法用一个新的 M_μ 并令人满意地描述信息状况。——57，①

7.2 一般描述

7.2.1 我们可以借助各种各样的技巧绕过这些困难，但是，最自然的做法还是允许它们存在，并且相应修改我们的定义。

办法之一是，不再用 Λ_κ 描述信息状况，而是以明确的方式描述玩家 k_κ 在其个人动作 M_κ 时的信息状况：列举这一动作之前的变量 σ_λ——即 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$——的函数，此刻，他知道这些函数的数值。这是一个函数系统，记为 Φ_κ。

因此，Φ_κ 是下述函数的集合：

$$h(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$$

由于 Φ_κ 的元素描述的是对 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的依赖关系，Φ_κ 本身是固定不变的，即它仅仅依赖于 κ。① α_κ 和 k_κ 有可能依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，而且，由于它们的值是玩家 k_κ 在 M_κ 时知道的，函数

$$\alpha_\kappa=\alpha_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}),k_\kappa=k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$$

必定属于 Φ_κ。当然，对于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的一个特殊的集合来说，一旦 $k_\kappa=0$，那么，动作 M_κ 就是一个机会动作（见上），Φ_κ 也就不再有用，不过，这并不重要。

显然，前面的 Λ_κ 描述方式只是现在的 Φ_κ 描述方式

① 然而，这一方案中包括这样一种可能情况，即 Φ_κ 所表达的信息状况依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$。例如，如果对于 σ_λ 的某些取值，Φ_κ 中的所有函数 $h(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$ 明显依赖于 σ_μ，而对于 σ_λ 的另外一些取值，它们又独立于 σ_μ，那么，上述事情时有发生。然而，Φ_κ 却是固定不变的。——57，②

的一个特殊情况。[①]

7.2.2 这里，读者也许会对我们突然转移话题而感到不满。事实上，我们的讨论是被现实中典型博弈的复杂性引向这个方向的（见第 55 页脚注③）。不过，用 Φ_κ 替换 Λ_κ 的必要性却源于我们希望保持（数学）形式上的一般性。引导我们迈出这一步的这些决定性的困难（见 7.1.2，尤其是其中的脚注）则实属推断。也就是说，它们最初并不是来自实际博弈例子的特征。（例如，国际象棋 58
和桥牌是能够借助 Λ_κ 来描述的。）

需要借助 Φ_κ 进行讨论的博弈是存在的。不过，对于其中的大多数来说，我们也可以借助各种各样的技巧将其转换为 Λ_κ 能够描述的情况。[②] 这个题目十分复杂，不值得为其花费更多篇幅。毫无疑问，也存在着一些经济模型，其中 Φ_κ 是必要的。[③]

然而，最重要的一点是：

在追求我们已确定的目标时，我们必须确认我们已经穷

---

① 如果 Φ_κ 恰好是由一些特定变量 σ_λ 的所有函数组成的——如 λ 属于一个给定的集合的那些 σ_λ 的函数，而且不是其他变量的函数，那么，Φ_κ 所描述的情况就回到了 Λ_κ 所描述的情况：Λ_κ 就是上述集合。但是，我们已经看到，一般来说，我们无法指望这样一个集合总是存在。——57，③

② 我们指桥牌，其中玩家可以垫掉一些牌张而不会暴露自己，而且允许他们在后面捡起来或明着使用他们垫掉过的牌。克里斯皮尔棋（Kreisspiel，一种双方分别在两个棋盘上下的国际象棋。——译者注）也是这类游戏。（其描述见 9.2.3，根据那里的描述，每位玩家知道对手先前的“可能的”选择，但不知道这些选择本身，而且这里的“可能情况”是所有先前选择的一个函数。）——58，①

③ 比如，假设一位参与者不知道他人先前行动的详细细节，但知道那些行动的特定统计结果。——58，②

尽了与玩家的各种决策有关的所有可能组合、他们的信息状况等。这些问题广泛存在于经济学文献之中。我们希望证明,它们是可以被解决的。不过,我们不希望因为不适当的简化而遭受指责,说我们没有考虑到一些基本的可能情况。

另外,我们将会看到,我们的讨论中所引入的形式上的东西并不会使分析过于复杂。也就是说,它们只是暂时地使形式化描述的最初阶段显得复杂。问题的最终形式并不受其影响(见 11.2)。

7.2.3 最后,我们要讨论一下前面做出的一个特殊假设(见 6.2.1 的开头):动作的个数和排列从一开始就是给定的(固定不变)。我们将会看到,这个约束条件并不是根本性的。

让我们首先讨论动作的"排列"。每个动作的本质——即与之相对应的玩家 k_κ——的可变性已经被充分讨论过了(尤其见 7.2.1)。动作 M_κ($\kappa=1,\cdots,\nu$)的排序就是其时间顺序,从而没有什么值得讨论的。

然后,我们讨论动作的个数。它是可变的,即依赖于博弈进程。[1] 在描述 ν 的这一可变性时,我们必须十分小心。

59 博弈进程由(选择)序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 来描述(见 6.2.2)。我们不可以简单地说,ν 是变量 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的一个函数,因为 ν 的大小不是事先知道的,整个序列 $\sigma_1,\cdots,$

---

① 大多数博弈——国际象棋、巴加门、扑克和桥牌——都是这样。在桥牌中,这一变动性首先归因于"叫牌"阶段时间长度的可变性,其次归因于一个"胜局"(即一盘)中包含的定约个数的可变性。具有一个固定的 ν 的博弈例子较难找到:我们将会看到,在任何博弈中,我们能够人为地固定 ν,但是,如果一开始就把 ν 固定下来,游戏很容易变得单调乏味。——58,③

σ_ν 是无法事先看到的。[①] 正确的说法是：设想变量 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$ 是一个接一个地选定的。[②] 如果这一相继选择过程是无穷的，那么，博弈规则必须规定在某个地方 ν 终止这一过程。终止时的 ν 当然依赖于此前的所有选择。这也正是这一局博弈中动作的个数。

因此，必须有明确的停止规则，以使每一个能够想像得到的博弈将在某个时候停止。也就是说，绝对不可能把选择 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$（像上面脚注②描述的那样）安排得永远没有尽头。保证这一点的一个明显的办法是设计一个停止规则，根据这一规则，在某一固定的时刻 ν^* 之前，博弈就会停止。也就是说，虽然 ν 有可能依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$，但是，我们却可以肯定 $\nu \leqq \nu^*$，其中 ν^* 不依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$。如果情况是这样的，我们说停止规则以 ν^* 为界。我们将假设，我们讨论的博弈都有以（大小适当而固定的）数 ν^* 为界的停止规则。[③④]

---

① 也就是说，你不能说博弈的长短依赖于与全部动作有关的所有选择，这是因为，无论特定的动作是否发生，它都依赖于博弈的长短。这种说法显然是循环论证。——59，①

② σ_1 的变动范围是 $1, \cdots, \alpha_1$。σ_2 的变动范围是 $1, \cdots, \alpha_2$，而且有可能依赖于 σ_1：$\alpha_2 = \alpha_2(\sigma_1)$。$\sigma_3$ 的变动范围是 $1, \cdots, \alpha_3$，而且可能依赖于 σ_1 和 σ_2：$\alpha_3 = \alpha_3(\sigma_1, \sigma_2)$。如此等等。——59，②

③ 停止规则确实是博弈的一个基本组成部分。在大多数博弈中，找到 ν 的固定上限 ν^* 并不难。但有的时候，传统的博弈规则没有排除一局博弈——在例外情况下——有可能无限进行。在这些情况中，实际预防措施已经被结合到博弈规则之中了，目的是保证界限 ν^* 存在。然而，我们必须指出，这些预防措施并不总是绝对有效的——虽然在每一实例中目标是清楚的，甚至在例外性的无穷博弈存在的情况下，它们也是很少有实际意义的。不管怎样，至少从数学的角度看，对少数典型例子进行讨论还是有一些启发意义的。

下面，我们给出四个例子，并按照停止规则有效程度递减来排序。

埃卡泰牌戏：一次博弈是一个"胜局"，三"局"中胜两"局"为一个"胜局"（见第49页脚注①），赢五个"点"算胜一"局"，每次"发牌"给一位玩家或另一位玩家一"点"或二"点"。因此，一个"胜局"至多玩三"局"结束，一"局"至多由九个"发牌"组成。不难验证，一个"发牌"由13、14或18个动作组成。因此，$\nu^* = 3 \times 9 \times 18$。

扑克：两位玩家就可以交替"争叫"而没有尽头。因此，传统的做法是增加一个规则以事先限制允许"争叫"的次数。（竞叫的数额也是受限制的，以使这些个人动作的备择个数 α_κ 有限。）这当然保证了一个有限的 ν^*。

桥牌：这里，一次博弈是一个"胜局"，如果两方不能达成定约，一次博弈也可以永远进行下去。可以想像，有可能输掉这一"胜局"的一方应该以高得出格的争叫使得这一盘永远不能结束。实际中，没有人这样做，但是，博弈规则中毕竟没有明确禁止这么做。无论如何，从理论上说，某种停止规则应该被引入桥牌。

国际象棋：尤其在"残局"阶段，构造无穷选择序列使棋局永不结束（即"将死"）并不困难。最简单的情况是无限重复同一选择循环，不过，也存在非循环性重复选择。所有这些为有可能输棋的玩家有机会确保"和局"。出于这一理由，各种"和局规则"——即停止规则——被用于防止这种现象。

一个常见的"和局规则"是：任何选择（即动作）循环一旦重复三次，博弈以"和局"告终。这一规则排除了绝大多数无穷序列，但并非全部，从而是无效的。

另一种"和局规则"是：如果在40步内兵未曾移动且没有其他棋子被吃掉（这些是不可逆的招数），那么，棋局以"和局"告终。不难看出，这一规则是有效的，不过 ν^* 有可能很大。——59，③

④ 从纯数学角度看，我们可以提出如下问题：有效的停止规则指无法使序列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$ 成为一个无穷序列。也就是说，总是存在着一个有限的 ν，而且 ν 依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$。这是否能够保证存在一个有限且固定的 ν^*，以界定停止规则？即 $\nu \leq \nu^*$ 是否成立？

这是一个十分学究气的问题，因为实际中的博弈规则都试图直接建立一个 ν^*（见上面的脚注③）。不过，它却是一个十分有趣的数学问题。

答案是肯定的，即 ν^* 总是存在。例如，见哥尼（D. König）：*Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche*, Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Sect. Math. 第III/II卷（1927）第121—130页；尤其见附录第129—130页。——59，④

这样一来，我们就能够用界 ν^* 来彻底消除 ν 的变动性。 60

要做到这一点，只需简单地把博弈的过程扩展到总是有 ν^* 个动作 $M_1,\cdots,M_{\nu^*}$。到动作 M_ν 为止的所有事情都没有发生变化，而 M_ν 之后的所有动作都是"哑动作"(dummy move)。也就是说，对于序列 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots$，如果我们考虑的是动作 $M_\kappa,\kappa=1,\cdots,\nu^*$，而 $\nu<\kappa$，那么，我们使 M_κ 成为一个机会动作，它只有一个备择①，即什么事情也不发生。

因此，在 6.2.1 的开头做出的假设——尤其是 ν 被事先给定的假设——就得到了验证。

8. 集合和分拆

8.1　对博弈进行集合论描述的必要性

8.1　我们已经对博弈进行了令人满意的一般性描述，接下来我们要做的事情是将其重新表述得具有公理化的精确性和严格性，为后面的数学讨论打下一个基础。然而，在此之前，尝试另一种形式描述还是值得的。这一描述严格等价于我们在前面的章节中给出的描述，但当我们进行一般形式的陈述时，它显得更统一、更简单且有着更简练易懂的符号。

为了完成这种描述，我们必须广泛使用集合论——更具体说是分拆——的符号体系。下面，我们对此进行必要

① 这当然意味着 $\alpha_\kappa=1,k_\kappa=0$ 且 $p_\kappa(1)=1$。——60,①

的解释。

8.2 集合及其性质图示

61 **8.2.1** 一个集合就是放在一起的一些东西，这些东西即该集合的元素的性质和个数绝对不受任何限制。组成一个集合的元素之间没有顺序和其他类型的关系。也就是说，如果有两个集合 A 和 B，A 中的元素也是 B 中的元素且 B 中的元素也是 A 中的元素，那么，这两个集合是完全等同的，即 $A=B$。α 是 A 中的一个元素这一关系也被说成 α 属于 A。[①]

我们感兴趣的主要是有限集，即有限个元素组成的集合。

对任意给定一些东西 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$，我们把它们的集合记为 $(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)$。引入一个不包含任何东西的集合即空集是有方便之处的。[②] 我们把空集记为 $\ominus$。尤其是，我们能够构造一个只含有一个元素的集合，称一元集。注意，千万不要把一元集 (α) 与其惟一的元素 α 混淆了，它们不是相同的东西。[③]

---

① 集合论方面的数学文献浩如烟海。关于集合论方面的更多知识，有兴趣的读者可参见：弗兰克尔（A. Fränkel）：*Einleitung in die Mengenlehre*, 3rd Edit. 柏林，1928，这是一本很好的入门书；奥斯多夫（F. Hausdorff）：*Mengenlehre*, 2nd Edit. 莱比锡，1927，这是一本精确且内容处理极为出色的书。——61，①

② 如果两个集合 A 和 B 都不含有任何元素，那么，我们说，它们有相同的元素。因此，根据我们在上面说的，$A=B$。也就是说，只存在惟一一个空集。

这里的推理也许有点怪异，却无可指责。——61，②

③ 在有些数学分支中，(α) 和 α 能够是等价的。这是偶尔做出的事情，但这样做是不健康的。一般来说，这样做也是行不通的。例如，设 α 是一个肯定不是一元集的某种东西，即一个由两个元素组成的集合或空集 $\ominus$，那么，(α) 与 α 就必须被区别开，因为 (α) 是一个一元集，而集合 α 则不是。——61，③

我们强调，任何东西都能够是一个集合的元素。当然，我们将把自己限于数学的东西。集合本身也完全能够被放在一起，从而形成集合的集合。后者常常被赋予其他名称，如集合的系或集合的聚合。但这并非必然。

8.2.2 有关集合的最主要概念和运算是：

(8:A:a)　如果 A 的每一个元素也是 B 的元素，称 A 是 B 的一个子集，或 B 是 A 的一个超集，记为 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$。如果上述关系成立且 B 含有不属于 A 的元素，称 A 是 B 的真子集，或 B 是 A 的真超集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。我们看到：如果 A 是 B 的一个子集且 B 是 A 的一个子集，那么，$A=B$。（这是 8.2.1 开头描述的原理的重新表述。）还有：A 是 B 的一个真子集，当且仅当 A 是 B 的一个子集且 $A=B$ 不成立。

(8:A:b)　两个集合的和或并（集）是 A 的所有元 62
素与 B 的所有元素合在一起构成的集合，记为 $A\cup B$。两个以上的集合的并以类似方式形成。[①]

(8:A:c)　两个集合 A 与 B 的积或交是 A 与 B 的

---

① 并、积、差的专门术语是约定俗成的东西。其基础是其与代数运算的相似之处。事实上，代数运算 $\cup$ 和 $\cap$ 也被称为布尔代数，有其自身的含义。例如，见塔斯基（A. Tarski）：《逻辑导论》，纽约，1941。也可见伯克霍夫（Garrett Birkhoff）：《格理论》，纽约，1940。本书更有利于理解现代抽象方法。我们将在第 6 章研究布尔代数。更多参考文献将在那里给出。——62，①

所有共同元素组成的集合，记为 $A\cap B$。两个以上集合的交以类似方式形成。

(8:A:d) 两个集合 A,B 的差（A 是被减数集，B 是减数集）是 A 中不属于 B 的所有元素组成的集合，记为 $A-B$。

(8:A:e) 当 B 是 A 的一个真子集时，我们也称 $A-B$ 是 B 在 A 中的补（或余）在有些情况下，集合 A 是默认的，我们将简单写 $-B$，且不做特殊说明地说 B 的补。

(8:A:f) 如果 A,B 没有共同的元素，即 $A\cap B=\ominus$，我们说 A 与 B 不相交。

(8:A:g) 称集合的一个系（集合）$\mathscr{A}$ 为一个两两不相交系，如果其中任意两个集合都是不相交的，即如果 A,B 属于 $\mathscr{A}$ 且 $A\neq B$，那么，$A\cap B=\ominus$。

8.2.3 这里，一些图示也许是有益的。

我们用图 1 中的点代表组成集合的元素，一条环形线圈住的点（元素）组成一个集合并在环形线上标出该集合的记号。如图 1 所示，以此方式，集合 A 与集合 C 不相交，而 A 与 B 相交。

63 借助这种方法，我们还能够表示集合的并、积和差。如图 2 所示，A 不是 B 的一个子集，且 B 不也是 A 的子集，因此 $A-B$ 和 $B-A$ 都不是一个补集。然而，在图 3 中，B 是 A 的一个子集，所以 $A-B$ 是 B 在 A 中的补集。

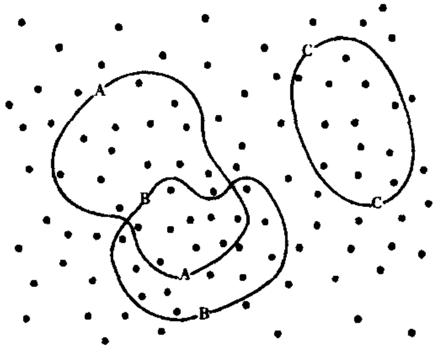


图 1

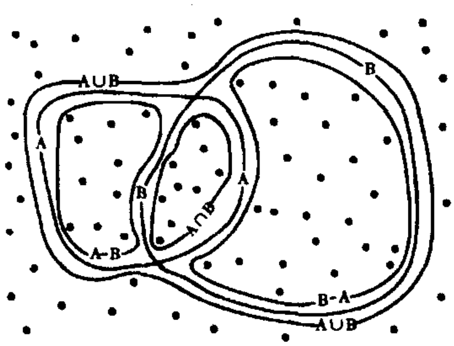


图 2

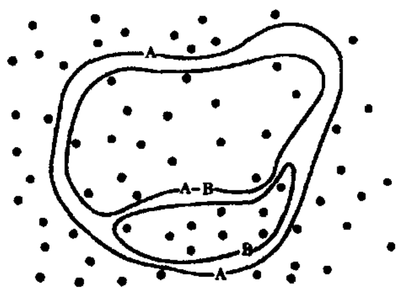


图 3

8.3　分拆及其性质图示

8.3.1.　设 Ω 是一个集合，而且 $\mathscr{A}$ 是一个给定的集合系。我们说 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一个分拆，如果它满足以下两个性质：

(8:B:a)　　$\mathscr{A}$ 中每一个元素 A 都是 Ω 的一个非空子集。

(8:B:b)　　$\mathscr{A}$ 是一个两两不相交的系。

这一概念也是很多文献的主题。①

对于两个分拆 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，如果它们满足下述条件，我们说 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆：

(8:B:c) $\mathscr{A}$ 中的每一个元素是 $\mathscr{B}$ 中某一元素的子集。② 注意，如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，且 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子分拆，那么，$\mathscr{A}=\mathscr{B}$。③

接下来，我们定义：

(8:B:d) 给定两个分拆 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，我们构造所有非空的交集 $A\cap B$ 的系，其中 A 取遍 $\mathscr{A}$ 中的所
64 有元素且 B 取遍 $\mathscr{B}$ 中所有元素。这显然也是一个分拆，称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**叠加**。④

最后，我们还要就一个给定的集合 C 内的两个分拆

---

① 见上面引用过伯克霍夫的著作。我们的条件(8:B:a)和(8:B:b)并不是严格的传统条件。严格说：

关于(8:B:a)：有时，$\mathscr{A}$ 的元素不必是非空集。事实上，我们在 9.1.3 中就有一个例外（见第 69 页脚注④）。

关于(8:B:b)的说明：习惯上要求 $\mathscr{A}$ 的所有集合的并严格等于集合 Ω。对于我们的目的来说，忽略这一条件比较方便。——63，①

② 由于 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 都是集合，当关注 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 时，用子分拆关系来比较子集关系是合适的。你可以立即验证，如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子集，那么，$\mathscr{A}$ 也是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，但反过来说，一般是不正确的。——63，②

③ 证明：考虑 $\mathscr{A}$ 中的一个集合 A。它必定是 $\mathscr{B}$ 中某一集合 B 的一个子集，而且，反过来，B 是 $\mathscr{A}$ 中某一集合 A_1 的一个子集。所以，只要 A 不是空集，A 和 A_1 就有共同元素，即不是不相交。由于它们都属于分拆 $\mathscr{A}$，必有 $A=A_1$。故，A 是 B 的一个子集且 B 是 $A(A_1)$ 的一个子集。从而 $A=B$，且 A 属于 $\mathscr{B}$。——63，③

④ 不难证明，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的叠加既是 $\mathscr{A}$ 的一个子分拆，又是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆。而且同时是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的子分拆的每一分拆 $\mathscr{C}$ 也正是它们的叠加。这也是这一名称的由来。见上面引用过的伯克霍夫的著作，第 I 章和第 II 章。——64，①

$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 定义上述关系。

(8:B:e)　　$\mathscr{A}$ 是 C 内 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，如果属于 $\mathscr{A}$ 的每一个 C 的子集 A 也是属于 $\mathscr{B}$ 的某个 C 的子集 B 的子集。

(8:B:f)　　在 C 内，$\mathscr{A}$ 等于 $\mathscr{B}$，如果 C 的同一子集是 $\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{B}$ 的子集。

显然，第 63 页的脚注③再次适用。还有，在 Ω 内，上述概念等同于最初的无限制的概念。

8.3.2　下面，我们再给出一些 8.2.3 中那样的图示。

我们从描述分拆开始。我们将不给出分拆中的元素（它们是集合）的名称，但它们的每一个用一个虚的环形线表示，见图 4。

接下来，描述两个分拆 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$：$\mathscr{A}$ 的元素用虚的环形线表示，$\mathscr{B}$ 的元素用打结的实线表示，见图 5。图 5 中， 65
$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆。图 6 中，$\mathscr{A}$ 不是 $\mathscr{B}$ 的子分拆，$\mathscr{B}$ 也不是 $\mathscr{A}$ 的子分拆。我们请读者给出这个图中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的叠加。

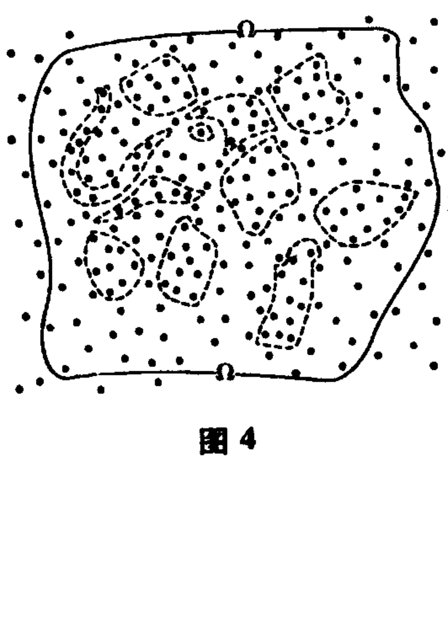


图 4

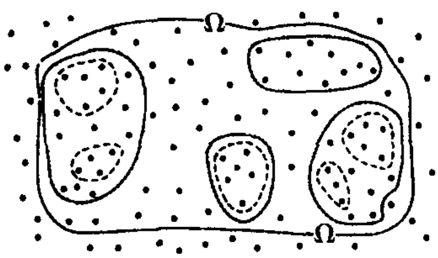


图 5

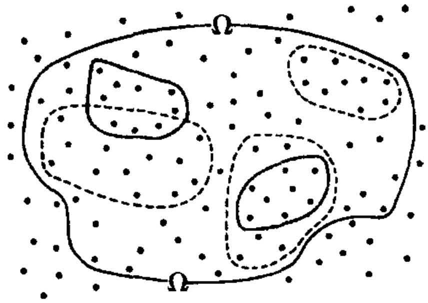


图 6

分拆的另一种较为简略的表示是,用一个点代表集合 66 Ω,分拆的每一个元素——Ω 的子集——用一条从这一点出发向上走的线表示。因此,图 5 中的分拆 $\mathscr{A}$ 可以用图 7 中更为简单的图形表示。这一方法不指出组成分拆的元素之内的元素,而且不像图 6 那样,它无法同时被用于描述 Ω 的若干分拆。然而,如果 Ω 的两个分拆有像图 5 中那样的关系,即 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆,那么,这一缺陷是能够弥补的。在这种情况下,我们就能够用位于顶端的一个点代表 Ω,$\mathscr{B}$ 中每个元素用从这一点出发向上走的一条线代表,$\mathscr{A}$ 中的每个元素用一条继续向上走的线代表,其起点是代表 $\mathscr{B}$ 的元素的线的终点,这表示 $\mathscr{A}$ 的这一元素是 $\mathscr{B}$ 的元素的一个子集。因此,我们能够在图 8 中描述图 5 中的两个分拆 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$。这一描述也没有图 5 中相应的描述那么有启迪作用。不过,其简明性使得它有可能比图 4 至图 6 更容易扩展。尤其是,我们能够用这一工具描述一个分拆序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_\mu$,其中每一个是前一个的子分拆。图 9 就是 $\mu=5$ 的一个例子。

这类结构已经在数学中得到研究,被称为树。

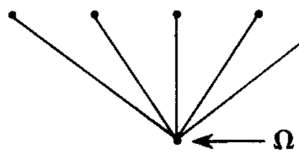


图 7

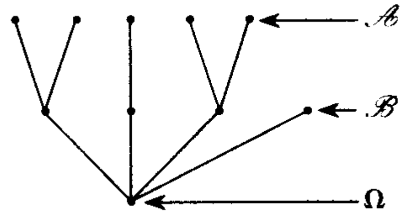


图 8

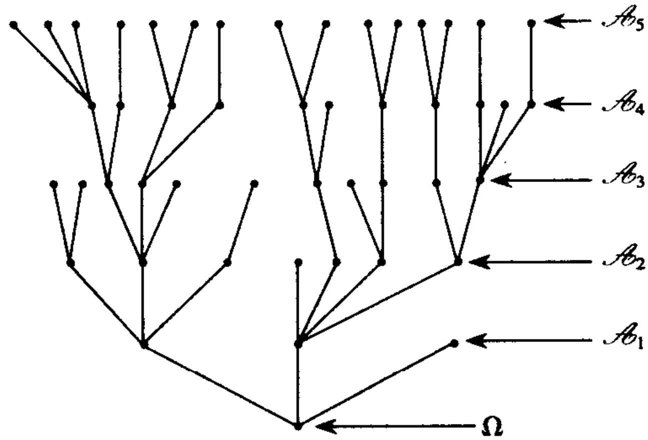


图 9

8.4　集合与分拆的逻辑学解释

8.4.1　我们在 8.2.1—8.3.2 中研究的概念在博弈论的讨论中是有用的，原因在于我们能够赋予它们的数理逻辑解释。

让我们从集合的解释开始。

如果 Ω 是任何东西的集合，那么，任何一个能够想像得到的性质都能够通过指定 Ω 中具有这一性质的元素的集合来描述这一性质，不属于这个集合的元素则没有这一性质。也就是说，如果两个性质在此意义上对应着同一集

合（Ω 的同一子集），那么，Ω 中同一些元素将同时具有这两个性质，从而它们在 Ω 之内是等价的，这里等价一词取其逻辑学中的意思。

（Ω 的元素的）性质不仅仅如此简单地对应着（Ω 的）子集，而且涉及性质的基本逻辑运算对应着我们在 8.2.2 讨论过的集合运算。

因此，两个性质的析取，即断言两者中至少有一个成立，明显对应着它们的集合的并，即运算 $A\cup B$。两个性质的合取，即断言两者同时成立，对应着它们的集合的交，即运算 $A\cap B$。最后，一个性质的否定，即与其对立的断言，对应着它的集合的补，即运算 $-A$。[1]

67 我们不像前面那样把 Ω 的子集与 Ω 中的性质联系起来，我们可以将其与有关 Ω 的一个元素的所有可能的信息体联系起来。关于 Ω 中的一个元素，没有这些信息体，这一元素就会被忽略。事实上，任何此类信息等于断言 Ω 的这一未知元素具有某种特定的性质。Ω 中具有这一性质的元素的集合等价地描述了这一性质。也就是说，给定的信息缩小了 Ω 的这一未知元素的可能范围。

尤其要看到，空集⊖对应着一个不可能出现的性质，即荒谬的信息。两个不相交的集合对应着两个不相容的性质，即两个相互排斥的信息体。

8.4.2 现在，让我们把注意力转向分拆。

用我们现在的术语重新考虑并重新表述 8.3.1 中的

① 关于集合论与形式逻辑之间的关系见前面引用过的伯克霍夫的著作，第 VIII 章。——66，①

定义(8:B:a)和(8:B:b)。我们看到:一个分拆是——有关 Ω 的一个未知元素的——一个两两相互排斥的信息系,其中的每一个都不是谬论。换句话说:一个分拆是一项预先声明,它表明,在以后的讨论中,有关 Ω 的某一元素有多少信息将会被给出。也就是说,以后关于这一元素的可能范围将在多大程度上被缩小。但是,实际信息并不由分拆给出,那样等于选择这一分拆的一个元素,因为这样一个元素是 Ω 的一个子集,即实际信息。

因此,我们能够说,Ω 中的一个分拆是一个**信息模式**。至于 Ω 的子集,我们在 8.4.1 中看到,它们对应着一定的信息。为了避免与分拆中使用的这个词混淆,对于 Ω 的子集,我们使用**实际信息**一词。

然后,让我们考虑 8.3.1 中的定义(8:B:c),并将其与我们现在的术语联系起来。这表示,对于 Ω 中的两个分拆 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$,$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆:这等于断定,$\mathscr{A}$ 所指信息包含 $\mathscr{B}$ 所指全部信息(且可能更多);也就是说,信息模式 $\mathscr{A}$ 包含信息模式 $\mathscr{B}$。

这些说明使得 8.3.2 中图 4 至图 9 的意义更为明确了。尤其是,图 9 的树形描述了一个不断增加的信息模式序列。

9. 博弈的集合论描述

9.1　描述一个博弈的分拆

9.1.1　如我们在前面说明过的那样,我们可以假设

动作的个数是固定的。这个数记为 ν，且动作本身记为 $\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_\nu$。

考虑博弈 Γ 的所有可能的实际博弈，并以它们为元素建立集合 Ω。如果我们使用上一节中的描述，那么，所有
68 可能的实际博弈简单地说就是所有可能的序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$。[①] 只有有限个这样的序列[②]，因此 Ω 是一个有限集。

然而，我们还可以更直接地建立 Ω。例如，我们可以通过把每一局博弈描述为 $\nu+1$ 个相继出现的位置的序列，它们出现于博弈进程。[③] 当然，一般来说，一个给定的位置之后不会随意紧跟着一个位置，在某一给定时刻，可能的位置受到先前的位置的约束，其方式必须由博弈规则明确描述。[④] 由于我们关于博弈规则的描述是从建立 Ω 开始的，我们不想让 Ω 本身如此严重地依赖于这些规则的详细细节。所以，我们看到，没有理由反对把荒谬的位置序列[⑤]也包括在 Ω 之中。因此，即便令 Ω 包含任何 $\nu+1$ 个相继位置组成的序列，不加任何限制，也完全可以接受。

我们将在下面的描述中说明，真正可能的实际博弈是如何从这一浩如烟海的集合 Ω 中选择出来的。

---

① 尤其见 6.2.2。$\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的取值范围是第 59 页脚注②中描述过的。——68,①

② 借助上面提到的脚注中的方法可直接验证这一点。——68,②

③ $\mathcal{M}_1$ 之前，$\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 之间，$\mathcal{M}_2$ 与 $\mathcal{M}_3$ 之间，$\cdots$，$\mathcal{M}_{\nu-1}$ 与 $\mathcal{M}_\nu$ 之间，$\mathcal{M}_\nu$ 之后。——68,③

④ 正如第 59 页脚注②中描述的那样，这与序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 的发展类似。——68,④

⑤ 即最终将发现是详细阐述的博弈规则所不允许的位置。——68,⑤

9.1.2　给定 ν 和 Ω，我们进入博弈进程的较为复杂的细节。

考虑这一进程中的一个确定的时刻，如紧挨着动作 M_κ 之前的那一时刻。在这一时刻，如下一般规定必定由博弈规则给出：

首先必须描述的是，在多大程度上，作为动作 M_κ 的预备的事件[①]已经决定了博弈的进程。这些事件中的每一个具体序列把集合 Ω 缩小为一个子集 A_κ：这是来自 Ω 的这样一些实际博弈的集合，至 M_κ，它的进程是上述具体事件序列。用我们原来的术语说，正如 9.1.1 中指出的那样，Ω 是所有序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的集合；那么，A_κ 则是这样一些序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的集合，其前面 $\kappa-1$ 项已经被赋予了数值 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$（见上面脚注⑥）。不过，从我们目前更为广阔的视角来看，我们只需说，A_κ 必定是 Ω 的一个子集。

一个博弈进行到 M_κ 的各种可能进程必定由不同的集合 A_κ 来描述。任何两个这样的进程，如果它们是互不相同的，就会给出两个完全不相交的实际博弈集合。也就是说，不存在一个实际博弈能够立即从 M_κ 开始而其前面的进程可以是两者中的任何一个。这意味着任何两个不同的集合 A_κ 必定是互不相交的。

因此，至 M_κ，我们的博弈的所有能够想像到的博弈进 69
程的结果由 Ω 的一族两两不相交的子集来描述。我们记这个族为 $\mathscr{A}_\kappa$。

---

① 即与先前动作 $M_1,\cdots,M_{\kappa-1}$ 联系着的选择，即 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值。——68，⑥

包含在 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的所有 A_κ 的并集必定包含所有可能的实际博弈。但是，由于我们明确允许 Ω 的一个多余部分（见9.1.1）存在，这个并集未必等于 Ω。总之：

(9:A)　　$\mathscr{A}_\kappa$ 是 Ω 的一个分拆。

我们还能够说，分拆 $\mathscr{A}_\kappa$ 描述了一个人的信息模式，这个人知道至 M_κ 为止已经发生的一切[①]，一个监督博弈进程的裁判就是这样的例子。[②]

9.1.3　第二，我们必须知道 M_κ 的性质。这是由6.2.1中的 k_κ 表达的：如果这一动作是一个个人动作，那么，$k_\kappa = 1, \cdots, n$；如果这个动作是一个机会，那么，$k_\kappa = 0$。k_κ 也许依赖于至 M_κ 为止的博弈进程，即依赖于 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的信息。[③] 这意味着，在 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的每一个集合 A_κ 之内，k_κ 必定是一个常数，但它会随着 A_κ 的改变而变化。

相应地，我们可以对每一个 $k, k = 1, \cdots, n$ 建立一个集合 $B_\kappa(k)$，它包含所有的集合 $A_\kappa, k_\kappa = k$，不同的 $B_\kappa(k)$ 是不相交的。因此，$B_\kappa(k), k = 1, \cdots, n$，形成 Ω 的一个不相交子集族。我们记这个族为 $\mathscr{B}_\kappa$。

(9:B)　　$\mathscr{B}_\kappa$ 也是 Ω 中的一个分拆。由于 $\mathscr{A}_\kappa$ 的每一个 A_κ 是 $\mathscr{B}_\kappa$ 中的某个 $B_\kappa(k)$ 的子集，$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{B}_\kappa$ 的一个子分拆。

---

① 即与动作 $M_1, \cdots, M_{\kappa-1}$ 联系着的所有选择结果。用我们早一些的术语说：$\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 的取值。——69，①

② 引入这样一个人是必要的，原因在于，一般来说，没有一个玩家拥有 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的全部信息。——69，②

③ 用7.2.1中的符号，在上一脚注的意义上说：$k_\kappa = k_\kappa(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1})$。——69，③

具体枚举 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的 A_κ 的机会是不存在的，$\mathscr{B}_\kappa$ 却不同。$\mathscr{B}_\kappa$ 严格地由 $n+1$ 个集合 $B_\kappa(k)$ 组成，$k=0,1,\cdots,n$。按 $k=0,1,\cdots,n$，它们以一个固定的枚举方式出现。[1] 而且这一枚举是基本的，因为它取代了函数 k_κ（见上面的脚注③）。

9.1.4 第三，与动作 M_κ 联系着的选择发生的条件必须得到详细描述。

首先，假设 M_κ 是一个机会动作，即我们在集合 $B_\kappa(0)$ 之内，那么，有明显意义的量是：备择的个数 α_κ 及其出现的概率 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$（见 6.2.1）。正如 7.1.1 中指出的那样（即 70
那里讨论的第二项），所有这些量可能依赖于 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的所有信息（见第 69 页脚注③），因为此时的 M_κ 是一个机会动作。也就是说，在 $\mathscr{A}_\kappa$ 的每一集合 A_κ 内，α_κ 和 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$ 必须是常数[2]，但它们随 A_κ 的改变而变化。

在这些 A_κ 中的每一个之内，选择从备择 $A_\kappa(1),\cdots,A_\kappa(\alpha_\kappa)$ 中做出，即选择一个 σ_κ，$\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$（见 6.2.2）。这可以通过如下方式来描述：指定 A_κ 的 α_κ 个不相交的子集，这些子集对应着 A_κ 所表达的约束；再加上已经发生的 σ_κ 的选择。我们记这些集合为 C_κ，它们的系记为 $\mathscr{C}_\kappa(0)$，$\mathscr{C}_\kappa(0)$ 由所有的 $C_\kappa(0)$ 组成，而每一个 C_κ 是 $B_\kappa(0)$ 的一个

---

① 因此，$\mathscr{B}_\kappa$ 实际上不是一个集合，也不是一个分拆，而是一个更微妙的概念：以这种枚举方式，它是 $B_\kappa(k)$，$k=0,1,\cdots,n$ 的集合。

然而，它具有 8.3.1 中的性质（8:B:a）和（8:B:b），而这些性质是描述一个分拆的性质。不过，即使是在那里，我们也必须允许一个例外：集合 $\mathscr{B}_\kappa$ 中能够有空集。——69，④

② 我们在 $B_\kappa(0)$ 内，因此所有这些仅指同时是 $B_\kappa(0)$ 的子集的那些 A_κ。——70，①

子集。因此，$\mathscr{C}_\kappa(0)$是$B_\kappa(0)$的一个分拆。又由于$\mathscr{C}_\kappa(0)$中每个C_κ也是$\mathscr{A}_\kappa$中的某个A_κ的子集，从而$\mathscr{C}_\kappa(0)$是$\mathscr{A}_\kappa$的一个子分拆。

α_κ由$\mathscr{C}_\kappa(0)$决定。[①] 因此，我们不必再更多地提到它们。关于$p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$，这一描述本身意味着：$\mathscr{C}_\kappa(0)$中每一个$C_\kappa$都必须联系着一个数$p_\kappa(C_\kappa)$（它的概率），其性质与第50页脚注②中概率的性质相同。[②]

9.1.5 其次，假如M_κ是一个个人动作，如第k个玩家的动作，$k=1,\cdots,n$，即我们在集合$B_\kappa(k)$内。在这种情况下，我们必须指定玩家k在M_κ的信息状况。在6.3.1中，这是由集合A_κ描述的，在7.2.1中，它是由函数族Φ描述的，后者是更为一般和最终的形式。根据这一描述，k在M_κ时知道所有函数Φ中$h(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$的取值，且仅仅知道这些。这一信息量把$B_\kappa(k)$剖分为若干不相交的子集，对应着$k$在$M_\kappa$时的各种可能的信息内容。我们记这些集合为$D_\kappa$，它们的系记为$\mathscr{D}_\kappa(k)$。因此，$\mathscr{D}_\kappa(k)$是$B_\kappa(k)$的一个分拆。

k在M_κ时的信息当然是此时存在着的总信息的一部分，而此时的总信息量包含在9.1.2中的$\mathscr{A}_\kappa$之中。因此，$\mathscr{A}_\kappa$的一个A_κ是$B_\kappa(k)$的一个子集，A_κ中不存在任何含糊性，即这个A_κ不可能与$\mathscr{A}_\kappa$中两个或两个以上的D_κ有共同元素。这意味着问题中的A_κ必定是$\mathscr{D}_\kappa$中某个D_κ的一个子

① α_κ是$\mathscr{C}_\kappa(0)$中C_κ的个数，这些C_κ是给定的A_κ的子集。——70，②

② 即每一个$p_\kappa(C_\kappa)\geq 0$，且对于每一个A_κ和$\mathscr{C}_\kappa(0)$中同时是A_κ的子集的C_κ的并，$\sum p_\kappa(C_\kappa)=1$。——70，③

集。换句话说，在 $B_\kappa(k)$ 内，$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

实际上，在 M_κ 时，这一博弈的进程已经被限制于 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个集合 A_κ 之内。但是玩家 k 并不知道那么多：对他来说，这一博弈也就是在 $\mathscr{D}_\kappa$ 中的一个子集 D_κ 之内。现在，他必须在备择 $A_\kappa(1),\cdots,A_\kappa(\alpha_\kappa)$ 中做出选择，即从 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中选择 σ_κ 的一个取值。正如我们在 7.1.2 和 7.2.1（尤其是 7.2.1 末尾）指出的那样，α_κ 也许是可变的，但它只能依赖于 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 包含的信息。也就是说，如果我们把自己限制在 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个集合 D_κ 之内，它必须在 D_κ 内是一个常数。因此，σ_κ 的选择能够通过指定 D_κ 的 α_κ 个不相交的子集来描述，它们对应着由 D_κ 所表达的约 71
束，再加上已经做出的 σ_κ 的选择。我们记这些集合为 C_κ，记它们的系为 $\mathscr{C}_\kappa(k)$，它由 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中所有 D_κ 内的 C_κ 组成。而且，由于 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 的每一个 C_κ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中某个 D_κ 的子集，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

α_κ 由 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 决定①，因此，我们不必更多地提到它们。α_κ 绝不能够是零，即给定 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中的一个 D_κ，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中是 D_κ 的子集的某些 C_κ 必须存在。②

9.2　分拆及其性质讨论

9.2.1　在上一节中，我们已经完全地描述了动作 M_κ

---

① α_κ 是 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中属于给定的 A_κ 的子集的那些 C_κ 的个数。——71，①

② 我们只对 $k=1,\cdots,n$ 要求这一点。对于 $k=0$，存在着 $B_\kappa(0)$ 的一个子集 A_κ 取代 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中的 D_κ。但是，对于这种情况来说，α_κ 不等于零是不必说的事情，因为它是第 70 页脚注③中的一个序列，如果不存在我们想要的 C_κ，$\sum p_\kappa(C_\kappa)$ 就会等于 0 而不是 1。——71，②

之前那一时刻的情况。接下来，我们要讨论的是，顺着动作 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 继续下去，什么事情将会发生呢？为了方便，我们增加一个 κ 的取值，即 $\kappa=\nu+1$，它对应着博弈的结束，即它紧随着最后一个动作 M_ν。

正如我们在上一节中讨论的那样，对于 $\kappa=1,\cdots,\nu$，我们有如下分拆：

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_\kappa,\mathscr{B}_\kappa=[&B_\kappa(0),B_\kappa(1),\cdots,B_\kappa(n)],\\&\mathscr{C}_\kappa(0),\mathscr{C}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{C}_\kappa(n),\\&\mathscr{D}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{D}_\kappa(n)\end{aligned}$$

除了 $\mathscr{A}_\kappa$ 之外，它们涉及动作 M_κ，因此对于 $\kappa=\nu+1$，它们不必且不能被界定。不过，正如我们在 9.1.2 中讨论的那样，$\mathscr{A}_{\nu+1}$ 是有意义的：它代表着有关一次博弈的能够想到的全部信息，即该次博弈本身。①

这里，我们想到两点说明：从上面的结果的意义上说，$\mathscr{A}_1$ 对应着一个任何信息都得不到的时刻。因此，$\mathscr{A}_1$ 应该由集合 W 组成。另一方面，$\mathscr{A}_{\nu+1}$ 对应着实际认清已经发生的该博弈的可能性。因此，$\mathscr{A}_{\nu+1}$ 是一元集的一个系。

接下来，我们描述从 κ 到 $\kappa+1$ 的过渡，$\kappa=1,\cdots,\nu$。

9.2.2 当 κ 被 $\kappa+1$ 取代时，$\mathscr{B}_\kappa$、$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 和 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的变化没有什么可说的。我们前面的讨论已经表明，当这一替换做出时，任何事情都可能发生在它们之中。

不过，指出如何从 $\mathscr{A}_\kappa$ 得到 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 还是可能的。

---

① 从第 69 页脚注①意义上说，$\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的所有取值。而且，正如我们在 6.2.2 中指出的那样，序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 描述该博弈本身。——71，③

$\mathscr{A}_{\kappa+1}$中的信息等于 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的信息加上与动作 M_κ 有关的选择的结果[①]，从 9.1.2 中的讨论来看，这应该是清楚的。因此，$\mathscr{A}_{\kappa+1}$中的信息比 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的信息多出来的部分正是 $\mathscr{C}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{C}_\kappa(n)$中包含的信息。 72

这意味着，我们可以通过把分拆 $\mathscr{A}_\kappa$ 与所有分拆 $\mathscr{C}_\kappa(0),\mathscr{C}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{C}_\kappa(k)$叠置且丢掉空集而得到分拆 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$。

如上一节中讨论的那样，由于 $\mathscr{A}_\kappa$ 与 $B_\kappa(k)$的关系以及 $\mathscr{C}_\kappa(k)$与 $B_\kappa(k)$的关系，关于这一叠置过程，我们有更多能够说的东西。

在 $B_\kappa(0)$内，$\mathscr{C}_\kappa(0)$是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆（见 9.1.4 中的讨论）。因此，$\mathscr{A}_{\kappa+1}$与 $\mathscr{C}_\kappa(0)$重合。在 $B_\kappa(k)$中，$k=1,\cdots,n$，$\mathscr{C}_\kappa(k)$和 $\mathscr{A}_\kappa$ 都是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$的子分拆（见 9.1.5 中的讨论）。因此，$\mathscr{A}_\kappa$ 以如下方式得到：首先取 $\mathscr{D}_\kappa(k)$中的每一个 D_κ，然后对每一个这样的 D_κ，取 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是这一 D_κ 的子集的所有 A_κ 和 $\mathscr{C}_\kappa(k)$中同时是这一 D_κ 的子集的所有 C_κ，并形成交集 $A_\kappa\cap C_\kappa$。

每一个集合 $A_\kappa\cap C_\kappa$ 代表这样一些博弈，这些博弈产生于第 k 个玩家在动作 M_κ 做出选择 C_κ 的时候，不过玩家 k 面对的是 D_κ 中的信息，而其所处情况其实是 A_κ（D_κ 的一个子集）中的情况，以至把事情限制为 C_κ。

根据我们前面的讨论，这一选择是可能的，所以存在着这样的博弈。也就是说，集合 $A_\kappa\cap C_\kappa$ 必定不是空集。我们重述如下：

(9:C)　　如果 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的 A_κ 和 $\mathscr{C}_\kappa(k)$中的 C_κ 是 $\mathscr{D}_\kappa$ 中同一

---

① 用我们早先的术语说：σ_κ 的取值。——71，④

D_K 的子集,那么,$A_K \cap C_K$ 必定不是空集。

9.2.3 存在着这样的博弈,其中,一个人被引诱而置这一条件于不顾。这些博弈是这样一些博弈,其中,一个玩家可以做出一个合理的选择,而这一选择随后成了一个被禁止的选择。例如,第58页脚注①中提到的克里斯皮尔棋:其中,一个玩家能够在自己的棋盘上做出一个明显是可能的选择("动作"),只是后来才(有可能)被"裁判"告知那是一个"不可能的"选择。

然而,这是一个伪造的例子。问题中的动作最好被分解为若干动作形成的一个序列,最好还是给出经过深思熟虑的克里斯皮尔棋规则。

这种博弈由一个动作序列组成。在每一动作时,"裁判"向两位玩家声明上一动作是否是"可能的"动作。如果它不是,像上一动作那样,下一动作是同一玩家的个人动作。如果它是,那么,下一动作是另一个玩家的个人动作。在每一动作,玩家被告知此前他的所有动作、两位玩家此前所有选择的"可能性"或"不可能性"的整个序列,以及此前玩家遭受的有威胁的"将军"或被吃掉的棋子的情况。但他仅仅知道他自己的损失。否则,这一博弈就像国际象棋了,有一个第50页脚注③意义
73 上的停止规则,且进一步增强为,一个玩家不可以在其不中断的个人动作序列中两次做出("尝试")同一选择。(实际中,玩家自然需要两个棋盘,它们都不在其视野之内,但都在"裁判"的视野之内,这样才能满足这些信息条件。)

无论如何,我们都将坚持上述条件。你将会看到,这

样做十分便于我们后面的讨论(见 11.2.1)。

9.2.4 最后,用我们新的术语说,对玩家 k,我们再次引入 6.2.2 中的量 $J_k, k=1,\cdots,n$。J_k 是玩家 k 的结果。J_k 必定是已经发生的这一实际博弈的一个函数。[①] 如果我们用符号 π 记这一博弈,那么,我们可以说:J_k 是变量 π 的函数,π 的变动范围是 Ω。也就是说:

$$J_k = J_k(\pi), \qquad \pi \text{ 属于 } \Omega, \qquad k=1,\cdots,n。$$

10. 公理化描述

10.1 公理及其解释

10.1.1 现在,我们已经完成了用集合和分拆这一新技术描述一般博弈的概念。全部结构和定义已经在过去的几节中得到了充分的阐释,因此我们现在能够给一个博弈下一个严格的公理化定义。这当然是我们在前面几节中进行的广泛讨论的精确重述。

首先,我们不加任何评论地给出精确定义:[②]

(10:A:a)　　一个数 ν。

(10:A:b)　　一个有限集 Ω。

(10:A:c)　　对于每一个 $k=1,\cdots,n$:一个函数

$$J_k = J_k(\pi), \qquad \pi \text{ 属于 } \Omega。$$

---

① 用我们原来的术语说,我们有 $J_k = J_k(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)$。见 6.2.2。——73,①

② 其"解释"见 10.1.1 末尾和 10.1.2 中的讨论。——73,②

(10:A:d)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu,\nu+1$:$\Omega$ 的一个分拆 $\mathscr{A}_\kappa$。

(10:A:e)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$:Ω 的一个分拆 $\mathscr{B}_\kappa$。$\mathscr{B}_\kappa$ 由 $n+1$ 个集合 $B_\kappa(k)$ 组成,$k=1,\cdots,n$,并以此方式枚举。

(10:A:f)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和每一个 $k=0,1,\cdots,n$:$B_\kappa(k)$ 中的一个分拆 $\mathscr{C}_\kappa(k)$。

(10:A:g)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和每一个 $k=1,\cdots,n$:$B_\kappa(k)$ 中的一个分拆 $\mathscr{D}_\kappa(k)$。

(10:A:h)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{C}(0)$ 中每一个 C_κ:一个数 $p_\kappa(C_k)$。

这些东西必须满足如下性质:

(10:1:a)　　$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{B}_\kappa$ 的一个子分拆。

(10:1:b)　　$\mathscr{C}_\kappa(0)$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆。

(10:1:c)　　对于 $k=1,\cdots,n$:$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

(10:1:d)　　对于 $k=1,\cdots,n$:在 B_κ 之内,$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $D_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

74 (10:1:e)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的子集的每一个 A_κ:对于 $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 中同时是这个 A_κ 的子集的所有 C_κ,$p_\kappa(C_\kappa)\geqq 0$,且它们的和 $\sum p_\kappa(C_\kappa)=1$。

(10:1:f)　　$\mathscr{A}_1$ 由 Ω 这一个集合组成。

(10:1:g)　　$\mathscr{A}_{\nu+1}$ 由一个一元集组成。

(10:1:h)　　对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$:$\mathscr{A}_\kappa$ 得自 $\mathscr{A}_\kappa$ 与所有 $\mathscr{C}_\kappa(k)$,$k=0,1,\cdots,n$ 的叠置(详情

见 9.2.2)。

(10:1:i)　　对于 $\kappa=1,\cdots,\nu$:如果 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的 A_κ 和 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中的 $C_k,k=1,\cdots,n$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中同一 D_κ 的子集,那么,$A_\kappa \cap C_\kappa$ 必定不是空集。

(10:1:j)　　对于 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $k=1,\cdots,n$,以及 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中的每一个 D_κ:$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中必定存在某个 $C_\kappa(k)$ 是 D_κ 的子集。

我们应该本着现代公理化方法的精神来看待这一定义。我们甚至避开了给(10:A:a)—(10:A:h)中引入的这些数学概念命名,以免名称的字面意义暗示任何意义。由于这一绝对的"纯粹性",这些概念能够成为严格数学研究的对象。①

这一程序最适合建立严格定义的概念。严格分析完成之后,再将其运用于特定的符合直觉的东西。关于这一点,也可见第 1 章 4.1.3 中关于模型在物理学中发挥的作用的讨论:有关一个直觉的系统的公理化模型类似于(同样直觉的)物理系统的数学模型。

只要理解了这一点,提倡公理化就是无害的,因为这一公理化定义是此前的详细经验讨论的提炼。而且,如果我们给引入的概念以适当的名字,最大程度地提示其直觉

---

① 这类似于逻辑学、几何学等学科中表现出来的公理化态度。因此,在公理化的几何学中,已经成了惯例的是,点、线和面的概念并非某种符合直觉的先验的东西,它们只不过是符号,是具有公理中假设的性质的东西的符号。见希尔伯特(D. Hilbert):*Die Grundlagen der Geometrie*,莱比锡,1899;英文第二版,芝加哥,1910。——74,①

背景，这将有利于其使用，使其结构更易于理解。基于这种精神，说明我们的假设(10:1:a)—(10:1:j)的“含义”——即其产生的直觉背景——也是有益的。

所有这些自然是前面几节中的直观理由的准确概括。

10.1.2 我们首先说明 10.1.1 中(10:A:a)—(10:A:h)的概念的技术名称。

75 (10:A:a*) ν 是博弈 Γ 的长度。

(10:A:b*) Ω 是 Γ 的所有博弈的集合。

(10:A:c*) $J_\kappa(\pi)$ 是玩家 k 在博弈 π 中的结果。

(10:A:d*) $\mathscr{A}_\kappa$ 是裁判的信息模式，$\mathscr{A}_\kappa$ 的一个 A_κ 是该裁判在动作 M_κ 时的实际信息。($\kappa=\nu+1$：博弈结束的时刻。)

(10:A:e*) $\mathscr{B}_\kappa$ 是动作 M_κ 的指派模式，$\mathscr{B}_\kappa$ 的一个 $B_\kappa(k)$ 是动作 M_κ 的实际指派。

(10:A:f*) $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是选择模式，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 的一个 C_κ 是玩家 k 在动作 M_κ 的实际选择。($\kappa=0$：由机会决定。)

(10:A:g*) $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 是玩家 k 的信息模式，$\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个 D_κ 是玩家 k 在动作 M_κ 时的实际信息。

(10:A:h*) $p_\kappa(C_\kappa)$ 是在(机会)动作 M_κ 时实际选择 C_κ 的概率。

接下来，如 10.1.1 的总结中所说的那样，我们用上述专门术语来阐述条件(10:1:a)—(10:1:j)的“含义”。

(10:1:a*) 动作 M_κ 时，裁判的信息模式包含这一动作的指派。

(10:1:b*)　一个机会动作 M_κ 时的选择模式包含裁判在此时的信息模式。

(10:1:c*)　玩家 k 的个人动作 M_κ 时的选择模式包括玩家 k 此时的信息模式。

(10:1:d*)　在动作 M_κ,在这一动作是玩家 k 的一个个人动作的程度上,裁判的信息模式包含 k 在这一动作时的信息模式。

(10:1:e*)　在机会动作 M_κ,各个备择出现的概率如同不相交而穷尽的一组备择的概率。

(10:1:f*)　在第一个动作时,裁判的信息是空的。

(10:1:g*)　在博弈结束时,裁判的信息模式决定整个博弈。

(10:1:h*)　在动作 $M_{\kappa+1}$ 时,裁判的信息模式得自动作 M_κ($\kappa=\nu$:博弈结束)时的信息模式与动作 M_κ 时做出的选择的叠置。

(10:1:i*)　设动作 M_κ 是一个给定的动作,它是玩家 k 的一个个人动作,玩家 k 在这一动作时的实际信息也是给定的。如果裁判在这一动作的实际信息和玩家 k 在这一动作的实际选择都在这一实际信息之内(即它的提炼),那么,它们是相容的,即它们在实际博弈中出现。

(10:1:j*)　设给定动作 M_κ,玩家 k 的一个个人动 76
作,且玩家 k 在动作 M_κ 的任何实际信息也是给定的,那么,玩家 k 能够实际有的备择个数不是 0。

这概括了我们对一个博弈的一般方案的公式化描述。

10.2 公理的逻辑讨论

10.2 我们尚未讨论形式逻辑中有关每一公理化体系的一些传统问题：公理的一致性、完全性和独立性。[①]我们的体系有上述性质中的第一和最后一个，而不具有第二个。这些事实是容易证明的，而且，不难看出，情况本来就应该是这样。总之：

一致性：博弈的存在性是毫无疑问的，我们只不过给出了其严格形式。随后我们将详细讨论几个博弈的形式化（见 18.19 中的例子）。从严格数学（逻辑学）角度看，哪怕是最简单的博弈，也能够用来建立一致性。不过，我们真正感兴趣的自然是较为复杂的博弈，它们才是真正有意义的。[②]

完全性：这一点不成立，因为存在着很多不同的博弈满足这些公理。关于一些有说服力的例子，见上面的参考文献。

读者将会看到，在这种情况下，我们并不刻意追求完全性，因为我们的公理必须界定一类实体（博弈），而不是

---

① 见希尔伯特（同上）；凡贝仑（O. Veblen）和扬（J. W. Young）：《射影几何》，纽约，1910；外尔（H. Weyl）：Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, in *Handbuch der Philosophie*，慕尼黑，1927。——76，①

② 一个最简单的博弈是：$\nu=0$，Ω 只有一个元素，如 π_0。因此，不存在 $\mathscr{B}_\kappa$，$\mathscr{C}_\kappa(k)$，$\mathscr{D}_\kappa(k)$，惟有的一个 $\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{A}_1$，它由 Ω 一个元素组成。令 $J(\pi_0)=0$，$k=1,\cdots,n$。这一博弈的一个明显的描述是，没有人做任何事情且什么事情也不发生。这还表明，在这种情况下，一致性不是一个有意义的问题。——76，②

惟一一个实体。[①]

独立性：这容易建立，不过我们不在这里讨论它。

10.3　关于公理的一般说明

10.3　关于这一公理化，尚有两点应该说明：

首先，我们遵循了经典的过程以实现直觉上——经验上——给定的想法进行严格的形式化描述。实际上，博弈的概念以一种令人满意的形式存在于一般经验之中，不过，它过于松散而不适于严格研究。追随我们至此的读者将会看到这种不精确性如何被消除，“模糊区域”如何逐渐变小，一个精确的描述如何逐步形成。 77

其次，我们希望这也是有关如下有众多争议的命题的一个正面例子：即对人类行为进行数学描述和讨论是可能的，虽然人类行为中强调的是心理方面。在这种情况下，心理因素是以如下方式被考虑进去的，即对决策、决策所依赖的信息以及（不同动作的）此类信息集合之相互关联性进行必要的分析。这一关联性源于随时出现的各种信息集合之间的联系以及玩家们相互之间的投机性假设。

当然，有很多重要的心理方面是我们从未触及过的，但也存在着这样一个事实，即一组基本的心理现象已经被公理化了。

---

① 在实现公理化的一般逻辑方法中，这是一个重要特点。因此，欧几里得几何的公理描述惟一一个对象——而数学中的群论的公理或物理学中有理力学的公理就不是这样，因为存在着很多不同的群和很多不同的力学体系。——76，③

10.4 图示

10.4.1 我们不得不使用多个分拆来表示一个博弈。这些分拆的图示并不容易。我们将试图系统地处理这一问题：即便是相对简单的博弈似乎也会导致复杂而混乱的图形，这样就失去了图形表示常有的优点。

然而，我们有可能对图形表示做出一些限制。我们将对其进行一些说明。

首先，根据 10.1.1 中的(10:1:h)或 10.1.2 中的(10:1:h*)(即回忆其"含义")，$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆。也就是说，在分拆序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 中，每一个都是上一个的一个子分拆。因此，这可以用8.3.2 中的图9，即树形来表示。(图 9 并不是典型的：因为博弈 Γ 的长度是固定的，树的每一个枝都必须伸展到其充分高度。见10.4.2中图 10。)我们并不试图把 $B_\kappa(k)$、$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 和 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 添加到这个图中。

存在着这样一类博弈，其中，序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_\nu,\mathscr{A}_{\nu+1}$ 描述了整个博弈进程。这是我们在 6.4.1 中讨论过的一类重要博弈，其中预备性与先前性是等价的。我们将在第 3 章 15 节中对其进行更多讨论。在我们目前的形式体系中，它有着简单的表示方式。

10.4.2 如我们在 6.4.1、6.4.2 和 6.4.3 中的讨论和解释所表明的那样，当且仅当每位玩家在做出一个个人动作时知道该博弈的全部历史，预备性与先前性才是等价的。假设这个玩家是第 k 个玩家，此时的动作是 M_κ。M_κ 是 k 的个人动作的断言意味着，我们在 $B_\kappa(k)$ 之

内。因此，这一断言是说，在 $B_\kappa(k)$ 内，玩家 k 的信息模式与裁判的信息模式重合。也就是说，$\mathscr{D}_\kappa(k)$ 在 $B_\kappa(k)$ 内等于 $\mathscr{A}_\kappa$。但是，$\mathscr{D}_\kappa(k)$ 是 $B_\kappa(k)$ 中的一个子分拆，因此，上述说法意味着 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 落在 $\mathscr{B}_\kappa(k)$ 中的那一部分。 78

我们将这一点重述为：

(10:B)　当且仅当 $\mathscr{D}_\kappa$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 落入 B_κ 之内的那一部分时，预备性与先前性重合，即每位玩家在做出一个个人动作时完全知道这一博弈的整个历史。

如果情况是这样的，那么，我们能够说，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 现在必定是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆，理由是：10.1.1 中的(10:1:c)和(10:B)。对于个人动作，即 $k=1,\cdots,n$，这一点成立，不过，对于 $k=0$，从 10.1.1 中的(10:1:b)可直接得出这一结果。现在，10.1.1 中的(10:1:h)允许从这一结果推断出如下结论(细节见 9.2.2)：$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 与 $B_\kappa(k)$ 中的 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 重合，$k=0,1,\cdots,n$。(我们本来能够利用 10.1.2 中相应的结论，即这些概念的“含义”。我们把这一观点的文字表达留给读者。)不过，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $B_\kappa(k)$ 的一个子分拆，因此上述说法意味着，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 正是 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 落在 $B_\kappa(k)$ 内那一个部分。

我们将这一点重述为：

(10:C)　如果条件(10:B)得到满足，那么，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 落在 $B_\kappa(k)$ 内的那一部分。

因此，当预备性与先前性一致的时候，那么，在我们目前的形式体系中，对于每一个 $\kappa=0,1,\cdots,\nu$，序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,$

79 $\mathscr{A}_\nu,\mathscr{A}_{\nu+1}$和 $B_k,k=1,\cdots,n$ 完全描述该博弈。也就是说，8.3.2 中图 9 中的图形必须惟一地通过如下方法来加强，即把每一个 $\mathscr{A}_\kappa$ 中属于同一集合 $\mathscr{B}_\kappa(k)$ 的那些元素围在一起（见 10.4.1 中的说明）。我们可以用一条线将它们圈起来，在这条线上写上 $B_\kappa(k)$ 的号码 k。空的 $B_\kappa(k)$ 能够被忽略。图 10 是一个 $\nu=5,n=3$ 的例子。

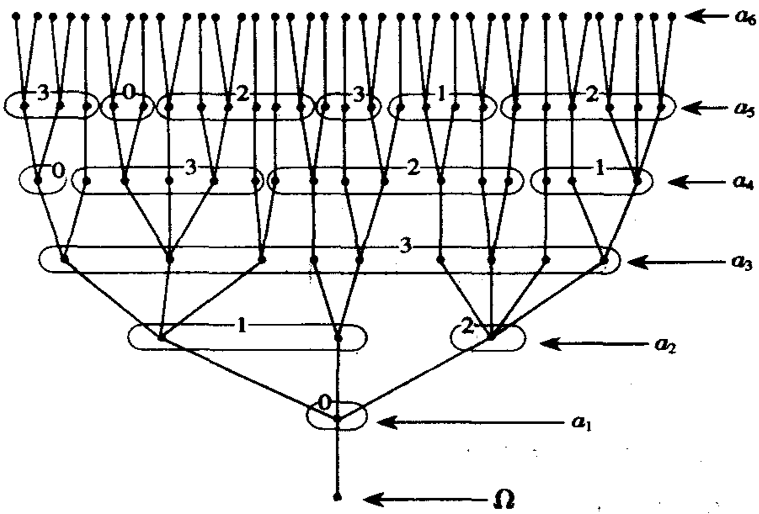


图 10

很多这类博弈中，甚至这一额外工具也是不必要的，因为对于每一个 κ，只有一个 $B_\kappa(k)$ 不是空集。也就是说，每一个动作的特征独立于此前的博弈进程。[①] 所以，在每一个 $\mathscr{A}_\kappa$，指出动作 M_κ 的特征，即惟一一个 $B_\kappa(k)\neq\ominus$，$k=0,1,2,\cdots,n$ 也就足够了。

---

① 国际象棋就是这样。巴加门的规则允许两种方式的解释。——79，①

11. 策略和博弈描述的最终简化

11.1 策略的概念及其形式化描述

11.1.1 让我们回到博弈 Γ 的一个实际博弈过程 π。

动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 按照 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 的顺序发生。在每一个动作 $\mathcal{M}_\kappa$,一个选择被做出。如果这一博弈属于 $B_\kappa(0)$,那么,按机会做出选择;如果这一博弈属于 $B_\kappa(k)$,则由玩家 k 做出,$k=1,\cdots,n$。选择就是从 $\mathscr{C}_\kappa(k)$($k=0$ 或 $k=1,\cdots,n$)中挑选一个 C_κ,这一博弈就被限制于 C_κ。如果这个选择是由玩家 k 做出的,那么,需要小心的是,这一玩家的信息模式应该限于此刻的 $\mathscr{D}_\kappa(k)$。(如 6.4.2 末尾的桥牌和 9.2.3 中的克里斯皮尔棋所表明的那样,这能够成为一个有着实际困难的问题。)

现在,我们设想,每一位玩家 $k=1,\cdots,n$ 并不是到了非要做出决策的时候才做出决策,而是考虑到可能出现的各种情况提前做出决策,即玩家 k 开始博弈时有一个完备的计划:视可能出现的情况以及规则允许他在此时拥有的实际信息,这一计划指定他将做出的选择。我们把这样一个计划称为**策略**。

注意,如果我们要求每位玩家在开始的时候都有这样一个完备的计划,即一个策略,我们并没有限制他的行动自由。尤其是,我们并没有因此而强制他们做出决策时所使用的信息要少于实际博弈中本来能够得到的

信息。这是因为,这里的策略只不过假设每一具体决策是实际博弈中可用于这一目的的实际信息量的函数。对于玩家来说,我们的假设带来的惟一额外负担是心智上的负担,即尽管他将仅仅经历一次博弈,但对于所有可能出现的情况,他要按照一定的行为准则做好准备。不过,在数学分析范围之内,这是一个没有害处的假设(见4.1.2)。

80 **11.1.2 博弈的机会成分能够以同样方式得到处理。**

很显然,对于机会动作来说,没有必要等到动作到来那一刻才做出相应决策。一个裁判可以提前做出所有这些决策,并在时刻到来时按照规则允许的信息量向玩家揭示结果。

的确,裁判无法提前知道哪一个动作将是机会动作,也不知道它们的概率。一般来说,这依赖于实际博弈进程。但是,就像上面考虑的策略那样,他可以为所有偶然情况做好准备:他能够提前决定,每当一个机会动作出现的时候,对于该博弈此前的每一可能进程——即对此刻每一可能的实际裁判信息,这一个机会动作中选择的结果应该是什么。在这些条件下,由规则描述的上述情况出现的概率就会充分决定下来,从而裁判能够以适当的概率为受机会影响的每一必要选择做好安排。

然后,像上面描述的那样,裁判能够在恰当的时间,以恰当的程度向玩家们公布结果。

所有能够想像出的机会动作的选择的这一预先决策被称为*裁判的选择*。

我们在上一节中看到,玩家 k 的所有个人动作的选择

被玩家 k 的策略取代是合理的。也就是说，这并不改变博弈 Γ 的基本特征。显然，所有机会动作的选择由裁判的选择取代也是这样。

11.1.3 接下来，我们要对策略的概念和裁判选择的概念进行形式化描述。前两节的定性讨论已经明确这一任务。

玩家 k 的一个策略：考虑动作 $\mathcal{M}_\kappa$。假设这是玩家 k 一个个人动作，即这一博弈在 $B_\kappa(k)$ 中。考虑玩家在此刻的一个可能的实际信息，即 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个 D_κ。那么，问题中的策略必定决定他在这一时刻的选择，即 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中同时是上述 D_κ 的一个子集的 C_κ。

形式化描述：

(11:A)　　玩家 k 的一个策略是对每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$ 和 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中每一个 D_κ 定义的函数 $\sum_k(\kappa; D_\kappa)$，而且其取值

$$\sum_k(\kappa; D_\kappa) = C_\kappa$$

总是具有如下性质：C_κ 属于 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 且是 D_κ 的一个子集。

满足上述要求的策略即函数的确存在且完全符合 10.1.1 中的假设(10:1:j)。

裁判的一个选择：　81

考虑一个动作 $\mathcal{M}_\kappa$。假设这是一个机会动作，即假设该博弈在 $B_\kappa(0)$ 中。考虑裁判在此刻的一个可能的实际信息，即考虑 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的一个子集的一个 A_κ。那么，问题中裁判的选择必定决定这一时刻的机会选择，

即 $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 中同时是 A_κ 的一个子集的一个 C_κ。

形式化描述：

(11:B) 裁判的一个选择是对每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的一个子集的每一个 A_κ 定义的一个函数 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$，而且其取值

$$\sum_0(\kappa;A_\kappa) = C_\kappa$$

总具有如下性质：C_κ 属于 $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 且是 A_κ 的一个子集。

关于裁判的选择即满足上述条件的函数 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 的存在性，见(11:A)后面的说明和第 71 页脚注②。

由于裁判选择的结果依赖于机会，相应概率必须被指定。现在，裁判的选择是相互独立的随机事件的一个综合。如 11.1.1 中描述的那样，对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的一个子集的每一个 A_κ，即对于 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 的定义域中的每一对 κ, A_κ，存在这样一个事件。一旦这一事件受到关注，具体结果 $\sum_0(\kappa;A_\kappa) = C_\kappa$ 的概率就成了 $p_\kappa(C_\kappa)$。因此，由函数 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 表示的裁判的全部选择的概率是个别概率 $p_\kappa(C_\kappa)$ 的乘积。①

形式化描述：

(11:C) 由 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 表示的**裁判的选择**的概率是概率 $p_\kappa(C_\kappa)$ 的乘积，其中 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)=C_\kappa$，且 κ，

① 这些随机事件必须被当作相互独立的事件。——81，①

A_κ 取遍 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 的定义域[见(11:B)]。

如果我们对所有(κ,A_κ)考虑 10.1.1 中的条件(10:1:e),并求它们两两之间的乘积,那么,(11:C)的概率都不小于 0,且它们的和等于 1。本来就应该是这样,因为裁判的所有选择是互不相交且穷尽的备择的一个系。

11.2 博弈描述的最终简化

11.2.1 如果玩家 $k=1,\cdots,n$ 已经采取了一个确定的策略,且裁判的选择也已经被挑选出来,那么,这些东西惟一地决定该博弈的进程及其相应结果。根据上面关于这些概念的文字描述,这一点应该是清楚的,不过一个同样简单的正式证明也是能够给出的。 82

记问题中的策略为 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$, $k=1,\cdots,n$,且裁判的选择记为 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$。我们将确定裁判在每一时刻 $\kappa=1,\cdots,\nu,\nu+1$ 的实际信息。为了避免将其与上面的变量 A_κ 混淆,我们将其记为 $\bar{A}_\kappa$。

$\bar{A}_1$ 自然等于 Ω 本身。[见 10.1.1 中的(10:1:f)。]

现在,我们考虑时刻 $\kappa,\kappa=1,\cdots,\nu$ 且假设相应的 $\bar{A}_\kappa$ 是已知的。那么,$\bar{A}_\kappa$ 恰恰是 $B_\kappa(k),k=0,1,\cdots,n$ 之一的一个子集。[见 10.1.1 中的(10:1:a)。]如果 $k=0$,那么,M_κ 是一个机会动作,且选择的结果是 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$。相应地,$\bar{A}_{\kappa+1}=\sum_0(\kappa;\bar{A}_\kappa)$。[见 10.1.1 中的(10:1:d)和 9.2.2 中的详细内容。]如果 $k=1,\cdots,n$,那么,M_κ 是玩家 k 的一个个人动作。$\bar{A}_\kappa$ 恰恰是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个 $\bar{D}_\kappa$ 的一个子集。

相应地，$\overline{\mathcal{A}}_{\kappa+1}=\overline{\mathcal{A}}\cap\sum_k(\kappa;\overline{\mathcal{D}}_\kappa)$。[见 10.1.1 中的(10:1:h)和 9.2.2 中的细节。]

因此，我们归纳性地相继确定了 $\overline{\mathcal{A}}_1,\overline{\mathcal{A}}_2,\overline{\mathcal{A}}_3,\cdots,\overline{\mathcal{A}}_\nu$，$\overline{\mathcal{A}}_{\nu+1}$，不过，$\overline{\mathcal{A}}_{\nu+1}$ 是一个一元集[见 10.1.1 中的(10:1:g)]，其惟一的一个元素记为 $\overline{\pi}$。

$\overline{\pi}$ 是实际发生的博弈。[1] 该博弈的相应结果记为 $\mathcal{J}_k(\overline{\pi})$，$k=1,\cdots,n$。

11.2.2 所有玩家的策略和裁判的选择共同决定实际博弈和每一个玩家的结果。这一事实提供了对博弈 Γ 的描述进行大幅度简化的可能性。

考虑一个既定的玩家 $k=1,\cdots,n$。建立他的所有可能的策略 $\sum_k(\kappa;\mathcal{D}_\kappa)$，或简写为 $\sum_k$。其个数虽然巨大，却是有限的。策略的个数记为 β_k，这些策略本身记为 $\sum_k^1,\cdots,\sum_k^{\beta_k}$。

类似，建立所有可能的裁判选择 $\sum_0(\kappa;\mathcal{A}_\kappa)$，或简写为 $\sum_0$。同样，它们的个数也是有限的。记这一个数为 β_0，裁判的选择本身记为 $\sum_0^1,\cdots,\sum_0^{\beta_0}$。记它们的概率分别为 $p^1,\cdots,p^{\beta_0}$。[见 11.1.3 中(11:C)。]所有这些概率 ≥ 0，且它们的和等于 1(见 11.1.3 末尾)。

有限个数的策略选择和裁判选择决定博弈 $\overline{\pi}$(见 11.2.1末尾)及其对于每一个玩家来说的结果，这些选择分别是 $\sum_\kappa^{\tau_\kappa}$，其中 $\tau_\kappa=1,\cdots,\beta_k$，$k=0,1,\cdots,n$。每个玩家

[1] $\overline{\mathcal{A}}_1,\overline{\mathcal{A}}_2,\overline{\mathcal{A}}_3,\cdots,\overline{\mathcal{A}}_\nu,\overline{\mathcal{A}}_{\nu+1}$ 归纳推导恰恰是实际博弈进程的数学模拟。读者应该验证其中所涉及的步骤的相似性。——82，①

的结果是 $\mathcal{J}_k(\pi)$，其中 $k=1,\cdots,n$。相应地，我们写

$$(11:1)\qquad \mathcal{J}_k(\pi)=\mathcal{G}_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n),\qquad k=1,\cdots,n$$

这样，整个博弈的组成部分是：每一个玩家选取的一个策略 $\sum_\kappa^{\tau_k}$，即一个数 $\tau_k=1,\cdots,\beta_k$；随机性的裁判选择，$\tau_0=1,\cdots,\beta_0$，其概率分别为 $p^1,\cdots,p^{\beta_0}$。 83

玩家 k 必须在没有有关其他玩家的策略和机会事件（裁判的选择）的信息的情况下选取他的策略，即 τ_k。之所以必须如此，原因在于，他在任意时刻能够拥有的信息已经包含在他的策略 $\sum_k=\sum_\kappa^{\tau_k}$ 之中，即函数 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$ 之中（见 11.1.1 中的讨论）。即便他对其他玩家将会采取什么样的策略有肯定看法，这些看法也必须包含在函数 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$ 之中。

11.2.3　所有这些意味着，Γ 被弄得回到了最简单的描述，即限于 6.2.1—6.3.1 中最不复杂的原始结构。我们有 $n+1$ 个动作，其中一个机会动作，每位玩家一个个人动作；每个动作有固定个数的备择，机会动作有 β_0 个备择，个人动作的备择个数则分别是 $\beta_1,\cdots,\beta_n$；而且，每个玩家必须在绝对不知道其他选择的结果的情况下做出他的选择。①

现在，我们甚至能够避免机会动作。如果玩家的选择已经发生，玩家 k 选择了 τ_κ，那么，机会动作总的影响是：对于玩家 k 来说，该博弈的结果可以是下述数字中的任何一个：

$$\mathcal{G}_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n),\qquad \tau_0=1,\cdots,\beta_0,$$

其概率分别为 $p^1,\cdots,p^{\beta_0}$。因此，他的结果的“数学期望”是

① 由于 $n+1$ 个动作的这一完全不关联性，它们的时间排列变得无关紧要的。——83，①

(11:2) $$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\sum_{\tau_0=1}^{\beta_0}p^{\tau_0}G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n)$$

这一玩家的判断必定惟一地受这一“数学期望”的指导,因为各个动作,尤其是机会动作,完全相互独立。[①] 因此,起作用的惟有玩家 $k=1,\cdots,n$ 的个人动作。

因此,最终描述是:

(11:D) n 个人的博弈 Γ,即其规则的完备体系,取决于下面数据的指定:

(11:D:a) 对于每一个 $k=1,\cdots,n$:一个数 β_k。

(11:D:b) 对于每一个 $k=1,\cdots,n$:一个函数

$$H_k=H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

$$\tau_j=1,\cdots,\beta_j \qquad j=1,\cdots,n。$$

84 该博弈的博弈进程是:

每一位玩家 k 选择一个数 $\tau_k=1,\cdots,\beta_k$。每一位玩家必须在绝对不知道其他玩家的选择的情况下做出他的选择。所有选择做出之后,它们被交给裁判,由裁判决定对于玩家 k 来说的这一博弈的结果 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。

11.3 在一个博弈的简化型中策略的作用

11.3 注意,在这一方案中,我们没有给其他类型的“策略”留下任何余地。每一位玩家有一个动作,且只有一个动作。而且,他必须在绝对不知道任何其他事情的情

---

① 我们有资格使用这一未做修正的“数学期望”,因为如 5.2.2 末尾强调的那样,我们满足简化了的效用概念。这尤其排除了那些较为复杂的“数学期望”概念,那些概念其实是试图改进那一天真的效用概念。(如贝努里的“圣彼得堡悖论”中的“道德期望”。)——83,②

况下完成这一动作。[1] 我们的问题以这一严格最终形式是我们从 11.1.1 以来有预谋地完成的。在这一过程中，从最初的动作到策略的转变得以实现。由于我们现在把策略本身当作动作来看待，更高级的策略是不必要的。

11.4　零和约束的含义

11.4　我们以确定零和博弈(见 5.2.1)在我们的最终方案中的地位来概括上面的分析。

用 10.1.1 中的术语说，博弈 Γ 是一个零和博弈意味着：

(11:3)　　对 Ω 中所有的 π，　$\sum_{k=1}^{n} J_k(\pi)=0$。

如果我们从 $J_k(\pi)$ 过渡到 11.2.2 的意义上的 $G_k(\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n)$，那么，这变成了：

(11:4)　　对所有 $\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n$，　$\sum_{k=1}^{n} G_k(\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n)=0$。

而且，如果最终引入 11.2.3 的意义上的 $H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$，我们得到：

(11:5)　　对于所有的 $\tau_1, \cdots, \tau_n$，　$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)=0$。

相反，条件(11.5)使得我们在 11.2.3 中定义的博弈 Γ 明显成为一个零和博弈。

---

① 转换为 11.1.1 中给出的策略定义：在这一博弈中，玩家 k 有一个且只有一个个人动作 $\mathcal{M}_k$，而且这一动作独立于博弈进程。而且，他必须在没有信息的情况下做出他在 $\mathcal{M}_k$ 时的选择。这样，他的策略恰好就是为动作 $\mathcal{M}_k$ 做出一个确定的选择，不多也不少，即严格地，$\tau_k=1, \cdots, \beta_k$。

我们希望读者用分割来描述这一博弈，并将上面的描述与 11.1.3(11:A)中策略的正式定义比较。——84，①

第3章 二人零和博弈:理论

12. 准备性研究

12.1 概论

85 **12.1.1** 在上一章中,我们对一般 n 人博弈进行了全面和正式的特征化描述(见 10.1)。最后,我们还给出了一个严格的策略概念,它允许我们用一个较为简单的方案来取代非常复杂的一般方案,而且,我们还证明了前者完全等价于后者(见 11.2)。在以后的讨论中,在有些情况下,前一种形式运用起来比较方便;在有些情况下,后一种形式运用起来比较方便。因此,我们有必要给予它们专门的术语。我们将把它们分别称为同一个博弈的扩展型(extensive form)和正规型(normal form)。

由于这两种形式是严格等价的,在任何具体情况下,我们都可以合理地随意使用其中最方便的一个。我们提议尽可能利用这种可能性,因此,我们重申,我们的讨论不会因此而失去一般性。

实际中,正规型更适合一般定理的推导,而扩展型更便于具体例子的分析。也就是说,前者有利于推导所有博弈的共同性质,后者则有利于说明不同博弈的不同特征,并说明决定着这些不同特征的关键结构。(关于前者,见第 14 节和第 17 节;关于后者,见第 15 节。)

12.1.2 博弈的正式描述已经完成,我们接下来的任务是理论的建立。可以预料,为完成这一任务,我们必须遵循从较简单的博弈到较复杂的博弈的过程。因此,我们要按照复杂程度从低到高对博弈进行排序。

我们曾经按照参与者的人数对博弈进行了分类:一个具有 n 个参与者的博弈被称为 n 人博弈。我们还曾把博弈分为零和博弈与非零和博弈。因此,我们区别n 人零和博弈与一般的 n 人博弈。我们将在后面看到,一般 n 人博弈与($n+1$)人零和博弈有十分密切的联系。事实上,前者的理论将是后者的理论的一个特殊情况(见 56.2.2)。

12.2　一人博弈

12.2.1 我们从关于一人博弈的几点说明开始。在正规型下,这类博弈是一个数 $\tau=1,\cdots,\beta$ 的选择。一个数被选定之后,惟一的玩家一得到的数额是 $H(\tau)$。[1] 零和博弈显然是没有意义的[2],没有什么值得说的。与一个一般的函数 $H(\tau)$ 和"最优"或"理性"行为方式对应着的一般情况是:玩家一选择 $\tau=1,\cdots,\beta$ 使 $H(\tau)$ 最大。 86

① 见 11.2.3 末尾的(11:D:a),(11:D:b)。我们省去了指数 1。——86,①

② $H(\tau)=0$,见 11.4。——86,②

一人博弈的这一极端简化自然归因于这样一个事实，即变量 τ 所代表的不是(一个动作的)选择，而是玩家的策略。也就是说，它代表的是他如何应对博弈过程中可能出现的各种情况的“理论”。应该牢记，一个一人博弈也能够变得十分复杂：它可能既包含机会动作，又有这个惟一的玩家的个人动作，其中每一个动作都有很多备择，而且，在个人动作情况下，玩家能够以各种方式使用的信息量也是可变的。

12.2.2 各种各样的“佩兴斯”游戏或“单人纸牌(跳棋)”游戏中有可能出现很多此类复杂而精妙的例子。然而，也存在着这样一种重要情况，其中传统一人博弈不属于我们在这里描述的情况。不完全信息就是这类情况，即惟一的一位玩家的个人动作的先前性与预备性不等价(见6.4)。在这种情况下，这位玩家具有两个个人动作，M_k 和 M_λ，在其中的一个动作时，他不知道有关另一个动作的选择结果。这样一种缺乏信息的状况不容易实现，在6.4.2中，我们讨论了如何将这位玩家“分裂”为两个或多个人，他们有着共同利益但信息传递不充分。在那里，我们看到，桥牌这类二人博弈中的一方就是这样一位玩家。构造一个与此相似的一人博弈例子并不难。不过，不幸的是，“单人纸牌”并非这类例子。[1]

这种情况出现在特定的经济结构之中：一个严格地建立起来的共产主义社会就是这样，其中，收入分配方案的结构是超越争议的(即不存在交换，只存在一种没有其他

[1] 现有的“双人纸牌”是两个人之间竞争的一种游戏，即二人游戏。——86，③

备择的分配），因为这样一个社会中所有社会成员的利益是完全一致的①，这一结构必须被当作一个一人博弈来对待。由于社会成员之间信息交流的不充分，任何类型的不完全信息情况都可能出现。

所以，这属于这样一种情况，借助策略（即计划）这一概念，它自然地简化成了一个最大值问题。基于我们前面的讨论，在这种情况下，而且只有在这种情况下，把经济学描述为一个简单的最大值问题——即“鲁滨孙”类型的问题——才是恰当的。

12.2.3 这些分析还表明，纯粹最大值——即“鲁滨孙”——方法的局限性。在上面的例子中，存在着一个严格地建立起来的、没有争议的分配方案。这表明，在这个层面上，对收入分配方案进行合理的和带有批判性的评价是不可能的事情。为了得到一个最大值，我们必须把整个收入分配方案置于博弈规则之中，使其绝对不可被违背，从而是超越批判的。为了将其引入到争斗和竞争——即 87
博弈策略——的层面，我们就必须分析 n 人博弈，$n \geq 2$，并且放弃这一问题的简单最大值方面。

12.3 机会和概率

12.3 在此，顺便提一下，大量“数学博弈”文献——它们主要是在 18 和 19 世纪发展起来的——基本上只研究这一问题的如下方面：博弈中的机会成分的影响。这也

① 个别成员本身不能被当作玩家来对待，因为他们之间产生冲突或其中一些人结盟的可能性被排除了。——86，④

是我们前面的讨论中遗留下来的一个问题。概率的计算，尤其是数学期望的计算的发明和恰当运用，当然是有影响的。在我们的讨论中，这些必要的运算已经出现在 11.2.3 之中了。[①][②]

因此，我们不再对这样一些博弈感兴趣，其中的数学问题只是机会的作用的评价问题，即概率和数学期望的计算问题。在概率论中，此类博弈偶尔会给出一些有意思的练习。[③] 但是，我们希望读者与我们保持一致，严格说，它们不属于博弈论。

12.4 下一个目标

12.4 接下来，我们要分析更加复杂的博弈。一般一人博弈已经得到说明，剩下的最简单博弈是二人零和博弈，从而是我们的下一个目标。

在这之后，我们有机会遇到一般的二人博弈或三人零
88 和博弈。我们将会看到，我们必须首先研究三人零和博
弈。此后，我们将把这一理论扩展到 n 人零和博弈（$n=1$，
$2,3,\cdots$）。最后，我们会发现，研究一般 n 人博弈是轻而易
举的事情。

---

① 我们不想贬低这些发明的重大意义。正是因为它们的巨大影响，我们才能够将我们的问题的这个方面一带而过。我们的主要兴趣在于这一问题尚未由概率论解决的那些方面。——87，①

② 关于数学期望的应用与数字效用之间的关系，见 3.7 和 3.7 之前的分析。——87，②

③ 轮盘赌一类的博弈有着更令人惊奇的特征。在轮盘赌中，玩家的数学期望显然是负的。因此，如果我们把货币报酬等同于效用，那么，参与这种博弈的动机是无法理解的。——87，③

13. 谓词演算

13.1 基本定义

13.1.1 正如我们在 12.4 中指出的那样，我们的下一个目标是二人零和博弈的详细讨论。为了充分实现这一目标，我们必须更加广泛地使用谓词演算(functional calculus)的符号，至少对于其中的一部分来说是这样。我们需要的概念是函数、变量、最大值和最小值及其作为函数运算的运用。所有这些都需要一些解释和讨论。这正是我们接下来要做的事情。

在这些解释和讨论之后，我们将证明有关最大值和最小值的一些定理，以及两者的一个特定组合，即鞍点值(saddle value)。这些定理将在二人零和博弈理论中发挥重要作用。

13.1.2 一个函数 φ 是一个依赖关系，它指明被称为 φ 的变量的 $x, y, \cdots$ 如何决定 φ 的值 u。因此，u 取决于 φ 和 $x, y, \cdots$，而且，这一依赖关系由下述符号等式表示：

$$u = \varphi(x, y, \cdots)。$$

从原理上说，我们必须区别函数 φ 本身与任意指定 $x, y, \cdots$ 时它的取值 $\varphi(x, y, \cdots)$，因为 φ 本身是一个抽象的东西。然而，在实际运用中，我们写 $\varphi(x, y, \cdots)$——$x, y, \cdots$ 待定——而不写 φ，这样做往往比较方便。[见下

面的例子(c)—(e);(a),(b)甚至更糟糕,见脚注①。]

为了描述函数 φ,我们当然要首先指定其变量 x,y,…的个数。因此,我们有一元函数 $\varphi(x)$、二元函数 $\varphi(x,y)$ 等。

下面是几个例子:

(a)算术运算 $x+1$ 和 x^2 是一个一元函数。①

(b)算术加法和乘法 $x+y$ 和 xy 是二元函数。②

(c)对任意给定的 k,9.2.4 中的 $J_k(\pi)$ 是 π 的一个一元函数。不过,它也可以被看作 k,π 的一个二元函数。

(d)对任意给定的 k,11.1.3 中(11:A)的 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$ 是 κ 和 D_κ 的一个二元函数。③

(e)对任意给定的 k,$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 是 $(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的一个 n 元函数。④

89 **13.1.3** 为了描述一个函数 φ,我们同样需要指定,对于其变量 $x,y,\cdots$ 的哪些具体选择,数值 $\varphi(x,y,\cdots)$ 是完全确定的。$x,y,\cdots$ 的这些选择,即这些组合,形成 φ 的定义域。

例子(a)—(e)说明了函数的定义域多种多样:它们可以由算术或解析实体组成,也可以由别的东西组成。事

---

① 不过,我们没有将其写成上述标准形式 $\varphi(x)$,$\varphi(x,y)$。——88,①

② 同上注。——88,①

③ 像(c)中那样,我们也可以把(d)中的 κ 和(e)中的 κ 当作一个变量。——88,②

④ 同脚注①。——88,①

实上：

(a)我们可以认为，这一定义域由所有整数组成，也可以认为它由所有实数组成。

(b)(a)中使用的数组成的数对组成这一定义域。

(c)这一定义域是所有的 π 组成的集合 Ω，而 π 代表博弈 Γ 的实际博弈(见 9.1.1 和 9.2.4)。

(d)这一定义域由一个正整数 k 和一个集合 D_k 的任意配对组成。

(e)这一定义域由一系列正整数组成。

如果一个函数 φ 的变量取值正整数，我们将其称为算术函数；如果它的变量是实数，那么，它是一个数值函数；如果它的变量是集合[如(d)中的 D_k]，那么，它是一个集合函数。

这里，我们感兴趣的主要是算术函数和数值函数。

最后，我们给出关于函数的概念的一个自然结果：变量个数、定义域和函数值对变量的依赖关系共同构成一个函数，如果两个函数 φ 和 ψ 有相同的变量 $x, y, \cdots$ 和相同的定义域，而且在这一定义域中 $\varphi(x, y, \cdots) = \psi(x, y, \cdots)$，那么，$\varphi$ 和 ψ 在各个方面都完全相同。①

13.2 最大值和最小值

13.2.1 考虑一个函数 φ，它取实数值

① 函数的概念与集合的概念有密切联系，而且，上述分析应该与 8.2 中的分析一致。——89，①

$$\varphi(x,y,\cdots)$$

首先,我们假设 φ 是个一元函数。如果我们能够选择它的变量的一个值,如 $x=x_0$,使得 $\varphi(x_0)\geqq\varphi(x')$ 对所有 x' 都成立,那么,我们说 φ 有最大值(maximum)$\varphi(x_0)$,且在 $x=x_0$ 取得这一最大值。

注意,最大值 $\varphi(x_0)$ 是惟一确定的。也就是说,φ 可能在若干个 x_0 处取得这一最大值,但它们必定都取相同的值 $\varphi(x_0)$。① 我们记这个值为 Max $\varphi(x)$,称 $\varphi(x)$ 的最大值(maximum value)。

在上面的表述中用 ≦ 替换 ≧,我们就得到了 $\varphi(x)$ 的最小值(minimum)$\varphi(x_0)$,且它在 $x=x_0$ 处取得最小值。同样,φ 可以在若干个 x_0 处取得同一数值 $\varphi(x_0)$。我们记这一取值为 Min $\varphi(x_0)$,称 φ 的最小值(minimum value)。

90 注意,Max $\varphi(x)$ 和 Min $\varphi(x)$ 的存在性都没有先验的保证。②

然而,如果 φ 的定义域由有限个元素组成,那么,Max $\varphi(x)$ 和 Min $\varphi(x)$ 的存在性都是显然的。实际上,我们要讨论的函数中的大多都是如此。③ 对于其余函数来说,它们的连续性和它们的定义域的几何上的有界性结合

---

① 证明:考虑两个这样的 x_0,如 x'_0,x''_0,那么,$\varphi(x'_0)\geqq\varphi(x''_0)$ 且 $\varphi(x''_0)\geqq\varphi(x'_0)$。故,$\varphi(x'_0)=\varphi(x''_0)$。——89,②

② 例如,如果 $\varphi(x)\equiv x$,其定义域是全体实数,那么,Max $\varphi(x)$ 和 Min $\varphi(x)$ 都不存在。——90,①

③ 典型例子有:11.2.3[或 13.1.2(e)]中的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$,14.1.1 中的函数 $H(\tau_1,\tau_2)$。——90,②

起来保证最大值和最小值存在。[①] 不管怎样，我们的讨论将限于最大值或最小值存在的函数。

13.2.2 下面，我们考虑有任意多个变量 $x,y,z,\cdots$ 的函数 φ。让其中一个变量如 x 变化，视其他变量为常数，我们能够将 $\varphi(x,y,z,\cdots)$ 看作变量 x 的一个一元函数。因此，像 13.2.1 中那样，我们可以针对 x 构造 $\mathrm{Max}\ \varphi(x,y,z,\cdots)$，$\mathrm{Min}\ \varphi(x,y,z,\cdots)$。

但是，由于我们可以同样地对变量 $x,y,z,\cdots$ 中的任何一个这么做，我们必须指明运算 Max 和 Min 是针对变量 x 的。为此，我们将其写为 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$，$\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$。这样，我们就能够把运算 Max_x，Min_x，Max_y，Min_y，Max_z，Min_z，$\cdots$ 中的任何一个运用于函数 $\varphi(x,y,z,\cdots)$。这样，它们就被区别开了，而我们的符号一点也不含糊。

对于一元函数来说，这种符号甚至更优越，而且我们将相应地使用它，即我们写 $\mathrm{Max}_x\varphi(x)$、$\mathrm{Min}_x\varphi(x)$，而不像 13.2.1 那样写 $\mathrm{Max}\ \varphi(x)$、$\mathrm{Min}\ \varphi(x)$。

有时，指明一个最大值或最小值问题的定义域 S 有方便之处，甚至是必要的。例如，当函数 $\varphi(x)$ 在 S 之外也是有定义的，但我们只希望计算 S 之内的最大值或最小值。

---

① 典型的例子有：17.4 中的函数 $k(\vec{\xi},\vec{\eta})$，$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，$\mathrm{Min}_{\vec{\xi}}k(\vec{\xi},\vec{\eta})$，17.5.2 中的函数 $\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$，$\mathrm{Max}_{\tau_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}$。视以后最大值或最小值问题的建立，这些函数的变量是 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 之一，或两者同时是变量。

另一个例子是 46.2.1，尤其是第 384 页脚注①中讨论的一个例子，其中还给出了这一问题的数学背景和参考文献。我们不必在这里对其进行深入讨论，因为上面的例子都是入门性的例子。——90，③

在这种情况下，我们写

$$\mathrm{Max}_{x\text{属于}S}\varphi(x),\ \mathrm{Min}_{x\text{属于}S}\varphi(x),$$

而不写 $\mathrm{Max}_x\varphi(x)$、$\mathrm{Min}_x\varphi(x)$。

在特定情况下，枚举 $\varphi(x)$ 的取值，如 $a,b,\cdots$，可能比将其表达为一个函数更为简单。这时，我们可以写
91 $\mathrm{Max}(a,b,\cdots)$，[$\mathrm{Min}(a,b,\cdots)$]，而不写成 $\mathrm{Max}_x\varphi(x)$，[$\mathrm{Min}_x\varphi(x)$]。①

13.2.3 注意，虽然 $\varphi(x,y,z,\cdots)$ 是变量 $x,y,z,\cdots$ 的一个函数，$\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 和 $\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 也是函数，只不过是变量 $y,z,\cdots$ 的函数。表面上，x 仍旧出现在 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 和 $\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 之中，不过它不再是这些函数的变量。我们说，运算 Max_x、Min_x 扼杀了作为一个指数出现的变量 x。②

由于 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 和 $\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 仍然是变量 $y,z,\cdots$ 的函数③，我们能够继续下去并建立下面的表达式：

$$\mathrm{Max}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots),\qquad \mathrm{Max}_y\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$$

$$\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots),\qquad \mathrm{Min}_y\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$$

同样，我们也可以建立

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y,z,\cdots),\qquad \mathrm{Min}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y,z,\cdots)$$

---

① $\mathrm{Max}(a,b,\cdots,)$ [$\mathrm{Min}(a,b,\cdots)$] 自然是数 $a,b,\cdots$ 中的最大（最小）者。——91，①

② 数学分析中，扼杀一个变量 x 的一个众所周知的运算是定积分：$\varphi(x)$ 是 x 的一个函数，但 $\int_0^1\varphi(x)dx$ 是一个常数。——91，②

③ 在 13.2.2 中我们把 $y,z,\cdots$ 当作常数。但是，现在变量 x 已经被扼杀，我们释放变量 $y,z,\cdots$。——91，③

等；[1]对于其中任意两个变量，我们都可以这么做，而且上述过程可以推广到两个以上的变量。

最后，经过与变量个数一样多个数的运算 Max 或 Min——以任意顺序和结合方式，但每一个变量一次，我们得到一个根本没有变量的函数，即一个*常数*。

13.3　交换性

13.3.1　13.2.3 的讨论使我们能够把 Max_x，Min_x，Max_y，Min_y，Max_z，Min_z，…完全当作函数来运算，其中的每一个把一个函数变成另一个函数。[2] 我们已经看到，我们能够依次施加它们之中的若干个。在这种情况下，以什么样的顺序施加这些运算表面上看也是有所不同的。

有真正的不同吗？严格说：如果将两个运算依次施加于同一对象，而它们的顺序是无所谓的，那么，我们称这两个运算是*可交换*的。现在，我们的问题是，运算 Max_x，Min_x，Max_y，Min_y，Max_z，Min_z，…是否都是可交换的呢？

让我们来回答这一问题。为此，我们只需两个变量， 92
如 x 和 y，而且 φ 不必是 x、y 之外更多变量的函数。[3]

所以，我们考虑一个二元函数 $\varphi(x,y)$。显然，有意义的可交换性问题是下列等式中哪一个是一般地成立的：

$$(13:1)\qquad \mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)=\mathrm{Max}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y),$$

---

① 注意，如果我们施加两个或更多运算，最里面那个首先得到执行并扼杀其变量。然后是下一个，依此类推。——91，④

② 每次减少一个变量，因为这些运算中的每一个扼杀一个变量。——91，⑤

③ 为了我们现在的目的，φ 的更多变量，如果有的话，可以被当作常数对待。——91，⑥

(13:2) $\quad \mathrm{Min}_x \mathrm{Min}_y \varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y \mathrm{Min}_x \varphi(x,y)$,

(13:3) $\quad \mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y \varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x \varphi(x,y)$。①

我们将看到,(13:1)和(13:2)是正确的,而(13:3)不正确。也就是说,任意两个 Max 或任意两个 Min 可交换,而一个 Max 与一个 Min 一般来说不可交换。我们还将得出一个准则以确定在什么情况下 Max 与 Min 可交换。

Max 与 Min 的交换性对于二人零和博弈来说具有决定性意义(见 14.4.2 和 17.6)。

13.3.2 我们首先考虑(13:1)。直觉上,如果把 x,y 当作一个变量,$\mathrm{Max}_x \mathrm{Max}_y \varphi(x,y)$ 显然是函数 $\varphi(x,y)$ 的最大值。也就是说,对某个适当的 x_0, y_0, $\varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_x \mathrm{Max}_y \varphi(x,y)$ 且对于所有 x',y', $\varphi(x_0,y_0) \geqq \varphi(x',y')$。

如果需要一个数学证明的话,那么:选择 x_0,使得 $\mathrm{Max}_y \varphi(x,y)$ 在 $x=x_0$ 时取得最大值,然后选择 y_0,使得 $\varphi(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 时取得最大值。那么,

$$\varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_y \varphi(x_0,y) = \mathrm{Max}_x \mathrm{Max}_y \varphi(x,y),$$

而且对于所有 x',y'

$$\varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_y \varphi(x_0,y) \geqq \mathrm{Max}_y \varphi(x',y) \geqq \varphi(x',y')。$$

证明完成。

我们看到,如果我们把 x,y 看作一个变量,通过交换 x、y, $\mathrm{Max}_y \mathrm{Max}_x \varphi(x,y)$ 同样是 $\varphi(x,y)$ 的最大值。

因此,(13:1)的两边具有相同的特性,从而它们是相等的。这就证明了(13:1)。

---

① $\mathrm{Min}_x \mathrm{Max}_y$ 这个组合不需要单独处理,因为它可以通过交换 x、y 从而得到 $\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y$。——92,①

在上面的讨论中，只需用 Min 替换 Max，用≦替换≧，(13:2)就得到了证明。

把 x,y 当作一个变量，这一方法偶尔相当方便。像 18.2.1 那样，用 $\tau_1,\tau_2,H(\tau_1,\tau_2)$ 取代这里的 $x,y,\varphi(x,y)$，当我们使用它时，我们将写成 $\mathrm{Max}_{x,y}\varphi(x,y)$，$\mathrm{Min}_{x,y}\varphi(x,y)$。

13.3.3　这里，图形讨论也许是有益的。假设 φ 就 x,y 的定义域是一个有限集。为简单起见，记 x(在这一定义域中)的可能取值为 $1,\cdots,t$，y 的可能取值为 $1,\cdots,s$。那么，对应于这一定义域中的 x,y——即 $x=1,\cdots,t$，$y=1,\cdots,s$ 的所有组合，函数 $\varphi(x,y)$ 的取值能够被排列在一个矩形图中：我们用一个 t 行和 s 列的矩形图，用数 $x=$ 93
$1,\cdots,t$ 记行，用数 $y=1,\cdots,s$ 记列。在对应着第 x 行与第 y 列的地方，我们写上函数取值 $\varphi(x,y)$，见图 11。这一排列完全描述了函数 $\varphi(x,y)$，而这一排列正是数学中的矩阵。函数的具体取值 $\varphi(x,y)$ 是该矩阵的元素。

	1	2	………	y	………	s
1	$\varphi(1,1)$	$\varphi(1,2)$	………	$\varphi(1,y)$	………	$\varphi(1,s)$
2	$\varphi(2,1)$	$\varphi(2,2)$	………	$\varphi(2,y)$	………	$\varphi(2,s)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x	$\varphi(x,1)$	$\varphi(x,2)$	………	$\varphi(x,y)$	………	$\varphi(x,s)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
t	$\varphi(t,1)$	$\varphi(t,2)$	………	$\varphi(t,y)$	………	$\varphi(t,s)$

图 11

现在，$\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$是第 x 行中的 $\varphi(x,y)$的最大值。

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$$

是行最大值的最大值。另一方面，

$$\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$$

是第 y 列的最大值。因此，$\mathrm{Max}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$是列最大值的最大值。从而，我们在 13.3.2 中关于(13:1)的断言能够被表述为：行最大值的最大值与列最大值的最大值相同，两者都是 $\varphi(x,y)$在这一矩阵中的最大值。如果用 Min 替换 Max，我们可以类似得到关于(13:2)的断言。

13.4 混合情况：鞍点

13.4.1 下面，我们讨论(13:3)。用 13.3.3 中的术语说，(13:3)的左边是行最小值的最大值，右边是列最大值的最小值。这两个数既不是绝对的最大值，也不是绝对的最小值，而且没有先验的证据说明它们应该是
94 相同的。它们也的确不相等。图 12 和图 13 分别给出了这两者不相等的两个函数。图 14 是这两者相等的函数。(所有这些图都应该在 13.3.3 和图 11 的意义上来阅读。)

这些图以及 Max 和 Min 的交换性将在二人零和博弈理论中发挥基本的作用。事实上，我们将会看到，它们就代表着特定的博弈，这些博弈是具有一定重要性的一类博弈(见 18.1.2)。不过，这里，我们只讨论这些图形以及 Max 和 Min 的交换性，不提它们的应用。

$t=s=2$

	1	2	行最小值
1	1	-1	-1
2	-1	1	-1
列最大值	1	1	

行最小值的最大值 = -1

列最大值的最小值 = 1

图 12

$t=s=3$

	1	2	3	行最小值
1	0	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1
3	-1	1	0	-1
列最大值	1	1	1	

行最小值的最大值 = -1

列最大值的最小值 = 1

图 13

$t=s=2$

	1	2	行最小值
1	-2	1	-2
2	-1	2	-1
列最大值	-1	2	

行最小值的最大值 = -1

列最大值的最小值 = -1

图 14

13.4.2 (13:3)既不总是正确，又不总是错误，因此，它的两边：

(13:4) $\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)$, $\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$

之间的关系需要更加充分的讨论。图 14 在一定程度上说明了(13:3),对其可能有的表现,提供了一些线索。尤其是:

(13:A) 在这三个图中,(13:3)的左边[即(13:4)的第一个表达式]总是≦(13:3)的右边[即(13:4)的第二个表达式]。

95 (13:B) 在图 14 中,(13:3)是成立的。在该矩阵中存在一个同时是行的最小值和列的最大值的地方。(这正好发生在该矩阵的左下角,相应的元素是 -1。)在(13:3)不成立的图 12 和图 13 中,则不存在这样的地方。

为了恰当地描述(13:B)中提到的情况,我们引入一个新的概念。因此,我们定义:

令 $\varphi(x,y)$ 是一个二元函数,我们称 x_0,y_0 是 φ 的一个鞍点,如果 $\varphi(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得其最大值,与此同时 $\varphi(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得其最小值。

鞍点这一名称的由来是:把所有元素 x,y($x=1,\cdots,t$,$y=1,\cdots,s$;图 11)的矩阵想像为一张地形图,x,y 处山的高度是此处的函数值 $\varphi(x,y)$,那么,鞍点 x_0,y_0 处的地貌基本上像一个马鞍或山坳通道,第 x_0 行是山脊,第 y_0 列是(从一个山谷到另一个山谷的)通道,它正好穿过这个山脊。

13.5.2 中的(13:C*)也符合这一解释。①

---

① 所有这些密切联系着某些更一般的有关极值问题的数学理论和变分法等。见莫尔斯(M. Morse):"函数的临界点和大范围变分法",*Bull. Am. Math. Society*, Jan—Feb. 1929, pp. 38 cont.,"什么是大范围解析?",*Am. Math. Monthly*, Vol. XLIX, 1942, pp. 358 cont。——95,①

13.4.3 图 12 和图 13 表明，一个函数 φ 完全可以没有鞍点。另一方面，一个函数 φ 有多个鞍点也是可以理解的。不过，所有的鞍点 x_0, y_0，如果存在的话，必定有相同的函数值 $\varphi(x_0, y_0)$。① 如果这个值存在的话，我们将其记为 $\mathrm{Sa}_{x/y}\varphi(x, y)$，称之为 $\varphi(x, y)$ 的鞍点值。②

现在，我们把（13：A）和（13：B）所指内容推广为定理。我们将其记为（13：A*）和（13：B*）并强调它们对于所有函数 $\varphi(x, y)$ 都成立。

（13：A*）　$\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y \varphi(x, y) \leqq \mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x$ 总是成立。

（13：B*）　$\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y \varphi(x, y) = \mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x$ 成立，当且仅当 φ 的鞍点 x_0, y_0 存在。

13.5 主要结果的证明

13.5.1 首先，对每一个函数 $\varphi(x, y)$，我们定义两个集合 A^{φ}, B^{φ}。$\mathrm{Min}_y \varphi(x, y)$ 是 x 的一个函数；令 A^{φ} 是这样一些 x_0 组成的集合，该函数在 $x = x_0$ 处取得其最大值。 96
$\mathrm{Max}_x \varphi(x, y)$ 是 y 的一个函数，令 B^{φ} 是这样的 y_0 组成的集合，该函数在 $y = y_0$ 处取得其最小值。

接下来，我们证明（13：A*），（13：B*）。

① 这是 13.5.2 中（13：C*）的结果。一个同样简单的证明是：考虑两个鞍点 x_0, y_0，如 x'_0, y'_0, x''_0, y''_0。那么：

$\varphi(x'_0, y'_0) = \mathrm{Max}_x \varphi(x, y'_0) \geqq \varphi(x''_0, y'_0) \geqq \mathrm{Min}_y \varphi(x''_0, y) = \varphi(x''_0, y''_0)$，

即：$\varphi(x'_0, y'_0) \geqq \varphi(x''_0, y''_0)$。类似地，$\varphi(x''_0, y''_0) \geqq \varphi(x'_0, y'_0)$。

故 $\varphi(x'_0, y'_0) = \varphi(x''_0, y''_0)$。——95，②

② 显然，运算 $\mathrm{Sa}_{x/y}\varphi(x, y)$ 扼杀变量 x, y。见 13.2.3。——95，③

(13:A*)的证明:选择 A^φ 中的 x_0 和 B^φ 中的 y_0,那么,

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) &= \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y)\leqq\varphi(x_0,y_0)\\ &\leqq \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y),\end{aligned}$$

即如我们希望的那样:$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)\leqq\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$。

(13:B*)中一个鞍点存在的必要条件的证明:

假设

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$

在 A^φ 中选择 x_0,在 B^φ 中选择 y_0,那么,我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) &= \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)\\ &= \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y)。\end{aligned}$$

因此,对每一个 x',

$$\varphi(x',y_0)\leqq\mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) = \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y)\leqq\varphi(x_0,y_0),$$

即 $\varphi(x_0,y_0)\geqq\varphi(x',y_0)$,故 $\varphi(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 时取得其最大值。

对每一个 y',

$$\varphi(x_0,y')\geqq\mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) = \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0)\geqq\varphi(x_0,y_0),$$

即 $\varphi(x_0,y_0)\leqq\varphi(x_0,y')$,故 $\varphi(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 时取得其最小值。

所以,x_0,y_0 是一个鞍点。

(13:B*)中一个鞍点存在的充分条件的证明:设 x_0,y_0 是一个鞍点。那么,

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)\geqq\mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) = \varphi(x_0,y_0),$$

$$\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)\leqq\mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) = \varphi(x_0,y_0),$$

故,

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) \geqq \varphi(x_0,y_0) \geqq \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$

结合（13:A*）得

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$

13.5.2　13.5.1 中的分析给出了一些值得进一步讨论的结果。现在，我们假设鞍点存在，即等式（13:B*）成立。

对于每一个鞍点 x_0,y_0

（13:C*）　$$\varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$$

证明：这正是 13.5.1 中（13:B*）的充分条件证明中的最后一个等式。

（13:D*）　x_0,y_0 是一个鞍点，当且仅当 x_0 属于 A^φ 且 y_0 属于 B^φ。[①] 97

充分条件的证明：设 x_0 属于 A^φ 且 y_0 属于 B^φ。那么，13.5.1中（13:B*）的必要条件的证明表明，x_0,y_0 是一个鞍点。

必要条件的证明：设 x_0,y_0 是一个鞍点。根据（13:C*），对于每一个 x'，

$$\mathrm{Min}_y\varphi(x',y) \leqq \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y),$$

即 $\mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) \geqq \mathrm{Min}_y\varphi(x',y)$，故 $\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)$ 在 $x=x_0$ 取得其最大值。所以，x_0 属于 A^φ。类似，对于每一个 y'，

$$\mathrm{Max}_x\varphi(x,y') \geqq \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0),$$

即 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) \leqq \mathrm{Max}_x\varphi(x,y')$，故 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$ 在 $y=y_0$

---

① 只是在本节开头的假设条件下！不然的话，根本不存在鞍点。——97,①

取得其最小值。所以，y_0 属于 B^φ。证明完成。

定理(13:C*)和(13:D*)还指出了13.4.2末尾给出的比喻的有限性，即这两个定理表明，我们的鞍点概念是一个比日常（地形图）的鞍点或山坳通道更狭隘的概念。事实上，(13:C*)指出，如果存在的话，所有鞍点具有同样的海拔高度。(13:D*)表明，如果我们把集合 A^φ、B^φ 描述为两个数字区间[①]，那么，所有鞍点合在一起形成一个矩形平原。[②]

13.5.3 作为本节的结束，我们要证明，对于一类特殊的 x,y 和 $\varphi(x,y)$，一个鞍点的存在性。我们将会看到，这一特殊情况并非完全没有一般性。设变量 x,u 的一个函数 $\psi(x,u)$ 被给定。我们考虑所有的函数 $f(x)$，其取值落入 u 的值域之中。现在，我们保持变量 x，但用函数 f 自身替换变量 u。[③] 表达式 $\psi[x,f(x)]$ 决定于 x,f；因此，我们可以把 $\psi[x,f(x)]$ 当作变量 x,f 的函数且用它取代 $\varphi(x,y)$。

我们要证明的是，对于 x,f 和 $\psi[x,f(x)]$——用它们替换 x,y 和 $\varphi(x,y)$——一个鞍点存在。也就是说，

(13:E) $\quad \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_f\psi[x,f(x)] = \mathrm{Min}_f\mathrm{Max}_x\psi[x,f(x)]$。

证明：对于每个 x，选择一个 u_0，使 $\psi(x,u_0) = \mathrm{Min}_u\psi(x,u)$。这个 u_0 依赖于 x，因此我们能够用 $u_0 = f_0(x)$ 定义一个函数 f_0。从而，$\psi[x,f_0(x)] = \mathrm{Min}_u\psi(x,u)$。所以

---

① 如果 x、y 是正整数，那么，通过它们的值域的两个适当排列，这是肯定能够做到的。——97，②

② 第95页脚注①中间接提到的一般数学概念没有这些局限性。它们严格对应着日常生活中的山坳通道概念。——97，③

③ 请读者想像一下：虽然 f 本身是一个函数，f 完全可以是另一个函数的变量。——97，④

$$\mathrm{Max}_x\psi[x,f_0(x)] = \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_u\psi(x,u)。$$

更有， 98

(13:F)　$\mathrm{Min}_f\mathrm{Max}_x\psi[x,f(x)] \leqq \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_u\psi(x,u)$。

现在，$\mathrm{Min}_f\psi[x,f(x)]$与$\mathrm{Min}_u\psi(x,u)$相同，因为$f$仅仅通过它在$x$处的取值$f(x)$进入这一表达式。所以，$\mathrm{Min}_f\psi[x,f(x)] = \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_u\psi(x,u)$，且相应地，

(13:G)　$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_f\psi[x,f(x)] = \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_u\psi(x,u)$。

(13:F)和(13:G)合起来保证(13:E)中$\geqq$的成立。(13:E)中$\leqq$的成立则归因于(13:A*)。所以，我们有(13:E)中的=成立，即定理得证。

14. 严格决定的博弈

14.1 问题描述

14.1.1　下面，我们讨论二人零和博弈，并且从其正规型开始。

这种博弈由两个动作组成：玩家 1 选择一个数$\tau_1 = 1,\cdots,\beta_1$，玩家 2 选择一个数$\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$，每一选择都是在对其他选择一无所知的情况下做出的，玩家 1 和玩家 2 得到的数额分别是$H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_2(\tau_1,\tau_2)$。①

由于这一博弈是零和博弈，由 11.4，我们有

$$H_1(\tau_1,\tau_2) + H_2(\tau_1,\tau_2) \equiv 0。$$

---

① 见 11.2.3。——98，①

我们更倾向于将其写为

$$H_1(\tau_1,\tau_2)\equiv H(\tau_1,\tau_2),\quad H_2(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_1,\tau_2)。$$

接下来，我们试图理解玩家 1 和玩家 2 的意愿如何决定事态的发展，即选择 τ_1,τ_2。

我们必须再次提醒读者，τ_1,τ_2 代表的是对玩家的策略的最终分析，而不是对（一个动作）选择的最终分析，而策略是玩家关于这一博弈的"理论"或"计划"。

此刻，我们暂且将其搁置一旁。后面，我们将深入 τ_1，τ_2 的"背后"，分析一局博弈的进程。

14.1.2 玩家 1 和玩家 2 的愿望很简单。玩家 1 希望使 $H_1(\tau_1,\tau_2)\equiv H(\tau_1,\tau_2)$ 最大，玩家 2 希望 $H_2(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_1,\tau_2)$ 最大。也就是说，玩家 1 要最大化 $H(\tau_1,\tau_2)$，而玩家 2 要最小化 $H(\tau_1,\tau_2)$。

如此，两个玩家的利益集中于同一对象：函数 $H(\tau_1,\tau_2)$。不过，二人零和博弈中一件预料之中的事情是，他们的企图正好相反：玩家 1 想最大化，而玩家 2 想最小化。这里的困难在于两位玩家之中的任何一位都不完全控制其努力的目标——$H(\tau_1,\tau_2)$，即不同时控制其两个变量 τ_1,τ_2。玩家 1 想最大化，但是，他只控制着 τ_1；玩家 2 想最小化，但是，他只控制着 τ_2。最后的结果是什么呢？

99 困难还在于，τ_1 和 τ_2 之一的具体选择未必使 $H(\tau_1,\tau_2)$ 大或小。一般来说，τ_1 对 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的影响是不确定的。两者结合起来才能决定 $H(\tau_1,\tau_2)$（见 2.2.3 经济学中相应的困难）。

要看到，从选择变量 τ_1 的玩家 1 的角度看，变量 τ_2 肯定不能被当作一个随机事件。变量 τ_2 将依赖于另一个玩

家的愿望，在玩家 1 的考虑中，它必须像玩家 1 本人的“理性”那样同等对待（见 2.2.3 和 2.2.4）。

14.1.3　这里，运用 13.3.3 中发展的图形表示会带来方便。如图 15 所示，我们用一个矩阵表示 $H(\tau_1,\tau_2)$：我们建立一个 β_1 行和 β_2 列的矩阵，用数字 $\tau_1=1,\cdots,\beta_1$ 记行，用数字 τ_2 记列。我们在 τ_1,τ_2 处写上矩阵的元素 $H(\tau_1,\tau_2)$。（见 13.3.3 图 11。那里的 φ、x、y、t、s 分别对应着这里的 H、τ_1、τ_2、β_1、β_2。）

	1	2	………	τ_2	………	β_2
1	$\mathscr{H}(1,1)$	$\mathscr{H}(1,2)$	………	$\mathscr{H}(1,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(1,\beta_2)$
2	$\mathscr{H}(2,1)$	$\mathscr{H}(2,2)$	………	$\mathscr{H}(2,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(2,\beta_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
τ_1	$\mathscr{H}(\tau_1,1)$	$\mathscr{H}(\tau_1,2)$	………	$\mathscr{H}(\tau_1,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(\tau_1,\beta_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
β_1	$\mathscr{H}(\beta_1,1)$	$\mathscr{H}(\beta_1,2)$	………	$\mathscr{H}(\beta_1,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(\beta_1,\beta_2)$

图 15

应该理解，函数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 不受任何约束，即我们可以按照自己的意愿自由选择。① 事实上，任意给定的一个函

① 当然了，定义域必须事先确定：它由所有数对 τ_1,τ_2，$\tau_1=1,\cdots,\beta_1$，$\tau_2=1,\cdots,\beta_2$ 组成。这是一个有限集，因此 Max 和 Min 总存在。见 13.2.1 末尾。——99，①

数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 界定一个 11.2.3 的(11:D)意义上的二人零和博弈,其简单定义是

$$H_1(\tau_1,\tau_2) \equiv H(\tau_1,\tau_2),H_2(\tau_1,\tau_2) \equiv -H(\tau_1,\tau_2)$$

(见 14.1.1)。正如上一节描述的那样,我们能够以如下
100 方式理解玩家 1 和玩家 2:他们都只对矩阵元素 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的取值感兴趣。玩家 1 试图将其最大化,但他只控制着行,即数 τ_1;玩家 2 试图将其最小化,但他只控制着列,即数 τ_2。

我们必须为这场奇特的拔河比赛的结果找到一个令人满意的解释。[①]

14.2 小博弈和大博弈

14.2 我们不直接向博弈 Γ 本身发起进攻,因为我们还没有做好足够的准备。让我们考虑另外两个博弈,这两个博弈与 Γ 有密切联系,且关于它们的讨论是手到擒来的事情。

显然,分析 Γ 时的困难是,玩家 1 在选择 τ_1 时不知道他所面对的玩家 2 的选择 τ_2 是什么,反之亦然。因此,我们将 Γ 与没有这一困难的其他博弈进行比较。

首先,我们定义一个博弈 Γ_1,它与 Γ 的惟一区别是,在玩家 2 做出选择 τ_2 之前,玩家 1 必须做出选择 τ_1,而

---

① 这并非真的是一场拔河比赛。这两位玩家有着相反的利益,但是,他们用于改善自己处境的手段却不是相互对立的。相反,这些"手段"——即 τ_1,τ_2 的选择——显然是相互独立的。这一差异描述这整个问题。——100,①

且，玩家 2 在做出选择时充分知道玩家 1 赋予 τ_1 的值（即 1 的动作是 2 的动作的预备）。① 在博弈 Γ_1 中，与 Γ 相比，玩家 1 显然处于不利的境地。因此，我们称 Γ_1 为 Γ 的小博弈。

类似地，我们定义第二个博弈 Γ_2，它与 Γ 的惟一区别在于，在玩家 1 做出 τ_1 的选择之前，玩家 2 必须做出他的选择 τ_2，且玩家 1 是在充分知道玩家 2 赋予 τ_2 的值的情况下做出他的选择（即 2 的动作是 1 的动作的预备）。② 与原来的博弈 Γ 相比，在 Γ_2 中，玩家 1 显然处于较有利的地位。因此，我们称 Γ_2 是博弈 Γ 的大博弈。

引入 Γ_1、Γ_2 的意义在于：根据常识，对于 Γ_1、Γ_2 来说，“最优玩法”——即理性行为的概念——有着明显的意义。我们将对此进行严格讨论。另一方面，博弈 Γ 显然介于博弈 Γ_1 与博弈 Γ_2 之间。例如，从玩家 1 的角度看，Γ_1 劣于 Γ 且 Γ_2 优于 Γ。③ 因此，我们可以预计，Γ_1、Γ_2 将分别为 Γ 中有意义的量提供下界和上界。当然，我们将以严格的形式讨论所有这些。最后，这些“界”能够有很大差距，并给有关 Γ 的理解留下相当大的不确定性。事实上，表面上，对于很多博弈来说，情况都是这样。但是，通过引入其他工具，我们将成功地运用这一技术，最终得到有关 Γ 的 101
一个严格理论，给所有问题提供完美的答案。

---

① 因此，Γ_1 十分简单，不再有正规型。——100，②

② 因此，Γ_2 极为简单，不再有正规型。——100，③

③ 当然了，为严格起见，我们应该说“劣于或等于”而不是“劣于”，“优于或等于”而不是“优于”。——100，④

14.3 辅助博弈

14.3.1 让我们首先考虑小博弈 Γ_1。在玩家 1 做出他的选择 τ_1 之后，玩家 2 在充分知道 τ_1 的取值的情况下做出其选择 τ_2。由于玩家 2 欲最小化 $H(\tau_1,\tau_2)$，可以肯定的是，对于这个 τ_1，他将选择 τ_2 使 $H(\tau_1,\tau_2)$ 最小。换句话说：当玩家 1 选择 τ_1 的一个具体值时，他能够肯定地预见 $H(\tau_1,\tau_2)$ 将是什么。这个值将是 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$。[①] 这是 τ_1 的一个函数。现在，玩家 1 希望最大化 $H(\tau_1,\tau_2)$，由于他的 τ_1 选择导致 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$，而 $\mathrm{Min}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2)$ 仅仅依赖于 τ_1，不依赖于 τ_2，因此玩家 1 将选择 τ_1 使 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 最大化。因此，这个量的最终取值是

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)。$$[②]

总之：

(14:A:a) 对于玩家 1 来说，小博弈 Γ_1 的好的方法（策略）是选择属于集合 A 的 τ_1，而 A 是这样的 τ_1 的组成集合，对于这些 τ_1，$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最大值 $\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$。

(14:A:b) 对于玩家 2 来说，好的玩法（策略）是：

---

① 注意，τ_2 可能不具有惟一性：对于 τ_1，τ_2 的一个给定函数 $H(\tau-1,\tau_2)$ 可能在若干个 τ_2 值取得其最小值。不过，对于所有这些 τ_2 的值来说，$H(\tau_1,\tau_2)$ 的值将是相同的，即惟一地界定的最小值 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$（见 13.2.1）。——101，①

② 与脚注①同理，τ_1 的值也可能不是惟一的，但对于问题中所有 τ_1，$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 的值是相同的，即惟一地界定了最大值——101，②

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)。$$

如果玩家 1 已经选定 τ_1 的值[①]，那么，τ_2 应该被选得属于集合 B_{τ_1}，B_{τ_1} 是这样的 τ_2 的集合，对于这些 τ_2，$H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最小值 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$。[②]

基于此，我们能够进一步说：

(14:A:c)　　如果玩家 1 和玩家 2 都正确地玩小博弈 Γ_1，即如果 τ_1 属于 A 且 τ_2 属于 B_{τ_1}，那么，$H(\tau_1,\tau_2)$ 的值将等于

$$v_1 = \mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)。$$

从数学意义上说，通过回忆集合 A 和 B_{τ_1} 的定义并在上述结论中进行相应替换，上述结论就可以直接得到证明。我们将此作为练习留给读者。这只不过是"套用已经有定义"的经典运算。而且，根据常识，这种说法应该是清楚的。 102

整个讨论应该弄清楚的是，对于每一位玩家，博弈 Γ_1 的每次博弈有一个确定的值。对于玩家 1 来说，这个值就是上述 v_1，从而对于玩家 2 来说它是 $-v_1$。

关于 v_1 的意义，我们有如下较为详细的分析：

(14:A:d)　　无论玩家 2 如何玩，玩家 1 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq v_1$；无论玩家 1 如何玩，玩家 2 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq -v_1$。

---

① 轮到玩家 2 做出他的选择 τ_2 时，他被告知 τ_1 的值。这是 Γ_1 规则。根据策略的概念(见 4.1.2 和 11.1.1 末尾)，此刻，无论玩家 1 已经做出的选择好坏，即无论选取的值是否属于 A。——101，③

② 总之，这个 τ_1 被当作一个已知参数，一切都依赖于它，包括应该从中选择 τ_2 的集合 B_{τ_1}。——101，④

（证明：选择 A 中任何一个 τ_1 都能够得到前者。选择 B_{τ_1} 中任何一个 τ_2 则能够得到后者。[①] 我们也将其中的细节留给读者，它们并不困难。）

从而，上述说法能够被等价地表述为：

(14:A:e)　　无论玩家 1 如何玩，玩家 2 总能够通过恰当的玩法确保玩家 1 的收益 $\leqq v_1$，即防止玩家 1 的收益 $> v_1$；无论玩家 2 如何玩，玩家 1 则总能够通过恰当的玩法确保玩家 2 的收益 $\leqq -v_1$，即防止玩家 2 的收益 $> -v_1$。

14.3.2　我们关于 Γ_1 的讨论已经相当丰富而详细，尽管其“解”相当明显。也就是说，只要对此情形有清楚的认识，任何人都能够凭借常识而不用数学得出相同的结论。然而，我们却认为，对这种情况进行如此详细的讨论是必要的，因为它是其他若干很不容易进行非数学讨论的情况的原型。还有，所有基本复杂因素以及克服它们的办法也都在这一最简单的情况中出现了。通过从各个角度认清它们，在后面较复杂的情况中，它们将可能浮现在我们的脑海中。还有可能的是，仅仅凭借这种方式准确判断每一具体方法能够给出什么结果。

14.3.3　下面，我们讨论大博弈 Γ_2。

Γ_2 与 Γ_1 的不同仅在于玩家 1 与玩家 2 的角色对换了：现在，玩家 2 必须首先做出他的选择 τ_2，然后玩家 1 在

① τ_1 必须在不知道 τ_2 的情况下被选定，而 τ_2 是在充分知道 τ_1 的情况下被选定。——102，①

充分知道 τ_2 的值的情况下做出他的选择 τ_1。

但是,在说到 Γ_2 产生于 Γ_1 中玩家 1 与玩家 2 对换角色时,我们必须牢记,在这一过程中,他们保留各自的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$,$H_2(\tau_1,\tau_2)$,即 $H(\tau_1,\tau_2)$,$-H(\tau_1,\tau_2)$。也就是说,玩家 1 仍旧想使 $H(\tau_1,\tau_2)$最大化,而玩家 2 仍旧想使 $H(\tau_1,\tau_2)$最小化。 103

理解了这些,我们就能够将 14.3.1 的讨论的逐字重复留给读者了。我们的讨论仅限于以适合 Γ_2 的形式重述有意义的定义。

(14:B:a)　玩家 2 玩大博弈 Γ_2 的好的玩法(策略)是选择属于集合 B 的 τ_2,其中 B 是这样的 τ_2 的集合,对于这些 τ_2,$H(\tau_1,\tau_2)$取其最小值 $\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$。

(14:B:b)　玩家 1 的好的玩法(策略)是:如果玩家 2 已经选定了 τ_2 的一个值[①],那么,τ_1 应被选得属于集合 A_{τ_2},这里 A_{τ_2}是这样的 τ_1 的集合,对于这些 τ_1,$H(\tau_1,\tau_2)$取其最大值 $\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$。[②]

由此,我们能够进一步说:

(14:B:c)　如果玩家 1 和玩家 2 都正确地玩大博弈 Γ_2,即如果 τ_2 属于 B 且 τ_1 属于 A_{τ_2},那

---

① 当轮到玩家 1 做出其选择 τ_1 时,他被告知 τ_2 的值,这是博弈 Γ_2 的规则(见第 101 页脚注③)。——103,①

② 总之,τ_2 被当作一个已知参数,所有的东西都依赖于它,包括 τ_1 从中做出选择的集合 A_{τ_2}。——103,②

么，$H(\tau_1,\tau_2)$的值将等于

$$v_2 = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2).$$

上述讨论应该弄清楚了的是，对于每一位玩家来说，博弈 Γ_2 的每一次博弈都有一个确定的值。对于玩家 1 来说，这个值就是上面的 v_2，从而，对于玩家 2 来说，这个值是 $-v_2$。

为了突出整个方案的对称性，经过适当修改，我们重复一下 14.3.1 中的分析。这有助于为 v_2 的意义提供一个更详细的想法。

(14:B:d) 无论玩家 2 如何玩，玩家 1 都能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq v_2$；无论玩家 1 如何玩，玩家 2 都能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq -v_2$。

（证明：选择 B 中任意的 τ_2 给出后者；选择 A_{τ_2} 中任意的 τ_1 给出前者。）

上述结论可以被等价地表述为：

(14:B:e) 无论玩家 1 如何玩，玩家 2 都能够通

104 过恰当的玩法确保玩家 1 的收益 $\leqq v_2$，即防止玩家 1 的收益 $> v_2$；无论玩家 2 如何玩，玩家 1 都能够通过恰当的玩法确保玩家 2 的收益 $\leqq -v_2$，即防止玩家 2 的收益 $> -v_2$。

14.3.4 14.3.1 和 14.3.3 中分别给出的关于 Γ_1,Γ_2 的讨论呈现出相互*对称*或*对偶*的关系。如我们在 14.3.3 开头指出的那样，通过对换玩家 1 和玩家 2 的角色，我们可以从其中一个得出另一个。对于这一对换，Γ_1 或 Γ_2 自

身并不是对称的。事实上，这只不过是这样一个事实的重述，即玩家 1 与玩家 2 的角色的对换也对换了 Γ_1 和 Γ_2 这两个博弈，并因此而修改了两者。与此一致的是，我们在 14.3.1 和 14.3.3 中给出的有关 Γ_1 和 Γ_2 的好的策略的各种说法——即（14：A：a）、（14：A：b）、（14：B：a）和（14：B：b）——对于玩家 1 和玩家 2 来说并不对称。我们再次看到：玩家 1 与玩家 2 的对换也对换有关 Γ_1，Γ_2 的有关定义，并因此而修改了两者。①

因此，非常明显，一局博弈的值（Γ_1 的 v_1，Γ_2 的 v_2）的描述对于玩家 1 和玩家 2 来说是充分对称的。这正是 14.3.1 末尾和 14.3.3——即（14：A：c）、（14：A：d）、（14：A：e）、（14：B：c）、（14：B：d）和（14：B：e）[（14：A：c）和（14：B：c）末尾的公式除外]——所表明的事情。根据上面所说，这等于说，对于 Γ_1 和 Γ_2，这些描述是以严格相同的方式表述的。②当然了，通过审视相关段落，所有这些是同样清楚的。

因此，在 14.3.1 和 14.3.3 的（14：A：c）、（14：A：d）、（14：A：e）、（14：B：c）、（14：B：d）和（14：B：e）中，我们成功地以相同方式定义了 Γ_1，Γ_2 的一局博弈的值，而且，尽管

---

① 注意，如果我们允许每个玩家在对换过程中带着各自的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_1(\tau_1,\tau_2)$，那么，最初的博弈 Γ 对于玩家 1 和玩家 2 来说是对称的；也就是说，在 Γ 中，玩家 1 和玩家 2 的个人动作具有相同的特征。

对于狭义的对称概念，函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_2(\tau_1,\tau_2)$ 是保持不变的，见 14.6。——104，①

② 这一点值得认真考虑：自然，这两个描述必须通过对换玩家 1 和玩家 2 的角色来从一个得到另一个。但是，在这种情况下，在没有对换玩家时，这些说法也是一致的。这归因于其个别对称性。——104，②

玩家1和玩家2在这两个博弈中各自的角色根本不同，我们的定义对于玩家1和玩家2来说却是对称的。我们从此获得了一种希望，即一局博弈的值的这一定义可以按照同一形式被用于其他博弈，尤其是介于Γ_1,Γ_2之间的博弈Γ。当然，这个希望仅仅适用于一局博弈的值这一概念本身，而不适用于得到它的推理。Γ_1和Γ_2特有的东西则完全不适用于Γ本身。也就是说，与(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)相比，我们对(14:A:d)、(14:A:e)、(14:B:d)和(14:B:e)寄予更多期望。

105 显然，这些只是试探性的。至此，我们甚至还没有证明能够以这种方式为Γ定义一个数值。接下来，我们将详细讨论如何填补这个缺失。我们将会看到，在开始的时候，一些严重的困难似乎制约着这一方法的适用性，但是，通过引入一个新的工具，消除这些困难将是可能的（见14.7.1，17.1—17.3）。

14.4 结论

14.4.1 我们已经看到，仅就玩家1来说，一局的值的一个完全看似合理的解释将Γ_1,Γ_2的值分别被确定为

$$v_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2),$$

$$v_2=\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)。$$①

由于对于玩家1来说博弈Γ_1劣于博弈Γ_2——在Γ_1中，他必须先于他的对手做出动作，并充分告诉对手他的选择；在Γ_2中，情况则正好相反——一个合理的结论是，

① 对于玩家2来说，相应的两个值分别为$-v_1$和$-v_2$。——105，①

Γ_1 的值小于或等于(即绝对不会大于)Γ_2 的值。你可以怀疑这是否是一个严格“证明”。这个问题很难回答，不过，这一口头论述的认真分析表明，它与我们已有的这一命题的数学证明完全一致。事实上，命题

$$v_1 \leqq v_2$$

与 13.4.3 中的(13:A*)一致。(那里的 φ, x, y 对应着我们这里的 H, τ_1, τ_2。)

通过对玩家 1 和玩家 2 的“才智”做出适当假设，我们可以将 v_1, v_2 与 Γ 联系起来，而不是分别将其归于不同于 Γ 的两个博弈 Γ_1, Γ_2。

事实上，博弈 Γ 的规则描述了每一位玩家必须在不知道其对手选择结果的情况下做出他自己的选择(他的动作)。然而，我们可以设想，其中的一位玩家，如玩家 2，“发现”了对手的情况；也就是说，他以某种方式获得了有关其对手的策略的知识。[1] 这一知识的基础不是我们要关心的事情。它也许(但未必)来自过去博弈的经验。不管怎样，我们假设玩家 2 有这一知识。当然，在这种情况下，玩家 1 将改变其策略；不过，让我们再次假设，无论理由是什么，他并不这样做。[2] 在这些假设条件下，我们可以说玩家 2 已经发现了他的对手。

在这种情况下，Γ 中的条件变得严格等同于博弈 Γ_1， 106
从而 14.3.1 中的讨论一字不漏地适用于 Γ。

---

① 在正规形式的博弈 Γ 中，策略就是该玩家在这一惟一的个人动作中的实际选择。回忆一下，这一正规形式是如何从这一博弈最初扩展型中推导出来的？因此，这一选择等价地对应着原博弈中的策略。——105，②

② 关于这些假设的解释，见 17.3.1。——105，③

类似,我们可以设想相反的可能情况,即玩家 1 已经摸透了他的对手。那么,Γ 中的条件就变得完全等同于 Γ_2 了,从而 14.3.3 中的讨论完全适用于 Γ。

基于上述讨论,我们能够说:

博弈 Γ 的一局博弈的值是一个明确界定的量,其充分必要条件是,我们做出以下两种极端假设之一:玩家 2 发现了他的对手,或玩家 1 发现了他的对手。在第一种情况下,一局博弈的值,对于玩家 1 来说是 v_1,对于玩家 2 来说是 $-v_1$;在第二种情况下,一局博弈的值,对于玩家 1 来说是 v_2,对于玩家 2 来说是 $-v_2$。

14.4.2 这一讨论表明,如果在没有进一步的条件和改动的情况下,Γ 本身的一局博弈的值能够被确定下来,它必定介于 v_1 与 v_2 之间。(我们假设这是对于玩家 1 来说的值。)也就是说,如果我们用 v 记(对于玩家 1 来说的)Γ 本身的可能取值,那么,必定有:

$$v_1 \leqq v \leqq v_2。$$

v 取值的这个区间的长度是

$$\Delta = v_2 - v_1 \geqq 0。$$

同时,Δ 代表着(博弈 Γ 中)“发现”对手而不被对手“发现”而获得的收益。①

该博弈也可能是这样的,无所谓其中哪一位玩家发现了对方,即上述收益为零

---

① 注意,这个收益表达式适用于两位玩家之中的任何一个。对于玩家 1 来说,这一收益是 $v_2 - v_1$;对于玩家 2 来说,它是 $(-v_1) - (-v_2) = v_2 - v_1$,从而两者是相等的,即都等于 Δ。——106,①

$$\Delta = 0,$$

或等价地表述为

$$v_1 = v_2,$$

如果将 v_1, v_2 的定义代入上式，那么，

$$\mathrm{Max}_{\tau_2}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)。$$

如果博弈 Γ 具有这些性质，那么，我们称 Γ 为严格决定的博弈。

这一条件的上述最后形式需要与 13.3.1 中的(13:3)和 13.4.1—13.5.2 中的讨论进行比较。(那里的 φ、x、y 对应着我们这里的 H、τ_1、τ_2。)事实上，13.4.3 中(13:B*)就意味着，博弈 Γ 是严格决定的，其充分必要条件是 $H(\tau_1, \tau_2)$的一个鞍点存在。

14.5 严格决定性分析

14.5.1 我们假设博弈 Γ 是严格决定的，即 $H(\tau_1, \tau_2)$的一个鞍点存在。

在这种情况下，考虑到 14.4.2 中的分析，我们希望有可能把量 *107*

$$v = v_1 = v_2$$

解释为博弈 Γ(对于玩家 1 来说)的一局博弈的值。回想 v_1, v_2 的定义和 13.4.3 中鞍点值的定义，并且利用 13.5.2 中的(13:C*)，我们看到，上述方程也可以被写成

$$v = \mathrm{Max}_{\tau_2}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)$$
$$= \mathrm{Sa}_{\tau_1/\tau_2} H(\tau_1, \tau_2)。$$

重复 14.3.1 末尾和 14.3.3 末尾给出的步骤，不难证明，上述结果能够被解释为(对于玩家 1 来说)Γ 的一局博

弈的值。

特别是：14.3.1 和 14.3.3 中分别适用于 Γ_1 和 Γ_2 的（14:A:c）、（14:A:d）、（14:A:e）、（14:B:c）、（14:B:d）和（14:B:e）现在能够应用于 Γ 本身。我们首先重新表述（14:A:d）和（14:B:d）：

（14:C:d）　无论玩家 2 如何玩，玩家 1 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益≧v；

无论玩家 1 如何玩，玩家 2 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益≧ -v。

要证明这一结果，我们再次建立 14.3.1 中（14:A:a）的集合 A 和 14.3.3 中（14:B:a）的集合 B。实际上，它们正是 13.5.1 的集合 A^{φ} 和 B^{φ}（φ 对应着我们的 H）。我们重述如下：

（14:D:a）　A 是这样的 τ_1 组成的集合，对于这些 τ_1，$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最大值，即

$$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}。$$

（14:D:b）　B 是这样的 τ_2 组成的集合，对于这些 τ_2，$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最小值，即

$$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Min}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}。$$

现在，（14:C:d）的证明十分容易：

令玩家 1 从 A 中选择 τ_1，那么，无论玩家 2 做什么，即对任一 τ_2，我们有 $H(\tau_1,\tau_2) \geqq \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}$，即玩家 1 的收益≧ -v。

令玩家 2 从 B 中选择 τ_2，那么，无论玩家 1 做什么，即对任一 τ_1，我们有 $H(\tau_1,\tau_2) \leqq \mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2)$，即玩家 1 的收益≦v，从而玩家 2 的收益≧ -v。

证明完毕。

现在，我们转向方程（14：A：e）和（14：B：e）的等价说法。事实上，如上面说明的那样，（14：C：d）能够等价地表述为：

（14：C：e）　无论玩家 1 做什么，玩家 2 总能通过恰当的玩法保证玩家 1 的收益 ≦ v，即阻止它的收益 > v。

无论玩家 2 做什么，玩家 1 总能通过恰当的玩法保证玩家 2 的收益 ≦ − v，即阻止他的收益 > − v。 108

（14：C：d）和（14：C：e）使我们令人满意地把 v 解释为 Γ 的一局博弈的值对于玩家 1 来说是 v，对于玩家 2 来说是 − v。

14.5.2　现在，我们考虑（14：A：a）、（14：A：b）、（14：B：a）和（14：B：b）的等价说法。

根据 14.5.1 中的（14：C：d），对于玩家 1 来说，我们可以合理地把博弈 Γ 的一个好的玩法定义为这样一个方法，这个方法保证他获得一个收益，这个收益大于或等于该博弈的一局对于玩家 1 来说的值。也就是说，对于玩家 1 来说，一个好的玩法是 τ_1 的一个选择，对于任何 τ_2，$H(\tau_1,\tau_2) \geqq v$。这可以被等价地表述为 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) \geqq v$。

这样，我们总有 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) \leqq \mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) = v$。

因此，根据 14.5.1 中的（14：C：a），对于 τ_1，上述条件等于 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2) = v$，即 τ_1 属于 A。

由 14.5.1 中的(14:C:d),我们可以合理地把对于玩家 2 来说博弈 Γ 的一个好的玩法定义为这样一个方法,这个方法保证他获得一个收益,这个收益大于或等于对于玩家 2 来说一局博弈的值。也就是说,对于玩家 2 来说,一个好的玩法是 τ_2 的一个选择,对于所有 τ_1, $-H(\tau_1,\tau_2) \geqq -\mathrm{v}$。也就是说,对于所有 τ_1,$H(\tau_1,\tau_2) \leqq \mathrm{v}$。$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) \leqq \mathrm{v}$。

所以,我们总有 $\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) \geqq \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}$。关于 τ_2 的上述条件等于说 $\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}$。由 14.5.1 中的(14:D:b),$\tau_2$ 属于 B。

所以,我们有:

(14:C:a) 对于玩家 1 来说,博弈 Γ 的一个好的玩法(策略)是选择一个属于 A 的 τ_1,而 A 是 14.5.1 中(14:D:a)的集合。

(14:C:b) 对于玩家 2 来说,博弈 Γ 的一个好的玩法(策略)是选择一个属于 B 的 τ_2,而 B 是 14.5.1 中(14:D:b)的集合。①

最后,如在本节开头说过的那样,好的玩法的直接结果是(14:A:c)或(14:B:c)的下述等价说法:

(14:C:c) 如果玩家 1 和玩家 2 都是玩博弈 Γ 的高手,即 τ_1 属于 A 且 τ_2 属于 B,那么,$H(\tau_1,\tau_2)$的值将等于该博弈对于玩家 1 来说的值,即 v。

---

① 这一博弈中每位玩家都必须在不知道另一位玩家的选择(τ_2 或 τ_1)的情况下做出自己的选择(τ_1 或 τ_2)。请将其与 14.3.1 中有关 Γ_1 的(14:A:b)比较,并将其与 14.3.3 中有关 Γ_2 的(14:B:b)比较。——108,①

结合 13.5.2 中的(13:D*),14.5.1 中(14:D:a)和(14:D:b)的前面关于集合 A 和 B 的说明,我们有:

(14:C:f)　　玩家 1 和玩家 2 都是玩博弈 Γ 的高手——即 τ_1 属于 A 且 τ_2 属于 B——的充分必要条件是,τ_1, τ_2 是 $H(\tau_1, \tau_2)$ 的一个鞍点。

14.6　玩家对换和对称性

14.6　14.5.1 和 14.5.2 中的(14:C:a)—(14:C:f) 109
决定了有关严格决定的二人零和博弈的所有事情。总之,在 14.3.1 和 14.3.3 中,关于 Γ_1 和 Γ_2,我们从(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)推出了(14:A:d)、(14:A:e)、(14:B:d)和(14:B:e);在 14.5.1 和 14.5.2 中,关于 Γ 本身,我们从(14:C:d)和(14:C:e)得出了(14:C:a)和(14:C:b)。这是一个很大的进步,因为 14.3.1 和 14.3.3 中支持(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)的那些说明远比 14.5.1 和 14.5.2 中支持(14:C:d)和(14:C:e)的那些说明更具有启发性。

函数 $H(\tau_1, \tau_2) \equiv H_1(\tau_1, \tau_2)$ 的运用暗含着这一方案一定的非对称性。因此,玩家 1 扮演着特殊的角色。然而,直觉上,有一点是清楚的,即如果我们赋予玩家 2 同样的特殊角色,那么,我们就会推导出等价的结果。由于玩家 1 与玩家 2 对换在以后的讨论有着一定的意义,我们要对此进行简单的数学讨论。

在博弈 Γ 中对换玩家 1 和玩家 2——对此,我们不必假设 Γ 是严格决定的——等于用函数 $H_2(\tau_2, \tau_1)$ 和 $H_1(\tau_2,$

τ_1)替换函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$ 和 $H_2(\tau_1,\tau_2)$。[①②] 因此,这一交换的含义是用 $-H(\tau_2,\tau_1)$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$。

现在,这一符号变化产生的影响是 Max 和 Min 这两种运算的对换。因此,14.4.1 中定义的量

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)=\mathrm{v}_1,$$
$$\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)=\mathrm{v}_2,$$

现在变成了

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}[-H(\tau_2,\tau_1)]=-\mathrm{Min}_{\tau_1}\mathrm{Max}_{\tau_2}H(\tau_2,\tau_1)$$
$$=-\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)^{③}=-\mathrm{v}_2。$$
$$\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}[-H(\tau_2,\tau_1)]=-\mathrm{Max}_{\tau_2}\mathrm{Min}_{\tau_1}H(\tau_2,\tau_1)$$
$$=-\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)^{④}=\mathrm{v}_1。$$

这样,v_1、v_2 变成了 $-\mathrm{v}_2$、$-\mathrm{v}_1$。[⑤] 所以,

$$\Delta=\mathrm{v}_2-\mathrm{v}_1=(-\mathrm{v}_1)-(-\mathrm{v}_2)$$

110 的值并未受到影响[⑥],而且如果 Γ 本来是严格决定的,它现在仍然是严格决定的,因为严格决定性等价于 $\Delta=0$。

---

① 这已不是 14.3.4 中使用的玩家对换。在那里,我们只关心在每个动作时的安排和信息状态,而且我们假设玩家 1 和玩家 2 在对换位置时带着它们的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$ 和 $H_2(\tau_1,\tau_2)$(见第 104 页脚注①)。从这个意义上说,Γ 是对称的,即不受这一对换影响。

这里,我们完全对换了玩家 1 和玩家 2 的角色,包括他们的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$ 和 $H_2(\tau_1,\tau_2)$。——109,①

② 我们不得不交换变量 τ_1、τ_2,因为 τ_1 代表着玩家 1 的选择,τ_2 代表着玩家 2 的选择。现在 τ_2 的值域是 $1,\cdots,\beta_1$。因此,像过去的 $H_k(\tau_1,\tau_2)$ 那样,逗号前面变量的值域是 $1,\cdots,\beta_1$,逗号后面变量的值域是 $1,\cdots,\beta_2$。——109,②

③ 这只是记号的交换:τ_1、τ_2 分别用 τ_2、τ_1 替换。——109,③

④ 同上。——109,③

⑤ 如预料中的那样,这与第 105 页脚注①一致。——109,④

⑥ 如预料中的那样,这与第 106 页脚注①一致。——110,①

在这种情况下，$v = v_1 = v_2$ 变成了

$$-v = -v_1 = -v_2。$$

现在，不难验证，14.5.1 和 14.5.2 中的(14:C:a)—(14:C:f)在玩家 1 和玩家 2 交换之后仍然成立。

14.7　非严格决定的博弈

14.7.1　所有这些彻底解决了严格决定的博弈，但是没有解决其他博弈。对于一个非严格决定的博弈，我们有 $\Delta > 0$，即在这样一个博弈中，“发现”对手有着正的收益。因此，这些结果即 Γ_1 和 Γ_2 的值之间存在着本质不同，从而在这些博弈的玩法之间也存在着本质不同。14.3.1 和 14.3.3中的分析为 Γ 的研究指出了方向。14.5.1，14.5.2 的结果并不同时适用于两者，因为它们利用了 $H(\tau_1, \tau_2)$ 的鞍点的存在性并且利用了

$$\mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2),$$

即 Γ 是严格决定的。14.4.2 开头的不等式当然有着明显的合理性。据此，对于玩家 1 来说，博弈 Γ 的一局博弈的值严格由

$$v_1 \leqq v \leqq v_2$$

限定，如果这一概念能够一般地建立起来的话。①

不过，这为 v 留下了一个长度为 $\Delta = v_2 - v_1 > 0$ 的区间。而且，除此之外，从概念上说，总的情况也变得极不令人满意。

我们也许倾向于彻底放弃：这是因为，在这样一个博

---

① 见 17.8.1。——110，②

弈 Γ_1 中，存在着“发现”对手的好处，从表面上看，要找到一个解似乎是不可能的事情，除非明确假定“谁发现谁”和发现的程度。①

我们将在第 17 节中看到，事情并非如此，尽管 $\Delta>0$，按照上面的做法，一个解还是能够得到的。不过，我们建议，在我们向这一困难发起攻击之前，首先列举一些 $\Delta>0$ 和 $\Delta=0$ 的博弈。对于前一类——即非严格决定的博弈，我们只进行简单研究，其详细研究将在17.1.1进行。严格决定的后一类博弈将得到较为详细的分析。

14.7.2 由于有些函数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 没有鞍点[见 13.4.1 和 13.4.2，那里的 $\varphi(x,y)$ 就是我们的 $H(\tau_1,\tau_2)$]，所以存在着非严格决定的博弈 Γ。考虑到紧接着的应用，我们重新研究那些例子，即第 94 页图 12、图 13 的矩阵所描述的函
111 数。也就是说，我们要明确描述它们所属博弈类型。[在每一个例子中，我们用 $H(\tau_1,\tau_2)$ 替换 $\varphi(x,y)$。在每一矩阵中，τ_2 是列号，τ_1 是行号。也可见第 99 页图 15。]

图 12：这是“硬币配对”游戏。令 1 代表“正面”，2 代表反面，那么，如果 τ_1 与 τ_2“对上了”，即相等了，矩阵的元素取值 1，如果没有“对上”则取值 -1。玩家 1 拿一枚硬币与玩家 2 对：如果两者“对上了”，那么，他赢一枚；如果两者没有“对上”，他输一枚。

图 13：这是“石头、剪子、布”游戏。令 τ_1（或 τ_2）$=1$ 代表“石头”，2 代表“布”，3 代表“剪子”。该矩阵的元素

---

① 说得更明白些：$\Delta>0$ 意味着，在这一博弈中，两位玩家不可能同样聪明。因此，我们要具体知道某一位玩家比其对手聪明的程度。——110，③

1 和 -1 的分布代表着:"布"胜"石头","剪子"胜"布","石头"胜"剪子"。[①] 如果玩家 1 胜玩家 2,他赢一个单位;如果他败了,输一个单位。否则(如果两者做出相同选择)算无胜负。

14.7.3 这两个例子明确表明了我们在一个非严格决定的博弈中可能遇到的困难。只是因为它们极其简单,我们才能够把这一困难彻底分离出来。在"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏中,重要的是,任何一种玩法——即任何 τ_1 或 τ_2——都与另一种玩法一样好:"正面"或"反面","石头"、"布"或"剪子"本身并无优劣之分。有意义的事情惟有猜测对手将会做出的选择;但是,没有进一步的假设,我们将如何描述玩家们的"才智"呢?[②]

当然,存在着更加复杂的非严格决定博弈,而且从各种较为微妙的技术角度看,这些博弈也是重要的(见第 18、19 节)。但是,如果我们要解决的是主要困难,那么,"硬币配对"和"石头、剪子、布"这两个简单博弈则是十分完美的典型。

14.8 严格决定性的详细分析方案

14.8 虽然严格决定的——我们的解对其成立的——博弈 Γ 只是一种特殊情况,我们却不应该低估它们

① "布"包住"石头","剪子"剪"布","石头"砸"剪子"。——111,①

② 如我们在上面提到过的那样,我们将在 17.1 中证明,这是能够做到的。——111,②

包括的范围。我们正在使用的是博弈 Γ 的正规型。这一事实也许会引诱这样的低估:它把事情弄得较其真正的面目简单。我们必须牢记,τ_1,τ_2 代表的是博弈 Γ 的扩展型中的策略,如 14.1.1 中提到的那样,它有可能是一个极为复杂的结构。

为了理解严格决定性的含义,我们有必要结合博弈的扩展型来对其进行研究。这提出了关于机会或个人动作
112 的详细性质和玩家的信息状况等问题。也就是说,正如 12.1.1 中提到过的那样,我们遇到了以扩展型为基础的结构分析。

我们尤其感兴趣的是这样一些博弈,其中,每当一个玩家要做出一个个人动作时,他完全知道此前所有动作的选择结果。这些博弈已经在 6.4.1 中被提及,而且,我们在那里指出过,它们一般被看作具有特定的合理特征。接下来,我们将证明,所有这类博弈都是严格决定的,从而在某种严格意义上证明这一合理特征。这样,不仅当所有动作都是个人动作时,这一点是正确的,而且,当机会动作出现时,这一点也是正确的。

15. 具有完美信息的博弈

15.1 目的

15.1.1 我们要进一步讨论二人零和博弈,目的是找出完全决定的博弈所组成的一个尽可能大的子类,对于这

类博弈来说，14.4.1 中评价博弈的重要数量

$$v_1 = \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2),$$

$$v_2 = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$$

满足

$$v_1 = v_2 = v。$$

我们将证明，当 Γ 中存在着完美信息时，即当预备性等价于先前性（见 6.4.1 和 14.8 末尾）时，那么，Γ 是严格决定的。我们还将讨论这一结果在概念上的意义（见 15.8）。事实上，我们将把这作为有关 v_1 和 v_2 的一个更加一般法则的一个特殊情况来推导（见15.5.3）。

在开始的时候，我们的讨论更具有一般性，我们可以讨论一个完全不受约束的 n 人博弈 Γ。在以后的例子中，较大的一般性是有用的。

15.1.2　设 Γ 是一个 n 人博弈，而且，其扩展型是给定的。我们将考虑 Γ 的一些特定方面。我们首先用第 6 节和第 7 节中的理论术语进行讨论（见 15.1），然后将其转换为第 9 节和第 10 节中的集合和分拆术语（见15.2）。借助前者，读者将有可能获得一个全面的理解；更加形式化的后者只不过是为了绝对严格，以表明我们实际上是严格按照 10.1.1 的公理进行的。

我们考虑 Γ 中所有的动作所组成的序列：$M_1, M_2, \cdots, M_\nu$。让我们首先讨论第一个动作以及此时的情况。

由于没有什么事情先于动作 M_1 发生，也就没有什么东西是它的预备。也就是说，这一动作的特征不依赖于任何事情，是常数。无论 M_1 是一个机会动作，还是一个个人 113
动作，上述说法都正确；在后一种情况下，也无所谓 M_1 属

于哪一位玩家，即 6.2.1 中 $k=0,1,\cdots,n$ 的取值；无所谓 M_1 时备择的个数 α_1。当 M_1 是一个机会动作（即 $k=0$）时，无所谓各个备择的概率 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_1)$。$M_1$ 时的选择的结果是 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$ 之一。

现在，按照各数学分支中广泛使用的“完全归纳”法的精神，博弈 Γ 的数学分析的一个明显步骤浮现在我们眼前。这个步骤是，如果可行的话，用比 Γ 少一个动作的其他博弈的分析来取代 Γ 的分析。① 这一步骤由选定一个 $\bar{\sigma}_1=1,\cdots,\alpha_1$ 组成，并且用 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 记这样一个博弈，其中除了 M_1 被去掉之外，它与 Γ 在各个细节都相同，不过，（按照新博弈的规则），选定的 σ_1 用 $\sigma_1=\bar{\sigma}_1$ 表示。② $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 的确比 Γ 少一个动作：它的动作是 $M_2,\cdots,M_\nu$。③

---

① 即 $\nu-1$ 个动作。如果可行的话，重复这一“归纳”步骤，将使 Γ 减少到 0 步，即一个固定的、不可选择的结果。而且，这自然意味着 Γ 的一个完备解。见 15.6.1 中的(15:C:a)。——113,①

② 例如，Γ 是国际象棋，$\bar{\sigma}_1$ 是“白方”即玩家 1 的开局，即 M_1 时的选择，那么，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 还是国际象棋，不过，其开局是普通国际象棋的第二个动作——“黑方”，玩家 2——且正处于由“开局”$\bar{\sigma}_1$ 带来的局面。这就是说，“开局”可以是传统走法，但未必总是传统走法（如 E2—E4）。

在桥牌锦标赛中有同样的做法，其中裁判为选手们分牌，裁判知道这些事先发好的牌。例如复式桥牌比赛中就是这么做的。

在第一个例子中，已经指明的动作 M_1 最初是（“白方”，玩家 1 的）一个个人动作；在第二个例子中，它最初是一个机会动作（“发牌”）。

在有些博弈中，偶尔会有“让子”（如围棋、象棋中的“让子”或“让先”），这相当于一个或多个这类做法。——113,②

③ 实际上，我们应该使用指数 $1,\cdots,\nu-1$，并通过将它们写成 $M_1^{\bar{\sigma}_1},M_2^{\bar{\sigma}_1},\cdots,M_{\nu-1}^{\bar{\sigma}_1}$ 来指明它们依赖于 $\bar{\sigma}_1$。不过，我们倾向于使用较简单的记号 $M_2,\cdots,M_\nu$。——113,③

如果我们能够从全部 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$，$\bar{\sigma}_1 = 1, \cdots, \alpha_1$ 的特征中推导出 Γ 的基本特征，那么，我们的归纳法就取得了成功。

15.1.3 然而，必须注意，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 的建立依赖于 Γ 受到的特定约束。事实上，在 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 中，做出一个特定动作的每一位玩家必须被充分告知这一博弈的规则。这样，这一知识等于最初的博弈 Γ 的规则加上 M_1 时已经指明的选择的值 $\bar{\sigma}_1$。$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 能够在 Γ 的基础上建立起来——而不修改支配玩家在 Γ 中的信息状况的那些规则，除非按照 Γ 的最初规则，M_1 时的选择结果是每个玩家在其个人动作 $M_2, \cdots, M_\nu$ 时知道的，即 M_1 必须是所有个人动作 $M_2, \cdots, M_\nu$ 的预备。我们将此重述为：

(15:A)　　$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 能够在不修改 Γ 的结构的情况下建立起来的必要条件是，Γ 具有如下性质：

(15:A:a)　　M_1 是动作 $M_2, \cdots, M_\nu$ 的预备。①

15.2 严格条件(第一步)

15.2.1 现在，我们把 15.1.2 和 15.1.3 转换为第 9 节和第 10 节的分拆和集合术语(见 15.1.2 的开头)。因此，我们使用 10.1 中的符号。 *114*

$\mathscr{A}_1$ 由 Ω 一个集合组成[10.1.1 中(10:1:f)]，而且，它是 $\mathscr{B}_1$[10.1.1 中(10:1:a)]的一个子分拆。因此，$\mathscr{B}_1$

---

① 这是 6.3 中的术语，即我们使用了 7.2.1 中依赖关系的特殊形式。使用 7.2.1 的一般描述，我们必须这样陈述(15:A:a)：对于每一个个人动作 M_κ，$\kappa = 2, \cdots, \nu$，集合 Φ 包含 $\bar{\sigma}_1$。——113，④

也由 Ω 一个集合组成（其余集合是空的）。①② 即

$$B_1(k)=\begin{cases}\Omega & \text{只对某一个 } k \text{，如 } k=k_1\text{，}\\ \ominus & k\neq k_1\text{。}\end{cases}$$

这个 $k_1=0,1,\cdots,n$ 决定着 M_1 的特征；它是 6.2.1 中的 k_1。如果 $k_1=1,\cdots,n$，即如果该动作是一个个人动作，那么，$\mathscr{A}_1$ 也是 $\mathscr{D}_1(k_1)$ 的一个子分拆。[见 10.1.1 中(10:1:d)。这只是在 $B_1(k_1)$ 内做出的假设，但 $B_1(k_1)=\Omega$。] 因此，$\mathscr{D}_1(k_1)$ 也仅由 Ω 这一个集合组成。③ 对于 $k\neq k_1$，$\mathscr{D}_1(k)$ 是 $B_1(k)=\ominus$ 中的一个分拆[10.1.1 中(10:A:g)]，从而必定是空的。

这样，我们恰好有 $\mathscr{A}_1$ 的一个 A_1，它就是 Ω，$k_1=1,\cdots,n$，所有 $\mathscr{D}_1(k)$ 的一个 D_1，它也是 Ω；然而，对于 $k_1=0$，所有的 $\mathscr{D}_1(k)$ 中没有 D_1。

M_1 由从 $\mathscr{C}_1(k_1)$ 中选择一个 C_1 组成；如果 $k_1=0$，由机会决定；如果 $k_1=1,\cdots,n$，由玩家 k_1 决定。在前一种情况下，C_1 自动地是惟一的 $A_1(=\Omega)$ 的一个子集；在后一种情况下，C_1 是惟一的 $D_1(=\Omega)$ 的一个子集。这些 C_1 的个数是 α_1（见 9.1.5，特别是第 70 页脚注②）。又由于问题中的 A_1 和 D_1 是固定的，这个 α_1 是一个确定的常数。α_1 正

---

① 这个 $\mathscr{B}_1$ 是 8.3.1 中(8:B:a)的一个例外。见第 63 页脚注①和第 69 页脚注④中的说明。——114，①

② 证明：Ω 属于 $\mathscr{A}_1$，而 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{B}_1$ 的一个子分拆，因此，Ω 是 $\mathscr{B}_1$ 的某个元素的一个子集。这个元素必然等于 Ω。$\mathscr{B}_1$ 的所有其他元素都与 Ω 不相交（见 8.3.1），即空的。——114，②

③ 不像 $\mathscr{B}_1$（见上），$\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{D}(k_1)$ 必须满足 8.3.1 中的(8:B:a)和(8:B:b)，从而两者都不再有 Ω 之外的其他元素。——114，③

是 M_1 时备择的个数，是 6.2.1 和 15.1.2 的 α_1。

这些 C_1 对应着 15.1.2 的 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$，而且我们相应地将它们记为 $C_1(1),\cdots,C_1(\alpha_1)$。[①] 10.1.1 中的 (1:1:h) 表明，如实际得到验证了的那样，$\mathscr{A}_2$ 也是 $C_1(1),\cdots,C_1(\alpha_1)$ 组成的集合，即等于 $\mathscr{C}_1$。

到目前为止，我们的分析完全具有一般性，对任何博弈 Γ 的 M_1 都成立（甚至在一定程度上对 M_2 也成立）。读者应该将这些性质转换为 8.4.2 和 10.4.2 意义上的日常生活用语。

现在，我们转向 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$。如 15.1.2 中描述的那样，通过令 $\sigma_1=\bar{\sigma}_1$，指明动作 M_1，我们就可以从 Γ 得到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$。同时，这一博弈的动作被限定为 $M_2,\cdots,M_\nu$。这意味着，代表实 *115*
际选择的元素 π 不再能够在整个 Ω 中变化，而是限于 $C_1(\bar{\sigma}_1)$。而且，9.2.1 中罗列的分拆也仅限于 $\kappa=2,\cdots,\nu$ 的那些分拆[②]（对于 $\mathscr{A}_\kappa,\kappa=\nu+1$）。

15.2.2 现在，我们给出 15.1.3 的约束条件的等价说法。

要做出 15.2.1 末尾描述的改动，我们要对 Γ 做出一定的限制。

如我们指出过的那样，我们希望将一局博弈，即 π，限制于 $C_1(\bar{\sigma}_1)$ 之内。从而，Γ 的描述中建立起来的那些集合和是 Ω 的子集的那些集合都必定转而变成 $C_1(\bar{\sigma}_1)$ 的子

---

① 他们代表着 6.2，9.1.4 和 9.1.5 中的备择 $\mathscr{A}_1(1),\cdots,\mathscr{A}_1(\alpha_1)$。——114，④

② 我们不想把这一罗列变为 $\kappa=1,\cdots,\nu-1$，见第 113 页脚注③。——115，①

集，分拆变成 $C_1(\overline{\sigma}_1)$[或 $C_1(\overline{\sigma}_1)$的子集]内的分拆。如何做到这一点呢？

Γ 的描述中（见 9.2.1），分拆分为两类：一类代表客观事实，即 $\mathscr{A}_\kappa, \mathscr{B}_\kappa=[B_\kappa(0), B_\kappa(1), \cdots, B_\kappa(n)]$ 和 $C_\kappa(k), k=0,1,\cdots,n$；另一类仅代表着玩家的信息状况[①]，$\mathscr{D}_\kappa(k), k=1,\cdots,n$。当然了，我们假设 $\kappa \geqq 2$（见 15.2.1）。

在第一类分拆中，我们只需用每个元素与 $C_1(\overline{\sigma}_1)$的交集来替换这一元素。因此，$\mathscr{B}_\kappa$ 的变化是用 $C_1(\overline{\sigma}_1)\cap B_\kappa(0), C_1(\overline{\sigma}_1)\cap B_\kappa(1), \cdots, C_1(\overline{\sigma}_1)\cap B_\kappa(n)$ 替换 $B_\kappa(0), \cdots, B_\kappa(n)$。在 $\mathscr{A}_\kappa$ 中，这甚至是不必要的：它是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆（因为 $\kappa \geqq 2$，见 10.4.1），即它是两两不相交集合系 $[C_1(1), \cdots, C(\alpha_1)]$ 的一个子分拆（见 10.4.1）；因此，我们只保留 $\mathscr{A}_\kappa$ 中属于 $C_1(\overline{\sigma}_1)$的子集的那些元素，即 $\mathscr{A}_\kappa$ 中落入 $C_1(\overline{\sigma}_1)$的那一部分。$\mathscr{C}_k(k)$应该被当作 $\mathscr{B}_\kappa$ 来对待，不过，我们把这方面的讨论放在后面。

在第二类分拆即 $\mathscr{D}_\kappa(k)$中，我们却不能做上述事情。用 $\mathscr{D}_\kappa(k)$的元素与 $C(\overline{\sigma}_1)$的交集替换 $\mathscr{D}_\kappa(k)$的这一元素会改变一个玩家的信息状况[②]，所以应避免这样做。惟一允许的做法是那些在 $\mathscr{A}_\kappa$ 情况下允许的做法：用 $\mathscr{D}_\kappa(k)$中属于 $C(\overline{\sigma}_1)$的那一部分来替换 $\mathscr{D}_\kappa(k)$。不过，只有当 $\mathscr{D}_\kappa(k)$像前面的 $\mathscr{A}_\kappa(\kappa \geqq 2)$那样是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆时才能这样做。所以，我们必须做出这一假设。

---

① $\mathscr{A}_\kappa$ 代表着裁判的信息状况，但这是一个客观事实：到这一时刻为止的时间已经决定了博弈的进程（见 9.1.2）。——115，②

② 即给予它额外信息。——115，③

现在,$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆[见 10.1.1 中(10:1:c)],从而也是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆(按照上述假设),因此,我们能够用其落入 $C(\overline{\sigma}_1)$ 内的那一部分来取代它本身。

这样,我们看到:对 Γ 的必要约束是,每个 $\mathscr{D}_\kappa(k)(\kappa \geq 2)$ 必须是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆。请回忆 8.4.2 和 10.1.2 中(10:A:d*),(10:A:g*)的解释。它们赋予这一约束的含义是,在个人动作 $M_2,\cdots,M_\nu$,每位玩家被充分告知 M_1 之后(即 M_2 之前)的、用 $\mathscr{A}_2$ 表达的事态。[见 10.4.2 中(10:B)前面的讨论。]也就是说,M_1 必须是所有动作 $M_2,\cdots,M_\nu$ 的预备。 116

因此,我们再次得到了 15.1.3 的条件(15:A:a)。我们请读者验证 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$ 满足 10.1.1 的要求。

15.3 严格条件(完整归纳)

15.3.1 正如我们在 15.1.2 末尾指出的那样,我们希望从所有 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}(\overline{\sigma}_1 = 1,\cdots,\alpha_1)$ 的特征得出 Γ 的特征,因为这是一个"完备归纳"的一个典型步骤。

然而,此刻我们已经掌握了其(数学)特征的惟一一类博弈是二人零和博弈:对于这些博弈,我们有 v_1 和 v_2 这两个量(见 15.1.1)。所以,我们假设 Γ 是一个二人零和博弈。

我们即将看到,Γ 的 v_1 和 v_2 的确能够借助 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}(\overline{\sigma}_1 = 1,\cdots,\alpha_1)$ 的 v_1 和 v_2 表达出来(见 15.1.2)。这一情形使得我们有希望将这一归纳继续下去,直至其结论,即以相

同方式建立 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2}$, $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3}$, $\cdots$, $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$。[①] 关键是，在这些博弈中，步数（动作个数）依次递减，从 Γ 的 ν，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 的 $\nu-1$，经 $\nu-2$，$\nu-3$，…最终到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 的 0。也就是说，就像第 76 页脚注②中提到的那个例子那样，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 是一个"空"博弈。其中没有动作，玩家 k 得到一个固定数额 $\mathcal{J}_k(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu)$。

这是 15.1.2，15.1.3——即第 6 节和第 7 节的术语。用 15.2.1，15.2.2 即第 9 节和第 10 节的术语说，Γ 的 Ω 逐步受到限制：对于 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$，$\mathscr{B}_2$ 的 $C_1(\bar{\sigma}_1)$；对于 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2}$，$\mathscr{B}_3$ 的 $C_2(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$，对于 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3}$，$\mathscr{B}_4$ 的 $C_3(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3)$ 等等，最终到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$，$\mathscr{B}_{\nu+1}$ 的 $C_\nu(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu)$。而且，最后一个集合只有惟一一个元素，如 $\bar{\pi}$[见 10.1.1 中(10:1:g)]。因此，博弈 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 的结果是固定的：玩家 k 得到固定的数额 $\mathcal{J}_k(\bar{\pi})$。

这样一来，博弈 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 的本质就清楚了，即对于每一位玩家来说，这一博弈的值都是明确的。如果从 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 到 Γ 程序已经建立起来，那么，我们就能够将其用于从 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_{\nu-1}}$，再到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_{\nu-2}}$，$\cdots$，从 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2}$ 到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$，最终到 Γ。

不过，只有当我们能够构造博弈序列 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2}$，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3}$，$\cdots$，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$，即只有当所有这些博弈都满足 15.1.3 或 15.2.2 的最终条件时，上述做法才是可行的。这个要求也可以就一般的 n 人博弈进行描述。因此，我们回到这些 Γ。

---

① $\bar{\sigma}_1=1,\cdots,\alpha_1$；$\bar{\sigma}_2=1,\cdots,\alpha_2$，其中，$\alpha_2=\alpha_2(\bar{\sigma}_1)$；$\bar{\sigma}_3=1,\cdots,\alpha_3$，其中 $\alpha_3=\alpha_3(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ 等等。——116，①

15.3.2 用15.1.2,15.1.3(即第6节和第7节)的术语说,这一要求是,M_1 必须是所有 $M_2,\cdots,M_\nu$ 的预备;M_2 117
必须是所有 $M_3,\cdots,M_\nu$ 的预备;等等。也就是说,预备性必须与先前性一致。

用15.2.1,15.2.2(即第9节和第10节)的术语说,所有 $\mathscr{D}_\kappa(k)$,$k\geqq 2$ 都必须是 $\mathscr{A}_2$ 的子分拆;所有 $D_\kappa(k)$,$\kappa\geqq 3$都必须是 $\mathscr{A}_3$ 的子分拆,等等。也就是说,如果 $k\geqq\lambda$,那么,$\mathscr{D}_\kappa(k)$必定是 $\mathscr{A}_\lambda$ 的子分拆。① 由于 $\mathscr{A}_\kappa$ 总是 $\mathscr{A}_\lambda$ 的一个子分拆(见10.4.1),所以要求所有 $\mathscr{D}_\kappa(k)$是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆也就足够了。然而,在 $\mathscr{B}_\kappa(k)$内,$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$的一个子分拆[见10.1.1中的(10:1:d)]。所以,我们的要求等于说 $\mathscr{D}_\kappa(k)$是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的落入 $B_\kappa(k)$中的那一部分。② 根据10.4.2中的(10:B),这恰好意味着,在 Γ 中,预备性与先前性一致。

基于这些分析,我们已经证明了:

(15:B)　　能够建立分别有

$$\nu,\nu-1,\nu-2,\cdots,0$$

个动作的博弈组成的序列

$$\Gamma,\Gamma_{\bar{\sigma}_1},\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2},\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3},\cdots,\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}, \tag{15:1}$$

充分必要条件是,在博弈 Γ 中,预备性与先前性一致,即信息完美(见6.4.1和14.8末尾)。

如果 Γ 是一个二人零和博弈,那么,这允

---

① 我们在上面说的是 $\lambda=2,3\cdots$的情况。对于 $\lambda=1$,它是自动地成立的:每一个分拆都是 $\mathscr{A}_1$ 的分拆,因为 $\mathscr{A}_1$ 由集合 Ω 一个集合组成。见10.1.1中的(10:1:f)。——117,①

② 见第63页脚注③。——117,②

许我们按照序列(15:1)逆向递推——从空博弈 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 到显著博弈 Γ——来阐明博弈 Γ，其中每一步要借助于我们将在 15.6.2 中说明的从 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 到 Γ 的方法。

15.4 归纳步骤的严格讨论

15.4.1 接下来，我们给出前面提到的从 Γ_{σ_1} 到 Γ 的步骤[1]，即"归纳步骤"。Γ 只需满足 15.1.3 或 15.2.2 的最终条件，但它必须是一个二人零和博弈。

所以，我们能够建立所有的 Γ_{σ_1}，$\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$，而且它们也是二人零和博弈。我们将 Γ 中两个玩家的策略记为 $\sum_1^1,\cdots,\sum_1^{\beta_1},\sum_2^1,\cdots,\sum_2^{\beta_2}$。如果策略 $\sum_1^{\tau_1},\sum_2^{\tau_2}$ 得到使用，对于两位玩家来说，这一局博弈的结果的"数学期望"分别记为

$$H_1(\tau_1,\tau_2)\equiv H(\tau_1,\tau_2),\qquad H_2(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_1,\tau_2)$$

(见 11.2.3 和 14.1.1)。我们将 Γ_{σ_1} 中相应的数量记为 $\sum_{\alpha_1/1}^{1},\cdots,\sum_{\sigma_1/1}^{\beta_{\sigma_1/1}},\sum_{\alpha_1/2}^{1},\cdots,\sum_{\sigma_1/2}^{\beta_{\sigma_1/2}}$，而且，如果策略 $\sum_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$，$\sum_{\sigma_1/2}^{\tau_{\sigma_1/2}}$ 得到使用，那么，则记为

$$H_{\sigma_1/1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})\equiv H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2}),$$
$$H_{\sigma_1/2}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})\equiv -H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})。$$

118 对于 Γ 和 Γ_{σ_1}，我们将它们的 v_1 和 v_2 的值分别记为

$$v_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2),$$

---

① 由于不会产生误解，从此以后，我们不再写 $\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu$，而写 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$。——117，③

$$v_2 = \text{Min}_{\tau_2}\text{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)。$$

和

$$v_{\sigma_1/1} = \text{Max}_{\tau_{\sigma_1/1}}\text{Min}_{\tau_{\sigma_1/2}} H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1}, \tau_{\sigma_2}),$$

$$v_{\sigma_1/2} = \text{Min}_{\tau_{\sigma_1/2}}\text{Max}_{\tau_{\sigma_1/1}} H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1}, \tau_{\sigma_2})。$$

我们的目的是用 $v_{\sigma_1/1}$、$v_{\sigma_1/2}$表达 v_1、v_2。

15.1.2 和 15.2.1 中决定着动作 M_1 的特征的 k_1 将起着基本的作用。由于 $n=2$,其可能取值是 $k_1=0,1,2$。我们必须分别考虑这三种情况。

15.4.2　首先考虑第一种情况:$k_1=0$,即 M_1 是一个机会动作。其各个备择 $\sigma=1,\cdots,\alpha_1$ 的概率是 15.1.2 中提到过的 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$。[$p(\sigma_1)$是 10.1.1 中(10:A:h)的概率 $p_1(C_1)$,$C_1=C_1(\sigma_1)$]。

现在,玩家 1 在 Γ 中的一个策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 显然是对随机变量 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$① 的每一个取值,在 Γ_{σ_1}中为玩家 1 指定一个策略 $\sum_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$,即$\sum_1^{\tau_1}$ 对应着,对于 $\tau_{1/1},\cdots,\tau_{\alpha_1/1}$的所有可能组合,$\sum_{1/1}^{\tau_{1/1}},\cdots,\sum_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$ 的综合。

类似,玩家 2 在 Γ 中的一个策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 显然是对随机变量 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$ 的每一个取值,在 Γ_{σ_1}中为玩家 2 指定一个策略 $\sum_{\sigma_1/2}^{\tau_{\sigma_1/1}}$,即$\sum_2^{\tau_2}$ 对应着,对于 $\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}$的所有可能组合,$\sum_{1/2}^{\tau_{1/2}},\cdots,\sum_{\sigma_1/2}^{\tau_{\sigma_1/2}}$ 的综合。

---

① 直觉上,这是清楚的。读者可以从形式主义的角度验证它,具体做法是把 11.1.1 中的定义和 11.1.3 中的(11:A)应用于 15.2.1 描述的情况。——118,①

这样，Γ 和 Γ_{σ_1} 中的结果的"数学期望"之间有如下关系：

$$H(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})。$$

因此，对于 v_1，我们的公式给出

$$v_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)$$

$$=\mathrm{Max}_{\tau_{1/1},\cdots,\tau_{\alpha_1/1}}\mathrm{Min}_{\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}}\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})。$$

等式最右边求和中的第 σ_1 项 $p_1(\sigma_1)H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})$ 只含
119 有两个变量 $\tau_{\sigma_1/1}$ 和 $\tau_{\sigma_1/2}$。因此，在分离的 σ_1 项中，

$$\sigma_1=1;\cdots;\sigma_1=\alpha_1。$$

以下各对变量

$$\tau_{1/1},\tau_{1/2};\cdots;\tau_{\alpha_1/1},\tau_{\alpha_1/2}$$

不会同时出现。

因此，在建立 $\mathrm{Min}_{\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}}$ 时，我们能够分别最小化每个 σ_1 - 项；在建立 $\mathrm{Max}_{\tau_{1/1},\cdots,\tau_{\alpha_1/1}}$ 时，我们也能够分别最大化每个 σ_1 项。这样，我们的表达式变成了：

$$\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1}}\ \mathrm{Min}_{\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}}=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)v_{\sigma_1/1}。$$

因此，我们证明了

$$(15:2)\qquad v_1=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)v_{\sigma_1/1}。$$

交换 Max 和 Min 的位置，重复上述过程，我们有

$$(15:3)\qquad v_2=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)v_{\sigma_1/2}。$$

15.4.3 接下来，我们讨论 $k_1=1$ 的情况，而且，在这种情况下，我们将不得不利用 13.5.3 中的结果。关于这

一结果的高度形式化特征，我们希望，通过说明它是有关博弈的一个直觉上明显的事实的形式化表述，将其弄得更接近读者的想像。这将进一步说明，为什么这一结果在这一特殊情况中起着重要作用。

我们即将对 13.5.3 中的结果做出的解释所依据的是我们在 14.2—14.5 中的讨论，尤其是 14.5.1 和 14.5.2 中的讨论，而且，正是基于这一理由，我们没有在 13.5.3 中将其给出。

为此，我们将使用正规型来考虑一个二人零和博弈 Γ（见 14.1.1）、其小博弈 Γ_1 及其大博弈 Γ_2（见 14.2）。

假如我们决定以这种方式来对待 Γ 的正规型，即将其看作一个扩展型，并且引入策略等，而我们的目的是通过 11.2.2 和 11.2.3 那样的程序得到一个（新的）正规型，那么，正如 11.3，尤其是第 84 页脚注①中描述的那样，什么事情也不会发生。然而，对于小博弈 Γ_1 和大博弈 Γ_2 来说，情况则不同。正如第 100 页脚注②和③中提到的那样，我们还没有给出这两者的正规型。因此，通过 11.2.2 和 11.2.3 那样的程序，把它们变成正规型是恰当的，也是必要的。

由于 Γ_1 和 Γ_2 的完备解已经在 14.3.1 和 14.3.3 中找到，我们可以预计，它们将是严格决定的。① 120

① 这只是一个试探性的说明，因为 14.3.1 和 14.3.3 中的解所依据的原理与我们在 14.5.1 和 14.5.2 中说明严格决定的博弈所依据的原理并不完全相同，前者只是向后者前进了一步。事实上，借助"非数学的"纯文字详述，这一论述足以使人信服。不过，我们宁愿从数学上解决这一问题，其理由如同 14.3.2 类似情况中给出的理由。——120，①

正如 14.3.4 开头说明的那样，我们只须讨论 Γ_1。

对于 Γ，我们使用记号 τ_1、τ_2、$H(\tau_1,\tau_2)$ 和 v_1、v_2；对于 Γ_1，我们使用的相应记号是 τ'_1、τ'_2、$H'(\tau'_1,\tau'_2)$ 和 v'_1、v'_2。

玩家 1 在 Γ_1 中的一个策略是指定一个（固定的）值 $\tau_1(=1,\cdots,\beta_1)$；玩家 2 在 Γ_1 中的一个策略是指定一个（固定的）值 $\tau_2(=1,\cdots,\beta_2)$，对于每一个值 $\tau_1(=1,\cdots,\beta_1)$，$\tau_2$ 依赖于 τ_1。① 所以，它是 τ_1 的一个函数：$\tau_2=\tau_2(\tau_1)$。

因此，τ'_1 是 τ_1，而 τ'_2 对应着函数 τ_2，$H'(\tau'_1,\tau'_2)$ 对应着 $H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)]$。相应地，

$$v'_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)],$$

$$v'_2=\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)]。$$

因此，Γ_1 是严格决定的，即 $v'_1=v'_2$。这与 13.5.3 中的（13:E）完全一致，只需用 τ_1、τ_2、$\tau_2(\tau_1)$、$H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)]$ 替换那里的 x、u、$f(x)$、$\psi[x,f(x)]$。

13.5.3 的结果与 Γ_1 的严格决定性之间的等价说明了为什么 13.5.3 将在后面的讨论中发挥基本作用。Γ_1 是一个极为简单的有完美信息的例子，而有完美信息的博弈正是我们当前的讨论的最终目标（见 15.3.2）。而且，Γ_1 的第一个动作恰恰是我们接下了要讨论的那种动作：它是玩家 1（即 $k_1=1$）的一个个人动作。

---

① 直觉上，这是清楚的。读者可以如下方式从形式化的角度来验证它，具体做法是，如 14.2 中给出的那样，用分拆和集合术语重述 Γ_1 的定义，然后应用 11.1.1 中的定义和 11.1.3 中的（11:A）。

总之，一个基本事实是，在 Γ_1 中，玩家 1 的个人动作是玩家 2 的个人动作的预备。——120，②

15.5　归纳步骤的严格讨论（续）

15.5.1　现在，考虑 $k_1=1$ 的情况，即令 $\mathcal{M}_1$ 是玩家 1 的一个个人动作。

玩家 1 在 Γ 中的一个策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 显然就是指定一个（固定的）值 $\sigma_1^0(=1,\cdots,\alpha_1)$ 和玩家 1 在 $\Gamma_{\sigma_1}^0$ 中的一个（固定的）策略 $\sum_{\sigma_1^0/1}^{\tau_{\sigma_1^0/1}}$；①即 $\sum_1^{\tau_1}$ 对应着数对 $\sigma_1^0,\tau_{\sigma_1^0/1}$。

另一方面，玩家 2 在 Γ 中的一个策略 $\sum_2^{\tau_2}$ 是，对于变量 $\sigma_1^0=1,\cdots,\alpha_1$② 的每一个取值，在 $\Gamma_{\sigma_1^0/1}$ 中指定玩家 2 的一个策略 $\sum_{\sigma_1^0/2}^{\tau_{\sigma_1^0/2}}$。所以，$\tau_{\sigma_1^0/2}$ 是 σ_1^0 的一个函数：$\tau_{\sigma_1^0/2}=\tau_2(\sigma_1^0)$，即 $\sum_2^{\tau_2}$ 对应着函数 τ_2 且 121

$$-H(\tau_1,\tau_2)=H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)]。$$

我们的 v_1 公式给出

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0,\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathrm{Min}_{\tau_2}H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)] \\ &= \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathrm{Max}_{\sigma_1^0}\mathrm{Min}_{\tau_2}H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)]。\end{aligned}$$

现在，根据 13.5.3 中的（13:G），

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}_{\sigma_1^0}\mathrm{Min}_{\tau_2}H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)] \\ &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0}\mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}}H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_{\sigma_1^0/2})。\end{aligned}$$

只需用我们的 σ_1^0、$\tau_{\sigma_1^0/2}$、$\tau_2(\sigma_1^0)$、$H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_{\sigma_1^0/2})$ 替换那里的 x、u、$f(x)$、$\psi(x,u)$。③ 因此，

---

① 见第 118 页脚注①或上面的脚注②。——120，③

② 见第 118 页脚注①或第 120 页脚注②。——121，①

③ 在这种情况下，$\tau_{\sigma_1^0/1}$ 必须被当作一个常数。——121，②

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}_1 &= \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) \\
&= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0/1} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0}} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) \\
&= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0/1} \mathrm{v}_{\sigma_1^0/1}\text{。}
\end{aligned}
$$

我们的 v_2 公式给出①

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}_2 &= \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0, \tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)] \\
&= \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)]\text{。}
\end{aligned}
$$

现在，由 13.5.3 中的(13:E)和(13:G)，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)] \\
&\quad = \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)] \\
&\quad = \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})\text{。}
\end{aligned}
$$

在那里，我们只需用我们的 σ_1^0、$\tau_{\sigma_1^0/2}$、$\tau_2(\sigma_1^0)$、$\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})$替换 x、u、$f(x)$、$\psi(x,u)$。② 因此，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}_2 &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) \\
&= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{v}_{\sigma_1^0/2}\text{。}
\end{aligned}
$$

总结(且 σ_1^0 写为 σ_1)：

122 (15:4) $\quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{Max}_{\sigma_1/1} \mathrm{v}_{\sigma_1/1}$，

(15:5) $\quad \mathrm{v}_2 = \mathrm{Max}_{\sigma_1/1} \mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。

15.5.2 最后，我们考虑 $k_1 = 2$ 的情况，即令 M_1 是玩家 2 的一个个人动作。

在上述讨论($k_1 = 1$)中交换玩家 1 和玩家 2。如 14.6

---

① 与 15.4.2 相比，现在，我们对待 v_1，v_2 的方式之间有着本质的不同。——121，③

② 在这种情况下，变量 $\tau_{\sigma_1^0/1}$ 被运算 $\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}}$ 扼杀了。

这一步并非可有可无。如 15.4.3 指出的那样，它运用了 13.5.3 中的(13:E)，即那一段落的基本结果。——121，④

中讨论的那样,这一交换等于分别用 $-\mathrm{v}_2$、$-\mathrm{v}_1$ 替换 v_1、v_2,从而,在这里就等于用 $-\mathrm{v}_{\sigma_1/2}$、$-\mathrm{v}_{\sigma_1/1}$ 替换 $\mathrm{v}_{\sigma_1/1}$、$\mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。将这些变化代入上面的公式(15:4)和(15:5),显然,这些公式所需的修改只是将 Max 换成 Min。这样,我们有:

(15:6)　　$\mathrm{v}_1 = \mathrm{Min}_{\sigma_1} \mathrm{v}_{\sigma_1/1}$,

(15:7)　　$\mathrm{v}_2 = \mathrm{Min}_{\sigma_1} \mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。

15.5.3　我们可以把 15.4.2、15.5.1 和 15.5.2 中的公式(15:2)—(15:7)总结为:

对于变量 $\sigma_1(=1,\cdots,\alpha_1)$ 的所有函数 $f(\sigma_1)$ 定义三个运算 $M^{k_1}_{\sigma_1/1}$, $k_1=0,1,2$:

(15:8)
$$M^{k_1}_{\sigma_1} f(\sigma_1) = \begin{cases} \sum\limits_{\sigma=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1) f(\sigma_1), & k_1 = 0, \\ \mathrm{Max}_{\sigma_1} f(\sigma_1), & k_1 = 1, \\ \mathrm{Min}_{\sigma_1} f(\sigma_1), & k_1 = 2。 \end{cases}$$

那么,

$$\mathrm{v}_k = M^{k_1}_{\sigma_1} \mathrm{v}_{\sigma_1/k} \qquad k = 1,2。$$

我们想强调一下有关运算 $M^{k_1}_{\sigma_1}$ 的一些简单事实。

首先,$M^{k_1}_{\sigma_1}$ 扼杀变量 σ_1,即 $M^{k_1}_{\sigma_1} f(\sigma_1)$ 不再依赖于 σ_1。对于 $k_1=1,2$,即对于 Max_{σ_1} 和 Min_{σ_1},13.2.3 已经给出了说明。对于 $k_1=0$,它是显然的。顺便指出,这一运算类似于第 91 页脚注②中作为例子的积分运算。

第二,$M^{k_1}_{\sigma_1}$ 明确依赖于 Γ。这是确凿无疑的,因为 k_1 就出现在 Γ 中,且 σ_1 的取值范围是 $1,\cdots,\alpha_1$。不过,在 $k_1=0$ 的情况下,一个进一步的依赖关系归因于 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$ 的运用。

第三,v_k 对 $\mathrm{v}_{\sigma_1/k}(k=1,2)$ 的依赖性对于每一个 k_1 值

来说都是一样的。

最后,我们看到,借助纯文字(非数学)的论述,本来也容易把这些公式弄得貌似合理——对于一个机会动作,涉及到的是平均值 $\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)f(\sigma_1)$,第一个玩家追求的是最大值,其对手之一追求的是最小值。然而,为了充分证明 v_1、v_2 的准确地位,一个严格的数学处理还是必要的。试图做到这一点的纯文字说理难免乱作一团,以至没有任何价值。

15.6 完美信息情况下的结果

123 **15.6.1** 我们回到 15.3.2 末尾描述的情况并保留那里的所有假设,即我们假设博弈 Γ 中有着完美信息,而且它是一个二人零和博弈。15.3.2 末尾描述的方案与 5.5.3中考虑的“归纳”步骤(15:8)结合起来使我们能够决定 Γ 的基本性质。

首先,我们要证明,这样一个博弈总是严格决定的。我们的做法是就该博弈的长度 ν 进行“完全归纳”(见 15.1.2)。这由两步组成:

(15:C:a) 对于最小长度即 $\nu=0$ 的任何博弈,这一点是正确的。

(15:C:b) 对于一个给定的 $\nu=1,2,\cdots$,如果它对于长度为 $\nu-1$ 的博弈是正确的,那么,对于长度为 ν 的博弈,它也是正确的。

(15:C:a)的证明:如果长度 $\nu=0$,那么,这一博弈根本没有任何动作,它的组成是玩家 1 和玩家 2 分别得到固

定的数额，如 w 和 $-w$。[1] 因此，$\beta_1=\beta_2=1,\tau_1=\tau_2=1,H(\tau_1,\tau_2)=w$[2]，而且，$v_1=v_2=w$，即 Γ 是严格决定的且 $v=w$。[3]

(15:C:b)的证明：设 Σ 是一个长度为 ν 的博弈，那么，每一个 Γ_{σ_1} 的长度是 $\nu-1$。根据假设，每个 Γ_{σ_1} 是严格决定的，从而，$v_{\sigma_1/1}\equiv v_{\sigma_1/2}$。15.5.3 的公式(15:8)表明[4]，$v_1=v_2$。因此，$\Gamma$ 也是严格决定的。证明完毕。

15.6.2　下面，我们将进入较细节性的内容，并且明确决定 Γ 的 $v_1=v_2=v$。对此，我们甚至不需要 15.6.1 的结果。

如 15.3.2 末尾那样，我们建立如下博弈序列

$$\Gamma,\Gamma_{\sigma_1},\Gamma_{\sigma_1,\sigma_1},\cdots,\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu},$$[5]

其长度分别为

$$\nu,\nu-1,\nu-2,\cdots,0。$$

记这些博弈的 v_1,v_2 为

$$v_\kappa,v_{\sigma_1/k},v_{\sigma_1,\sigma_1/k},\cdots,v_{\sigma_1,\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu/k}。$$

让我们把 15.5.3 的(15:8)用于 15.3.2 末尾描述的 124
“归纳”步骤，即对每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$，我们用 $\sigma_\kappa,\Gamma_{\sigma_1},\cdots,$

---

① 见第 76 页脚注②中的博弈或 15.3.1 中的 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$。用分拆和集合术语说：对于 $\nu=0$，10.1.1 中的(10:1:f)，(10:1:g)表明，Ω 只有一个元素，如 $\bar{\pi}:\Omega=(\bar{\pi})$。这样，$w=J_1(\bar{\pi})$，$-w=J_2(\bar{\pi})$起着上述作用。——123，①

② 即每一位玩家只有一个策略，这一策略就是什么也不做。——123，②

③ 这是十分显然的事情。基本步骤是(15:C:b)。——123，③

④ 15.5.3 末尾提到的一个事实，即对于 $\kappa=1,2$ 来说，这一个公式对所有 κ_1 的值相同。——123，④

⑤ 见第 117 页脚注③。——123，⑤

$\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1},\sigma_\kappa}$替换 15.5.3 中的 $\sigma_1,\Gamma,\Gamma_{\sigma_1}$。15.5.3 的 k_1 指 $\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}}$ 的第一个动作，即 Γ 中的动作 M_κ。因此，我们顺便将其记为 $k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$（见 7.2.1）。相应地，我们建立运算 $M_{\sigma_\kappa}^{k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})}$，用它替换 15.5.3 的 $M_{\sigma_1}^{k_1}$。以这种方式，我们得到

(15:10) $$\mathrm{v}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}/k}=M_{\sigma_\kappa}^{k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})}\mathrm{v}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\kappa/k},k=1,2。$$

考虑(15:9)中的最后一个元素，即博弈 $\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu}$；这落入了 15.6.1 中(15:C:a)的讨论，这个博弈根本没有动作。记其惟一的博弈[①]为 $\overline{\pi}=\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)$。因此，其固定的 w[②] 等于 $J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。这样，我们有：

(15:11) $$\mathrm{v}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu/1}=v_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu/2}=J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

令 $\kappa=\nu$，将(15:10)运用于(15:11)，然后对 $\kappa=\nu-1,\cdots,2,1$ 依次进行。以这种方式，我们得

(15:12) $$\mathrm{v}_1=\mathrm{v}_2=\mathrm{v}=M_{\sigma_1}^{k_1}M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)}\cdots M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

这再次证明，Γ 是严格决定的，而且明确给出了其取值的公式。

15.7 在国际象棋中的应用

15.7.1 在完美信息的二人零和博弈中，预备性和先前性一致，所以，6.4.1 的暗示和 14.8 的断言得到了证明。我们在那里给出的一般观点是，这些博弈尤其表现出理性特征。现在，这一含糊的观点被赋予了严格的含义，

---

① 见 15.3.1 中关于 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 的说明。——124,①

② 见 15.6.1 中的(15:C:a)，尤其是第 123 页脚注①。——124,②

即这些博弈是严格决定的。我们还证明了一个不那么常见于“一般观点”的事实,即当这些博弈包含机会动作时,上述结论也是正确的。

我们在 6.4.1 中讨论了一些具有完美信息的博弈:(没有机会动作)的国际象棋和(有机会动作的)巴加门。因此,对于这些博弈,我们已经证明了一局博弈有一个确定的值,而且存在着明确的最优策略。不过,我们只是抽象地证明了它们的存在性,在大多数情况下,对于其结构,我们的方法过于冗长而不实用。[①]

这里,我们要对国际象棋进行更加详细的讨论。

国际象棋中,一局博弈的结果——即 6.2.2 或 9.2.4 125
中的 J_k——被严格限定于 1,0,1。[②] 因此,11.2.2 中函数 G_k 有相同的取值,而且,由于国际象棋中不存在机会动作,11.2.3 中的函数 H_k 也有相同取值。[③] 在下面的讨论中,我们将使用 14.1.1 中的函数 $H = H_1$。

由于 H 只有 1,0,-1 三个取值,

$$(15:13)\qquad \mathrm{v} = \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$$

必然取 v = 1,0,-1,1 之一。

我们请读者证明(15:13)意味着:

---

① 这主要归因于 ν 的值太大。关于国际象棋,见第 59 页脚注的相关内容。(那里的 ν^* 就是我们这里的 ν,见 7.2.3。)——124,③

② 这是玩家 k 在一局中“胜”、“和”或“输”的最简单解释。——125,①

③ G_k 的每一个取值是 J_k 的一个取值。在不存在机会动作的情况下,H_k 的每一个取值是 G_k 的一个取值,见上面提到的段落。如果存在着机会动作,那么,H_k 的取值等于“胜”的概率减去“输”的概率,即一个位于 1 与 -1 之间的数。——125,②

(15:D:a)　　如果 v=1,那么,无论玩家 2("黑方")如何玩,玩家 1("白方")总有一个"取胜"的策略。

(15:D:b)　　如果 v=0,那么,无论对方如何玩,每一位玩家都能够"求和"(和可能"取胜")。

(15:D:c)　　如果 v=-1,那么,无论玩家 1("白方")如何玩,玩家 2("黑方")总有一个"取胜"的策略。①

15.7.2 这说明,如果国际象棋理论被充分研究透彻了,也就没有什么可玩的了。这样的理论将表明(15:D:a)、(15:D:b)和(15:D:c)中何者实际成立,相应地,一局博弈的结果在开始之前就被决定了:在(15:D:a)的情况下,结果是"白胜";在(15:D:b)的情况下,结果是"和";在(15:D:c)的情况下,结果是"黑胜"。

但是,我们的证明只保证这三者之中只能有一个成立,却没有给出决定其中哪一个正确的实用方法。这一相对的人类困难使得不完备的、有启发性的玩法成为必需的事情,正是它们构成一局"好的"国际象棋;不然,这类博弈中就会失去"搏斗"和"惊心动魄"的成分。

15.8 文字讨论

126 **15.8.1** 我们以一种较简单而不那么形式化的方法

① 当存在机会动作时,那么,$H(\tau_1,\tau_2)$"胜"的概率减去"输"的概率,见脚注②。玩家尽力最大化或最小化这个数,(15:D:a)—(15:D:c)的严格的三分法一般来说并不包括这种努力。——125,③

来得到我们的主要结果——在有着完美信息的情况下,所有二人零和博弈都是严格决定的。

你可以怀疑下面的讨论是否能够称得上一个证明。也就是说,我们宁愿将其描述为一看似合理的论证,使上述类型的任一博弈 Γ 能够被赋予一个值,不过,这有待批判的。无需详细说明这些批判是站不住脚的,因为,正如 15.4—15.6 那样,我们将得到 Γ 的一局博弈的同一个值 v,而且,我们在那里用严格定义的概念给出了一个绝对严格的证明。下面将给出的表面合理性论证的价值是,它更容易把握,并且有可能在有着完美信息的、不符合二人零和博弈条件的其他博弈中被重复应用。我们希望指出,同样的批判还涉及一般情况,而且它们不再能够被证明是不成立的。事实上,在那里,(即便在有着完美信息的博弈中)解也将按照完全不同的思路被找到。这将使二人零和博弈与一般情况之间的不同的本质更加清楚。要说明一般情况的处理必须采取根本不同的方法,这是十分重要的(见第 24 节)。

15.8.2　考虑一个有着完美信息的二人零和博弈 Γ。我们使用 15.6.2 中的所有符号:动作:$M_1,\cdots,M_\nu$;选择:$\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$;玩家:$k_1,k_2(\sigma_1),\cdots,k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})$;概率:$p_k(1),\cdots,p_k(\alpha_k)$;算子:$M_{\sigma_1}^{k_1},M_{\sigma_1}^{k_1(\sigma_1)},\cdots,M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})}$;由 Γ 推导出的博弈序列(15:9);函数 $J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。

我们从最后一个动作 M_ν 开始讨论博弈 Γ,并进而通过 $M_{\sigma_{\nu-1}},\sigma_{\nu-2}\cdots$ 进行递推。首先,假设(动作 $M_1,M_2,\cdots,M_{\nu-1}$ 的)选择 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 已经做出,现在,有待做出的是(动作 M_ν)的选择 σ_ν。

如果 M_ν 是一个机会动作，即如果 $k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=0$，那么，$\sigma_\nu$ 将分别以概率 $p_\nu(1),p_\nu(2),\cdots,p_\nu[\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$ 取值 $1,2,\cdots,\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$。这样，（对于玩家 1 来说）最终支付的数学期望 $J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 是

$$\sum_{\sigma_\nu=1}^{\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} p_\nu(\sigma_\nu)J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]。$$

如果 M_ν 是玩家 1 或玩家 2 的一个个人动作，即如果 $k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})=1$ 或 2，那么，这一玩家预计将通过他的 σ_ν 选择来最大化或最小化 $J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$，即结果将是 $\mathrm{Max}_{\sigma_\nu}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 或 $\mathrm{Min}_{\sigma_\nu}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$。

127 也就是说，对于这一局博弈，在选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 已经做出之后，结果总是

$$M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

接下来，假设只有（动作 $M_1,\cdots,M_{\nu-2}$ 的）选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-2}$ 已经做出，现在有待做出的是（动作 $M_{\nu-1}$ 的）选择 $\sigma_{\nu-1}$。

如我们已经看到的那样，$\sigma_{\nu-1}$ 的一个确定的选择必然带来结果 $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$，它是 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 的函数，由于运算 $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}$ 扼杀 σ_ν，我们能够像上面那样继续下去，只需用 $\nu-1,\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$ 分别替换 $\nu,\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu,M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。因此，在选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-2}$ 做出之后，这一局博弈的结果预计是

$$M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\bar{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

类似地，在选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-3}$ 之后，这一局博弈的结果预计是 $M_{\sigma_{\nu-2}}^{k_{\nu-2}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-3})}M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-2})}M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。最后，在这一局博弈开始之前，其结果预计是

$$M_{\sigma_1}^{k_1}M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)}\cdots M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-2})}M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

这正是 15.6.2 中(15:12)的 v。①

15.8.3　15.8.2 中程序的一个反对意见是，求解 Γ 的一局的值的这一方法假定了所有玩家的理性行为，玩家 1 的策略建立在玩家 2 采取最优策略这一假设之上，反之亦然。

具体来说：假设 $k_{\nu-1}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-2})=1$，$k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})=2$。那么，有着个人动作 $M_{\nu-1}$ 的玩家 1 在做出其选择 $\sigma_{\nu-1}$ 时，设想玩家 2“理性地”做出其个人动作 M_ν 的选择 σ_ν。事实上，这是假设他的 $\sigma_{\nu-1}$ 选择必然导致这一局的结果是 $\mathrm{Min}_{\sigma_\nu}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$ 即 $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$ 的惟一借口。（见 15.8.2 中关于 $M_{\nu-1}$ 的讨论。）

在 4.1.2 的第二部分，我们提到过这样一个结论，即 128
必须避免假设他人的“理性”。15.8.2 的观点显然不符合这一要求。

① 在设想将这一程序运用于任何具体博弈时，必须牢记的一点是，我们假设了 Γ 的长度 ν 是固定不变的。如果 ν 实际上是可变的——大多数博弈是这样的(见第 58 页脚注③)，那么，我们必须首先将其弄成一个常数，具体做法是，像 7.2.3 末尾那样，给 Γ 增加“哑动作”。只有这样做了之后，上述回归程序 $(M_\nu,M_{\nu-1},\cdots,M_1)$ 才是可行的。

就实践中的构造来说，这一程序当然不比 15.4—15.6 的程序好。

也许，只有某些极为简单的博弈能够以两种程序得到有效处理，如画“连城”游戏。——127，①

有人会争辩说，在一个二人零和博弈中，一个玩家能够假设对手的理性，因为他的对手的非理性并不能伤害它。事实上，由于只有两个玩家且收益之和为零，一个玩家非理性地遭受的损失必然导致另一个玩家相等数额的收益。[①] 这说明，这一观点远非完美，但可谓相当详尽了。不过，我们不必过于关注其不足之处：我们有 15.4—15.6 中无可挑剔的证明。[②]

但是，对于这一问题的基本方面来说，上述讨论很有可能有着显著意义。我们将看到，它如何影响到我们在 15.8.1 提到的不符合二人零和约束的较一般情况下的修正条件。

16. 直线性和凸性

16.1 几何背景

16.1.1 接下来，我们的任务是为所有二人零和博弈找到一个折中的解，即允许非严格决定的情况。要在这方面取得成功，我们要借用对付严格决定博弈的相同概念：这些概念能够被推广到所有二人零和博弈。为此，我们不得不用到概率理论（见 17.1 和 17.2）。而且，一些不常用

① 如果总收益之和不为零，或不止两个玩家，那么，情况就不是这样。详细讨论见 20.1、24.2.2 和 58.3。——128，①

② 这方面，尤其见 14.5.1 中的（14:D:a）、（14:D:b）、（14:C:d）、（14:C:e）和 14.5.2 中的（14:C:a）、（14:C:b）。——128，②

的数学工具也是必需的。我们在第 13 节中的分析提供了部分这类工具；关于其余工具，最方便的做法是借助于有关直线性和凸性的数学理论。关于凸体①的两个定理将有着特别显著的意义。

出于这些理由，我们接下来讨论直线性和凸性的概念。

16.1.2 没有必要对 n 维线性（欧几里得）空间的概念进行基本的讨论，我们只需说这一空间是由 n 个数字坐标描述的。相应地，对于 $n=1,2,\cdots$，我们把 n 维线性空间 L_n 定义为所有 n 维实数 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的集合。这些 n 维实数也能够被看作变量 i 的函数 x_i，其定义域是 13.1.2 和 129
13.1.3 意义上的 $(1,\cdots,n)$。② 为保持一致性，我们将称 i 为一个指数，而不称其为一个变量。不过，这并不改变这些情况的本质。尤其是，我们有

$$\{x_1,\cdots,x_n\}=\{y_1,\cdots,y_n\},$$

当且仅当 $x_i=y_i, i=1,\cdots,n$（见 13.1.3）。你甚至可以这样认为：L_n 是最简单的（数值）函数空间，其中，定义域是一个固定的有限集——集合 $(1,\cdots,n)$。③

我们也称这些 n 维实数或函数为 L_n 的点或向量，并写成

---

① 见伯尼森（T. Bonessen）和芬切尔（W. Fenchel）：Theorie der konvexen Kórper, in Ergebisse der Mathematik und ihrer Grenzagebiete，第 III/1 卷，柏林，1934。进一步研究，见外尔（H. Weyl）：Eloeentare Theorie der konvexen Polyeder. Commtarii Mathematici Helvetici，第 VII 卷，1935，第 290—306 页。——128，③

② 也就是说，这些 n 维数 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 并不是 8.2.1 意义上的集合。借助指数 $i=1,\cdots,n$，x_i 的进行的实际枚举恰恰就像它们的值的综合那样基本。类似情况见第 69 页脚注④。——129，①

③ 在现代分析中，很多人有这种倾向。——129，②

(16:1) $\qquad \vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$。

对于特定的 $i=1,\cdots,n$——函数 x_i 的取值是向量 $\vec{x}$ 的分量。

16.1.3 我们提到过，L_n 不是一个抽象的欧几里得空间，而是一个参照系（坐标系或参照标架）已经被选定的空间。[①] 不过，对于我们的进一步讨论，这并不是基本的。这归于指定 L_n 的数字原点和坐标向量的可能性（见下面）。但是，我们并不想强调问题的这一方面。

L_n 的零向量或原点是

$$\vec{O}=\{0,\cdots,0\}$$

L_n 的 n 个坐标向量是

$$\vec{\delta}=\{0,\cdots,1,\cdots,0\}=\{\delta_{1j},\cdots,\delta_{nj}\},\qquad j=1,\cdots,n,$$

其中，

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,^{②③}\\ 0 & i\neq j。\end{cases}$$

有了这些约定之后，我们就能够描述 L_n 中向量的性质了。

16.2 向量运算

16.2.1 涉及向量的主要运算有：纯量乘法，即一个
130 向量 $\vec{x}$ 被一个数 t 乘；向量加法，即两个向量相加。这两个运算是由问题中向量的分量的相应运算定义的。更确

---

① 这至少是一种正统的几何观点。——129，③

② 因此，零向量的所有分量都是 0，而坐标向量只有一个分量不是 0，不是 0 的那个分量等于 1，且第 j 个坐标向量的第 j 个分量为 1。——129，④

③ δ_{ij} 是“克罗内克符号”，它在很多方面都相当有用。——129，⑤

切地说：

纯量乘法：

$$t\{x_1,\cdots,x_n\}=\{tx_1,\cdots,tx_n\}。$$

向量加法：

$$\{x_1,\cdots,x_n\}+\{y_1,\cdots,y_n\}=\{x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n\}。$$

这些代数运算是如此简单和明显，无需讨论。不过，我们要指出，它们允许任何向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 借助于其分量和 L_n 的坐标向量表达为

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{\delta}_{ij}。$$①

L_n 的一些重要子集：

(16:A:a)　考虑一个（线性，非齐次）方程

(16:2:a)　$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b$

（$a_1,\cdots,a_n,b$ 是常数）。我们排除

$$a_1=\cdots=a_n=0$$

的情况，因为那样的话就没有方程了。所有满足上述方程的点（向量）$\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 形成一个超平面。②

(16:A:b)　给定一个超平面

(16:2:a)　$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b,$

它定义了 L_n 的两个部分。它将 L_n 分为两个部分：

---

① x_j 是数，从而它们在 $x_j\vec{\delta}_{ij}$ 中是一个纯量乘数。$\sum_{j=1}^{n}$ 是向量求和。——130，①

② 例如，对于 $n=3$，即普通的（三维欧几里得）空间，它们恰好是（二维）平面。在我们的一般情况中，它们是（$n-1$）维相似体。故，称之为超平面。——130，②

$$(16:2:b) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b,$$

$$(16:2:c) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i < b。$$

这两者是由上述超平面产生的两个半空间。

131 注意，如果我们用 $-a_1, \cdots, -a_n, -b$ 分别替换 $a_1, \cdots, a_n, b$，那么，超平面(16:2:a)不受影响，但两个半空间(16:2:b)和(16:2:c)被交换。因此，我们总是可以假设一个半空间有(16:2:b)那样给定的形式。

(16:A:c) 给定两个点(向量)$\vec{x}, \vec{y}$ 和 $t \geqq 0$ 且 $1-t \geqq 0$；那么，分别拥有重量 t 和 $1-t$ 的 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的力学意义上的重心是 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$。

方程

$$\vec{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}, \quad \vec{y} = \{y_1, \cdots, y_n\},$$

$$t\vec{x}+(1-t)\vec{y} = \{tx_1+(1-t)y_1, \cdots, tx_n+(1-t)y_n\}$$

应该能够使这一点充分清楚。

L_n 中所有的点的重心组成 L_n 的一个子集 C，即对于任意 x, y 和 $0 \leqq t \leqq 1$，C 包含 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$。C 是一个凸集。

读者将会注意到，对 $n=2,3$，即在普通平面和空间中，这是常见凸性的概念。事实上，所有点 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$($0 \leqq t \leqq 1$)的集合正是连接 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的(直)线段，即区间$[\vec{x}, \vec{y}]$。因此，一个凸集是这样一个集合，对于其中任意两个点 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$，区间$[\vec{x}, \vec{y}]$也在其内。图 16 描述的是 $n=2$ 即平面中的情况。

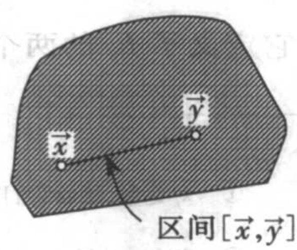
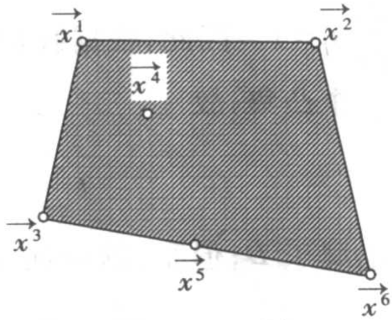


图 16



阴影区域：由 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^6$ 生成的凸体

图 17

16.2.2 显然，任意多个凸集的交集也是一个凸集。因此，如果给定任意个数的点（向量）$\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$，存在一个包含它们的最小凸集：包含 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 的所有凸集的交。这是由 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 生成的凸集。想像 $n=2$（平面）的情况同样是有益的。见图 17，其中，$p=6$。不难证明，这个集合由如下点（向量）组成：

(16:2:d) $$\sum_{j=1}^{p} t_j \vec{x}^j, t_1 \geqq 0, \cdots, t_p \geqq 0 \text{ 且} \sum_{j=1}^{p} t_j = 1。$$

证明：满足（16:2:d）的点组成一个包含所有 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 的集合。$\vec{x}^j$ 是这样一个点：令 $t_j=1$ 且所有其他 $t_i=0$。

满足(16:2:d)的点组成一个凸集：如果 $\vec{x}=\sum_{j=1}^{p} t_j \vec{x}^j$ 且 $\vec{y}$ 132
$=\sum_{j=1}^{p} s_j \vec{x}^j$，那么，$t\vec{x}+(1-t)\vec{y}=\sum_{j=1}^{p} u_j \vec{x}^j, u_j = tt_j+(1-t)s_j$。

任何一个包含 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 的凸集 D 也包含所有满足(16:2:d)的点：我们用归纳法证明这一点。

证明：对于 $p=1$，这是显然的。这是因为，这时 $t_1=1$ 且 $\vec{x}^1$ 是满足(16:2:d)的惟一一个点。

假设 $p-1$ 时，上述结论成立。考虑 p 本身。如果 $\sum_{j=1}^{p-1} t_j = 0$，那么，$t_1=\cdots=t_{p-1}=0$，满足(16:2:d)的点是 $\vec{x}^p$，并属于 D。如果 $\sum_{j=1}^{p-1} t_j > 0$，那么，令 $t=\sum_{j=1}^{p-1} t_j$，从而 $1-t=\sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1} t_j = t_p$。因此，$0<t\leqq 1$。令 $s_j = t_j/t, j=1,\cdots,p-1$。故，

$\sum_{j=1}^{p-1} s_j = 1$。因此，根据我们对 $p-1$ 的假设，$\sum_{j=1}^{p-1}$ 属于 D。D 是一个凸集，故

$$t\sum_{j=1}^{p-1} s_j \overrightarrow{x^j} + (1-t)\overrightarrow{x^p}$$

也属于 D；但是，这一向量等于

$$\sum_{j=1}^{p-1} t_j \overrightarrow{x^j} + t_p \overrightarrow{x^p} = \sum_{j=1}^{p} t_j \sum_{j=1}^{p} t_j \overrightarrow{x^j}$$

所以，它属于 D。

133 证明完毕。

(16:2:d)中的 $t_1,\cdots,t_p$ 本身可以被看作空间 L_p 中向量 $\vec{t}=\{t_1,\cdots,t_p\}$ 的分量。因此，我们应该给予满足如下条件的 $\vec{t}$ 组成的集合一个名称：

$$t_1 \geqq 0,\cdots,t_p \geqq 0,$$

且

$$\sum_{j=1}^{p} = 1。$$

我们将这一集合记为 S_p。我们还应该给予仅由上述条件中的第一个条件——即 $t_1 \geqq 0,\cdots,t_p \geqq 0$——描述的集合一个名称。我们将其记为 P_p。两者都是凸集。

让我们图示 $p=2$（平面）和 $p=3$（空间）的情况。P_2 是正象限，位于正 x_1 轴和正 x_2 轴之间的区域（图 18）。P_3 是正卦限，位于正的 x_1、x_2 和 x_3 轴之间的空间，即正 x_1,x_2、正 x_1,x_3 与正 x_2,x_3 三个平面象限界定的空间（图 19）。S_2 是与 P_2 相交的一条线段（图 18）。S_3 是一个平面三角，看似与 P_3 相交（图 19）。一个有用的做法是将 S_2 和 S_3 单独
134 画出来，不将其自然地镶嵌在 P_2、P_3（或甚至 L_2、L_3）之内

(图 20,图 21)。在这些图中,我们指出了分别与 x_1、x_2 或 x_1、x_2、x_3 成比例的距离。

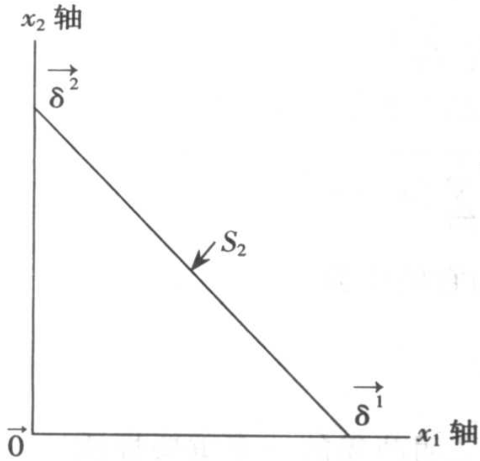


图 18

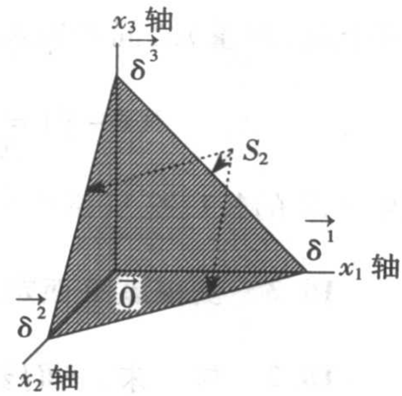


图 19

(我们再次强调:图 20 和图 21 中标明的距离 x_1、x_2、x_3 不是坐标 x_1、x_2、x_3 本身。它们位于 S_2 或 S_3 之外的 L_2 或 L_3 之内,从而无法在 S_2 或 S_3 中描述,不过,不难看出,它们是与那些坐标成比例的。)

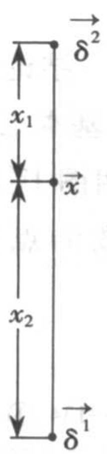


图 20

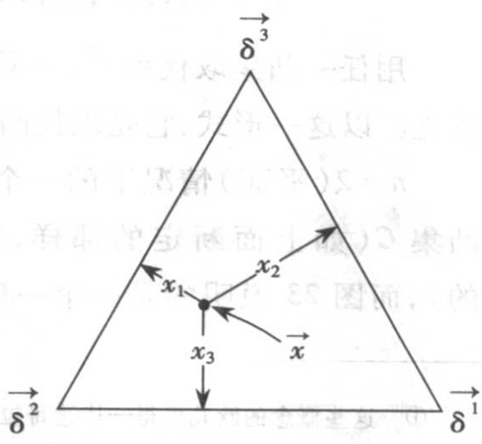


图 21

16.2.3 另外一个重要概念是向量的长度。$\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$的长度是

$$|\vec{x}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\text{。}$$

两个点(向量)之间的距离是它们的差的长度

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\text{。}$$

因此,$\vec{x}$ 的长度是从原点$\vec{0}$到它的距离。①

16.3 支撑超平面定理

16.3 接下来,我们要证明凸集的一个重要性质:

(16:B) 给定 p 个向量$\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$,那么,一个向量 $\vec{y}$ 要么属于由$\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$生成的凸集 C[见16.2.1中的(16:A:c)],要么存在一个包含 $\vec{y}$ 的超平面[见 16.2.1 中的(16:2:a)],使得整个 C 属于由这一超平面产生的一个半空间[如 16.2.1 中的(16:2:b);见(16:A:b)]。

用任一凸集取代由$\vec{x}^1,\cdots \vec{x}^p$生成的凸集,这一结论仍然成立。以这一形式,它是现代凸集理论中的一个基本工具。

$n=2$(平面)情况下的一个图示:图 22 使用图 17 中的凸集 C(如上面断定的那样,它是由有限个数的点生成的),而图 23 说明的是一个一般的凸集 C。②

---

① 这些概念的欧几里得一毕达哥拉斯含义是直接的。——134,①

② 对于熟悉拓扑学的读者,我们补充如下:要想严格,这个句子应该进一步修饰——这是对封闭凸集而言的。这保证我们在下面的证明中使用的最小值的存在性。关于这些概念,见第 384 页脚注①。——134,②

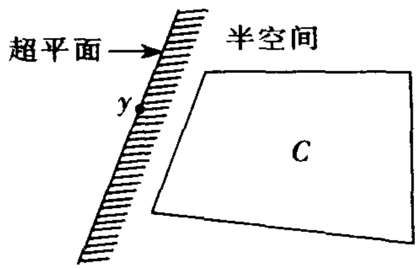


图 22

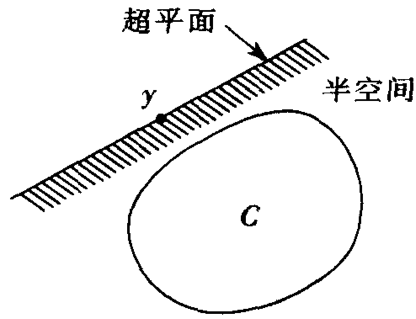


图 23

在证明(16:B)之前，我们注意到，第二种可能性明显排除了第一种可能性，因为 $\vec{y}$ 属于该超平面，因此不属于上面提到的半空间。[也就是说，它满足(16:2:a)而不满足(16:A:b)中的(16:2:b)。]

下面，我们给出证明：

证明：假设向量 $\vec{y}$ 不属于 C。那么，给定 C 中的一个点 $\vec{z}$，这一点尽可能接近 $\vec{y}$，即

$$|\vec{z}-\vec{y}|^2=\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$ 135

取其最小值。

考虑 C 中另一个向量 $\vec{u}$。那么，对每一 t，$0\leqq t\leqq 1$，$t\vec{u}+(1-t)\vec{z}$ 也属于凸集 C。由 $\vec{z}$ 的最小值性质(见上)，故

$$|t\vec{u}+(1-t)\vec{z}-\vec{y}|^2\geqq|\vec{z}-\vec{y}|^2,$$

即

$$|(\vec{z}-\vec{y})+t(\vec{u}-\vec{z})|^2\geqq|\vec{z}-\vec{y}|^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\{(z_i-y_i)+t(u_i-z_i)\}^2\geqq\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

根据初等代数，这意味着

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)t+\sum_{i=1}^{n}(u_i-z_i)^2t^2\geqq 0。$$

136 因此，对于 $t>0$（当然 $t\leqq 1$），我们甚至有

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)+\sum_{i=1}^{n}(u_i-z_i)^2t\geqq 0。$$

如果 t 收敛于0，那么，等式左边收敛于 $2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)$。因此，

$$(16:3)\qquad \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)\geqq 0。$$

因为 $u_i-y_i=(u_i-z_i)+(z_i-y_i)$，这意味着

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-y_i)\geqq\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2=|\vec{z}-\vec{y}|^2。$$

现在，$\vec{z}\neq\vec{y}$（因为 $\vec{z}$ 属于 C，而 $\vec{y}$ 不属于 C），因此，$|\vec{z}-\vec{y}|^2>0$。故，等式左边 >0。即

$$(16:4)\qquad \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)u_i>\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)y_i。$$

令 $a_i=z_i-y_i$，那么，因 $\vec{z}\neq\vec{y}$ 排除了 $a_1=\cdots=a_n=0$（见上）。令 $b=\sum_{i=1}^{n}a_iy_i$。因此，

$$(16:2:a^*)\qquad \sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b$$

定义一个超平面，而 $\vec{y}$ 显然属于它。接下来

$$(16:2:b^*)\qquad \sum_{i=1}^{n}a_ix_i>b$$

是这个超平面产生的一个半空间，而且，(16:4)恰恰说明，$\vec{u}$ 属于这个半空间。

由于 $\vec{u}$ 是 C 中任一向量，这就完成了证明。

上述代数证明也可以用几何术语陈述。

让我们首先就 $n=2$（平面）的情况进行说明。这一情况如图 24 所示：$\vec{z}$ 是 C 中一个点，它是 C 中与给定的点 $\vec{y}$ 最近的点，即 $\vec{y}$ 与 $\vec{z}$ 之间的距离 $|\vec{z}-\vec{y}|$ 取其最小值。由于
$\vec{y}$，$\vec{z}$ 是固定不变的，且 $\vec{u}$ 是（C 中）一个可变的点，因此， 137
(16:3) 定义一个超平面和一个由这一超平面产生的半空间。而且，不难证明，$\vec{z}$ 属于这一超平面，且它由这样一些 $\vec{u}$ 组成：这三个点组成的角是一个直角（即 $\vec{z}-\vec{y}$ 与 $\vec{u}-\vec{z}$ 正相交）。这意味着，$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)=0$。显然，整个 C 要么落在这个超平面上，要么落在它的一侧，并与 $\vec{y}$ 有一定距离。如果 C 的某一个点 $\vec{u}$ 落在 $\vec{y}$ 的一侧，那么，区间 $[\vec{z},\vec{u}]$ 中的某个点就会比 $\vec{z}$ 更接近 $\vec{y}$。（第 25 节第 135—136 页的计算经适当解释恰恰说明了这一点。）由于 C 包含 $\vec{z}$ 和 $\vec{u}$，故包含区间 $[\vec{z},\vec{u}]$，这与 $\vec{z}$ 是 C 中与 $\vec{y}$ 最近的点的假设矛盾。

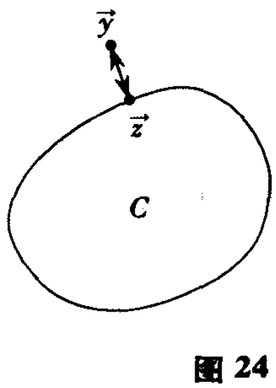


图 24

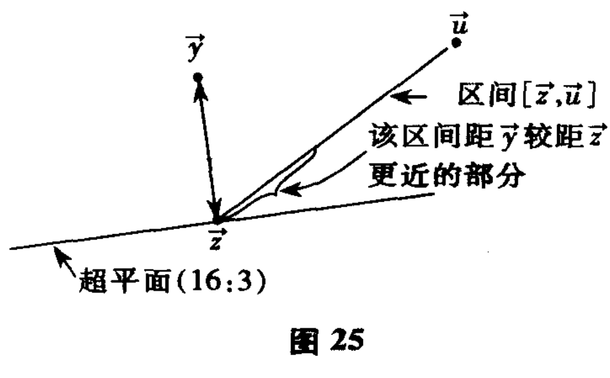


图 25

从 (16:3) 到 (16:4) 相当于超平面 $\vec{z}$ 向超平面 $\vec{y}$ 的平
移（因为 u_i 的系数 $a_i=z_i-y_i$，$i=1,\cdots,n$ 没有被改变）。 138
现在，$\vec{y}$ 就落在这一超平面上，且整个 C 属于由它产生的一个半空间（见图 26）。

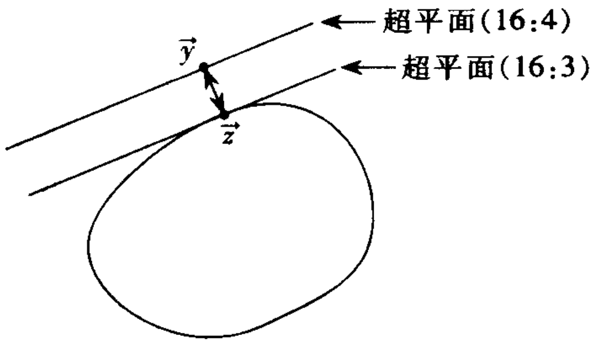


图 26

我们可以类似方式想像 $n=3$(空间)的情况。

我们甚至有可能以这种几何的方式思考 n 维空间。如果读者能够劝说自己有着 n 维"几何直觉",那么,他就可以认为上面的证明在 n 维空间同样成立。甚至有可能通过以下说明来避免这一点:无论 n 是几,整个证明每次仅仅涉及三个点,即 $\vec{y}$、$\vec{z}$、$\vec{u}$。用三个给定的点确定一个(二维)平面总是可能的。如果只考虑这一平面内的事情,那么,图 24 至图 26 以及相关说明能够不加解释地被使用。

上面的纯粹代数证明总是绝对严格的。我们给出几何类比的主要目的是帮助理解证明过程中的代数运算。

16.4 矩阵择一定理

16.4.1 16.3 的定理(16:B)有一个推论。它在我们随后的研究中是很基本的。

我们从考虑一个矩阵开始,这一矩阵有 n 行,m 列,其元素是 $a(i,j)$。(见 13.3.3 中的图 11。那里的 φ、x、y、t、s 对应着我们这里的 a、i、j、n、m。)也就是说,$a(i,j)$ 是变量 $i=1,\cdots,n$ 和变量 $j=1,\cdots,m$ 的一个随便的函数。接下

来,我们建立 L_n 中的如下向量:对于每一个 $j=1,\cdots,m$,向量 $\vec{x^j}=\{x_1^j,\cdots,x_n^j\}$,其中,$x_i^j=a(i,j)$;对于每一 $l=1,\cdots,n$,坐标向量 $\vec{\delta}=\{\delta_{il}\}$。(关于后者,见 16.1.3 末尾;我们用 l 替换了那里的 j。)让我们将 16.3 中的定理(16:B)运用于 $p=n+m$ 个向量 $\vec{x^1},\cdots,\vec{x^m},\vec{\delta^1},\cdots,\vec{\delta^n}$。(它们取代那里的 $\vec{x^1},\cdots,\vec{x^p}$。)我们令 $\vec{y}=\vec{0}$。

由 $\vec{x^1},\cdots,\vec{x^m},\vec{\delta^1},\cdots,\vec{\delta^n}$ 产生的凸集 C 可以包含 $\vec{0}$。如果情况是这样,那么,我们就能够从 16.2.2 中的(16:2:d)得出

$$\sum_{j=1}^{m} t_j\,\vec{x^j}+\sum_{l=1}^{n} s_l\,\vec{\delta^l}=\vec{0},$$

其中

(16:5)　$t_1\geqq0,\cdots,t_m\geqq0,s_1\geqq0,\cdots,t_n\geqq0$。

(16:6)　$\sum_{j=1}^{m} t_j+\sum_{l=1}^{n} s_l=1$。

用 $t_1,\cdots,t_m,s_1,\cdots,t_n$ 替换 $t_1,\cdots,t_p$(见上)。用分量描述, 139
这意味着

$$\sum_{j=1}^{m} t_j a(i,j)+\sum_{l=1}^{n} s_l\delta_{il}=0。$$

等式左边的第二项等于 s_i,因此,我们写

(16:7)　$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)t_j=-s_i$。

如果我们有 $\sum_{j=1}^{m} t_j=0$,那么,$t_1=\cdots=t_m=0$,从而,由(16:7)$s_1=\cdots=s_n=0$,这与(16:6)矛盾。故 $\sum_{j=1}^{m} t_j>0$。我们得到了(16:7)的一个推论:

(16:8) $$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)t_j \leqq 0。$$

令 $x_j = t_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} t_j, j=1,\cdots,m$。那么,我们有 $\sum_{j=1}^{m} x_j$ 且(16:5)给出 $x_1 \geqq 0,\cdots,x_m \geqq 0$。故,

(16:9) $\vec{x} = \{x_1,\cdots,x_m\}$ 属于 S_m

且(16:8)给出

(16:10) $$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j \leqq 0, \qquad i=1,\cdots,n。$$

另一方面,考虑 C 不包含 $\vec{0}$ 这一可能性。那么,定理 16.3 的(16:B)允许我们推断一个包含 $\vec{y}$ 的超平面的存在性[见16.2.1中的(16:2:a)],使得整个 C 属于由这个超平面产生的一个半空间[见 16.2.1 中的(16:2:b)]。记这个超平面为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b。$$

由于 $\vec{0}$ 属于它,故 $b=0$。因此,问题中的半空间是

(16:11) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b。$$

140 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^m,\vec{\delta}^1,\cdots,\vec{\delta}^n$ 属于这个半空间。对于 $\vec{\delta}^l$,(16:11)变成 $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{il} > 0$,即 $a_l > 0$。这样,我们有

(16:12) $$a_1 > 0,\cdots,a_n > 0。$$

对于 $\vec{x}^j$,(16:11)变成

(16:13) $$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)a_i > 0。$$

令 $w_i = a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i, i=1,\cdots,n$。那么,我们有 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ 且

(16:12)给出 $w_1>0,\cdots,w_n>0$。故

(16:14)　　$\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 属于 S_n。

且(16:13)给出

(16:15)　　$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i>0, j=1,\cdots,m$。

总结(16:9)、(16:10)、(16:14)和(16:15),我们可以说:

(16:C)　　给定一个 n 行 m 列矩阵,记这一矩阵的元素为 $a(i,j), i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,m$,那么,要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 满足

(16:16:a)　　$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j \leqq 0,\quad i=1,\cdots,n,$

要么 S_n 中有一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

(16:16:b)　　$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)x_j \leqq 0,\quad j=1,\cdots,m$。

另外,我们还看到:

(16:16:a)与(16:16:b)是相互排斥的。

证明:假设(16:16:a)和(16:16:b)同时成立。分别用 w_i 乘(16:16:a)中的每一不等式并加总,$i=1,\cdots,n$。这给出

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a(i,j)w_i x_j \leqq 0。$$

用 x_j 乘(16:16:b)并加总,$j=1,\cdots,m$。这给出 141

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a(i,j)w_i x_j > 0。$$①

这样,我们得到了一个矛盾。

---

① >0,而不只是≧0。事实上,=0会要求 $x_1=\cdots=x_m=0$。这是不可能的,因为 $\sum_{j=1}^{m}=1$。——141,①

16.4.2 我们将矩阵 $a(i,j)$ 换成其负转置矩阵，即我们用 $i=1,\cdots,n$ 记行（而不像原来那样是列）；用 $j=1,\cdots,m$ 记其列（而不像原来那样是行）。令这一矩阵的元素为 $-a(i,j)$［而不是原来的 $a(i,j)$］。（因此，n,m 也被交换了。）

对这一新的矩阵，我们重述 16.4.1 中的最终结果。但在表述中，我们用 $\overrightarrow{x'}=\{x'_1,\cdots,x'_m\}$ 替换 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$，用 $\overrightarrow{w'}=\{w'_1,\cdots,w'_n\}$ 替换 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$。而且，我们用原来的矩阵术语陈述结果。

那么，我们有：

(16:D) 给定一个 n 行 m 列矩阵。记其元素为 $a(i,j)$，$i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$。那么，要么 S_m 中存在一个向量 $\overrightarrow{x'}=\{x'_1,\cdots,x'_m\}$ 满足

(16:17:a) $$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x'_j<0,i=1,\cdots,n,$$

要么 S_n 中存在一个向量 $\overrightarrow{w'}=\{w'_1,\cdots,w'_n\}$ 满足

(16:17:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w'_i\geqq 0,j=1,\cdots,m。$$

而且两者是相互排斥的。

16.4.3 现在，我们把 16.4.1 和 16.4.2 中的结果结合起来。它们意味着，我们必定有(16:17:a)，或(16:16:b)，或(16:16:a)且(16:17:b)。还有，这三种可能性是相互排斥的。

用同一个矩阵 $a(i,j)$，对于 16.4.1 和 16.4.2 中的向量 $\overrightarrow{x'}$、$\vec{x}$、$\vec{w}$、$\overrightarrow{w'}$，我们写 $\vec{x}$、$\vec{w}$、$\overrightarrow{x'}$、$\overrightarrow{w'}$，我们有：

(16:E)　要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,$ 142
$x_m\}$ 满足

(16:18:a)
$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j<0, i=1,\cdots,n,$$

要么 S_n 中存在一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

(16:18:b)
$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)x_i>0, j=1,\cdots,m,$$

要么 S_m 中的向量 $\vec{x'}=\{x'_1,\cdots,x'_m\}$ 和 S_n 的向量 $\vec{w'}=\{w'_1,\cdots,w'_n\}$ 满足

(16:18:c)
$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x'_j\leqq 0, i=1,\cdots,n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w'_i\geqq 0, j=1,\cdots,m。$$

(16:18:a)、(16:18:b)和(16:18:c)相互排斥。

一方面,(16:18:a)与(16:18:c)结合,另一方面(16:18:b)与(16:18:c)结合,我们得到下述较简单但弱一些的结果。①②

(16:F)　要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,$
$x_m\}$ 满足

(16:19:a)
$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j\leqq 0, i=1,\cdots,n,$$

---

① (16:19:a)、(16:19:b)两者并不相互排斥:它们的交正好是(16:18:c)。——142,①

② 这一结果本来可以直接从 16.4.1 的最终结果得到:(16:19:a)恰好是(16:16:a),且(16:19:b)是(16:16:b)的弱形式。我们给出上述详细讨论,是因为它能够使我们更好地认识整体情况。——142,②

要么 S_n 中存在一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

(16:19:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i \geqq 0, j=1,\cdots,n。$$

16.4.4 考虑一个斜对称矩阵 $a(i,j)$，即该矩阵与 16.4.2 意义上的负转置矩阵相同，即 $n=m$ 且

$$a(i,j) = -a(j,i), i,j=1,\cdots,n。$$

143 如此一来，16.4.3 中的条件(16:19:a)和(16:19:b)表达的是如下相同事情：事实上，(16:19:b)是

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i \geqq 0;$$

这可以被写成

$$-\sum_{i=1}^{n} a(j,i)w_i \geqq 0, \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{n} a(j,i)w_i \leqq 0。$$

我们只需将 i,j 写成 j,i①，从而变成了 $\sum_{j=1}^{n} a(i,j)w_j \leqq 0$。然后，用 $\vec{x}$ 替换 $\vec{w}$，我们有 $\sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_j \leqq 0$。这正是(16:19:a)。

因此，我们可以用它们中的任一个——如(16:19:b)——替换(16:19:a)和(16:19:b)的析取。这样，我们有：

(16:G) 如果矩阵 $a(i,j)$ 是一个斜对称矩阵(从而 $n=m$，见上)，那么，S_n 中存在一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n。$$

① 注意，由于 $n=m$，这只不过是符号变化而已！——143，①

17. 混合策略:全部博弈的解

17.1 两个基本例子

17.1.1 为了克服我们在14.7中看到的非严格决定情况中的困难,我们要重新思考这一现象的最简单例子:"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏(见14.7.2,14.7.3)。关于这些博弈的这类"问题",存在着经验和常识性的态度,所以,我们有希望通过观察和分析这些态度来得到非严格决定(非零和)博弈的解的一些线索。

"硬币配对"博弈中,不存在一个优于其他玩法的特殊玩法,即出"正面"不比出"反面"好,出"反面"也不比出"正面"好,关键是发现对手的意图。这似乎堵死了通向一个解的出路,因为博弈规则明确禁止每位玩家在做出自己的选择时知道对手的行动。不过,上述观察并不完全符合实际。在与一个有一定才智的对手玩"硬币配对"游戏 144
时,玩家将不会试图去发现对手的意图,而是专心于避免自己的意图不被发现,即在多次游戏中无规律地出"正面"和"反面"。由于我们只描述一次博弈,我们必须讨论的是一次博弈的过程,而不是一系列博弈的过程,我们倾向于如下描述:玩家的策略并非由出"正面"或出"反面"组成,而是由以0.5的概率出"正面"和以0.5的概率出"反面"组成。

17.1.2 我们可以这样想:为了以理性的方式玩"硬

币配对”游戏，这个玩家在每次玩之前决定按50∶50之类的概率随机地出“正面”或“反面”。[①] 重要的是，这一方法保证他不会输。事实上，无论对手的策略是什么，这一博弈的结果的数学期望都是零。[②] 当对手肯定出“正面”或肯定出“反面”时，这尤为正确。而且，当他的对手像他一样按照确定的概率出“正面”或“反面”时，上述说法也正确。[③]

因此，如果我们允许一个玩家在“硬币配对”中使用“统计”策略，即按照（由他自己选定的）确定的概率把各种玩法混合起来，那么，他就能够保证自己不输。事实上，我们为他指定了一个策略，使用这一策略，无论对手如何玩，他都不会输。对于他的对手来说，同一说法也是正确的，即他的对手也能够使用一个统计策略，无论他如何玩，他的对手都不会输。[④]

读者将会看到，这与14.5中的讨论十分相似。[⑤] 根据那里的讨论，我们会理所当然地认为一次“硬币配对”的值是0，“正面”和“反面”50∶50这一统计混合是一个好的

---

① 例如，他可以先投掷一枚骰子——当然不让对手看到结果，如果点数是偶数，那么，出“正面”，如果点数是奇数，那么，出“反面”。——144，①

② 也就是说，他胜的概率等于输的概率，因为在这种条件下，无论对手采取什么行动，对上的概率和没有对上的概率都是0.5。——144，②

③ 如$p,1-p$。对于我们考虑的那个玩家，我们使用概率0.5，0.5。——144，③

④ 从统计意义上说，这个玩家不会输的意思是，他输的概率≤他赢的概率；他不会赢则意味着，前者≥后者。实际中，每个玩家都会输或赢，因为“硬币配对”不可能无胜负。——144，④

⑤ 我们尤其指14.5.1中的(14:C:d)和(14:C:e)。——144，⑤

策略。

在“石头、剪子、布”游戏中的情况大体也是这样。常识告诉我们，好的玩法是各个备择出现的概率都是$\frac{1}{3}$。①像上例那样，我们能够设想一次博弈的值以及好的策略。② 145

17.2 上述观点的推广

17.2.1 一个看似合理的做法是，我们把在“硬币配对”游戏和“石头、剪子、布”游戏中发现的结果推广到所有二人零和博弈。

我们使用博弈的正规型，两个玩家的可能选择是 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$ 和 $\tau_2 = 1, \cdots, \beta_2$，与前面一样，玩家 1 的结果是 $H(\tau_1, \tau_2)$。我们不再假设严格决定性。

让我们重复 17.1 中的成功做法，即我们设想有两位玩家，他们的博弈“理论”不是由确定的策略选择组成，而是由按一定概率选择若干策略组成。③ 因此，玩家 1 要选择的不是一个数 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$——即相应策略 $\sum_1^{\tau_1}$，而是

---

① 像前面那样，我们可以在这里引入一个机会装置，脚注①中提到的骰子就是可能的一个。例如，如果点数是 1 或 2，这个玩家就出“石头”；如果点数是 3 或 4，他就出“剪子”；如果点数是 5 或 6，他就出“布”。——144，⑥

② “石头、剪子、布”游戏中有和局，但不输仍然意味着输的概率≤赢的概率，且不赢意味相反的情况。见第 144 页脚注④。——145，①

③ 对于所有策略，这些概率的相等（如上两例中$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$）是偶然的！不难理解，这归因于这些博弈中的不同备择以对称的方式出现。从此以后，我们假设概率在一个策略的描述中的出现将是基本的事情，其具体取值视具体情况而定。——145，②

β_1 个数 $\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}$，它们分别是策略 $\sum_1^1,\cdots,\sum_1^{\beta_1}$ 的概率。同样，玩家 2 要选择的不是一个数 $\tau_2=1,\cdots,\beta_2$——即其相应策略 $\sum_2^{\tau_2}$，而是 β_2 个数 $\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_1}$，它们分别是策略 $\sum_2^1,\cdots,\sum_2^{\beta_2}$ 的概率。作为不相交且穷尽的备择的概率，ξ_{τ_1}，η_{τ_2} 满足

(17:1:a) $\qquad \xi_{\tau_1}\geqq 0, \qquad \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\xi_{\tau_1}=1;$

(17:1:b) $\qquad \eta_{\tau_2}\geqq 0, \qquad \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2}=1$。

别无其他。

我们构造向量 $\vec{\xi}=\{\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}\}$， $\vec{\eta}=\{\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}\}$。上述条件表明，按照 16.2.2 的说法，$\vec{\xi}$ 必定属于 S_{β_1} 且 $\vec{\eta}$ 必定属于 S_{β_2}。

如上所述，在这些结构中，一位玩家并不选择他的策略，而是使用所有可能的策略，他要选择的是利用这些策略进行博弈的概率。在一定程度上，这一推广也遇到了非严格决定情况中的主要困难：我们看到，这种情况的特征是，对于每位玩家来说，自己的意图被对手发现总是不利
146 的。① 因此，在这种情况下，一位玩家的一个重要考虑是防止自己的意图被对手发现。② 以一定的概率随机地使用不同策略进行博弈，就能够在一定程度上有效地保护自己：借助这种办法，对手无法确定这个玩家的策略将会是

① 14.7.1 的 $\Delta>0$。——145，③

② 但未必仅此一项考虑。——146，①

什么，因为这个玩家自己也不知道。[1] 显然，无知也能够十分有效地防止直接或间接信息泄露。

17.2.2 我们似乎偶尔限制了玩家的行动自由。有可能，他想使用一个确定的策略，排除其他策略；或者，他想按照一定的概率使用某些特定的策略，绝对排除了其余策略。[2]我们强调，这些概率完全在我们的方案之内。一位根本不想使用特定策略的玩家将简单选择其相应概率为 0。一位想使用某一策略、排除其他策略的玩家将选择相应策略的概率为 1，选择其他策略的概率为 0。

因此，如果玩家 1 只想使用策略 $\sum_1^{\tau_1}$，他将选择 $\vec{\xi}$ 的坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_1}$（见 16.1.3）。类似，对于玩家 2，有策略 $\sum_2^{\tau_2}$ 和向量 $\vec{\eta}$，$\vec{\delta}^{\tau_2}$。

出于这些考虑，我们把 S_{β_1} 中一个向量 $\vec{\xi}$，S_{β_2} 中一个向量 $\vec{\eta}$ 分别称为玩家 1 和玩家 2 的一个**统计策略**或**混合策略**。坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_1}$、$\vec{\delta}^{\tau_2}$ 分别对应着玩家 1 和玩家 2 的原始

---

① 如果对手有足够多的有关这位玩家的“风格”的统计经验，或者他在合理预计这位玩家的行为方面十分聪明，他有可能发现不同策略的概率——频率。（我们无须讨论这是否会发生和如何发生。见 17.3.1 中等讨论。）但是，根据概率和随机性的基本概念，在这种情况下，没有人能够预见具体情况下将会发生什么事情。（零概率例外。见后。）——146，②

② 在这种情况下，他的策略被对手发现的风险变大了。不过，他所考虑的策略也许比其他策略有内在的优越性，从而值得冒这种风险。这样的事情的确会发生，例如，在严格决定情况中“好的”策略的极端形式就是这样。见 14.5，特别是 14.5.2 中的（14:C:a）和（14:C:b）。——146，③

策略τ_1、τ_2——即 $\sum_1^{\tau_1}$、$\sum_2^{\tau_2}$。我们把它们称为严格策略或纯策略。

17.3 上述程序应用于一次具体博弈的理由

17.3.1 至此，读者也许有点心神不安，并且感觉到我们在前面的讨论中同样地强调的两种观点之间的冲突。一方面，我们一直坚持我们的理论是一种静态理论
147 （见 4.8.2），只分析一局博弈的过程，不分析一个博弈序列（见 17.1）。但是，另一方面，我们又强调策略被对手发现的危险（见 14.4、14.7.1 和 17.2）。如果不进行连续观察，如何发现一位玩家的策略呢？尤其是，如果发现一个使用多种策略的随机混合的玩家呢！我们已经否决了这一观察应该被扩展到多局博弈，即使博弈规则使得这样的观察是可能的，即它们导致一个漫长而重复的博弈，这一观察也只会在博弈的进程中逐步地和相继地实现。在开始的时候，它肯定是无法做到的。这会牵涉到各种各样的动态考虑，而我们却坚守静态理论！另外，博弈规则有可能不提供这样的观察机会；①“硬币配对”和“石头、剪子、布”游戏就肯定不允许这样的观察。在第 14 节的讨论和概率得到运用的当前讨论中都出现这些冲突和矛盾。

如何解决这些矛盾呢？

17.3.2 我们的答案是：

在开始的时候，第 14 节和第 17 节中结果——14.5 和

① 即在一局博弈之内“逐步”观察对手的行为。——147，①

17.8 的讨论——的最终证明不包含任何这类矛盾的因素。这样，我们就能够说，我们的最终证明是正确的，尽管引出这些证明的这一试探过程是值得怀疑的。

不过，这些方法也是能够得到证明的。我们并不想做出让步：我们的观点是静态的，而且，我们分析的只是一局博弈。我们正在试图建立一个令人满意的二人零和博弈理论。因此，我们并非在从已经有的、经受了合理考验的坚实理论出发进行演绎，而是在寻找这样一种理论。① 在已有的过程中，传统逻辑工具和间接证明工具的运用是完全合理的。这包括，设想我们有了关于特定理想类型的博弈的令人满意的理论②，努力勾画这一想像中的情况的结果，然后从中得出假设中的理论将会是个什么样子的结论。如果这一过程得到了成功应用，那么，有关这一典型情况的假设中的理论的可能范围就会缩小到这样一个程度：只剩下一种可能性，即借助这 148
一方法，这一理论得以确立。③ 当然，这一方法的应用甚至有可能更加"成功"，使可能的范围缩小到什么东西都

---

① 我们的方法当然是经验方法：我们正试图理解、使之形式化和推广我们认为是典型的最简单博弈的那些特征。这是有着经验基础的所有学科学中的标准做法。——147，②

② 这是对这样的一个事实的认同，即我们还没有这样一个理论，而且，我们也无法想像它会是什么样子，假如我们将有一个的话。

这并不比任何学科中的间接证明更差（例如，数学和物理学中的反证法）。——147，③

③ 物理学中有若干这类重要例子。狭义相对论、广义相对论和波动力学的发现就是这类例子。见达布罗（A. D'Abro）：《力学在现代物理学中的衰落》，纽约，1939。——148，①

没有剩下，即它证明了渴望中的那种一致理论是不存在的。[①]

17.3.3 现在，让我们设想存在着一个完备的二人零和博弈理论，它告诉一位玩家做什么，而且，它是绝对可信的。如果这位玩家知道这个理论，那么，每一位玩家都不得不假设，他的这一策略已经被对手发现。对手知道这一理论，而且，他知道，一位玩家要是不服从这一策略，就是不聪明的。[②] 因此，假设存在一个令人满意的理论，使我们对一位玩家的策略被对手"发现"这一情况的研究变得合理了。而且，只有在我们能够协调 Γ_1，Γ_2 这两个极端情况——玩家 1 的策略"被发现"或玩家 2 的策略"被发现"，一种合理的理论才能够存在。

对于最初的研究方法——不使用概率（即纯策略）——来说，我们能够做到的程度是由 14.5 决定的。

我们看到，严格决定的情况是这样一种情况，即存在一个基于这一情况的令人满意的理论。我们现在要借助概率（即混合策略）使我们的研究更深入一步。14.5 中不涉及概率时所利用的工具将再次得到利用，即关于一位玩

---

① 在物理学中，这样的事情也出现过。在量子力学中，玻尔和海森堡（N. Bohr-Heisenberg）关于"不可同时观察的量"的分析就允许这种解释。见玻尔（N. Bohr）：《原子论和自然描述》，伦敦，1931，第 I 章。——148，②

② 为什么不服从这一策略就是不聪明的呢？这不是我们要关心的问题。我们已经假设，这一理论是绝对可信的。

从我们的最终结果来看，这是不可能的。我们将发现一个令人满意的理论。它毕竟意味着这位玩家的策略被其对手发现了。不过，该理论只告诉他如何调整自己以避免输掉。见 17.6 中的定理和 17.8 中我们关于完备解的讨论。——148，③

家被对手"发现"的分析。[①]

我们将证明,假设中的理论能够得到证实,而且,其中包括所有情况(不仅仅是严格决定的情况,见 17.5.1,17.6)。

在这一理论发现之后,我们必须通过直接的论述来说明其合理性。[②] 对严格决定的情况,我们已经在 14.5 中这么做了;对我们目前的完备理论,我们也将在 17.8 中这么做。

17.4 混合策略的小博弈和大博弈

17.4.1 现在,我们面对的情况是:玩家 1 从 S_{β_1} 中任 149
意选择一个元素 $\vec{\xi}$,玩家 2 从 S_{β_2} 中任意选择一个元素 $\vec{\eta}$。

如果玩家 1 只想使用策略 $\sum_1^{\tau_1}$,那么,他将把 $\vec{\xi}$ 选为坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_1}$(见 16.1.3);类似,如果玩家 2 只想使用策略 $\sum_2^{\tau_2}$,那么,他将把 $\vec{\eta}$ 选为坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_2}$。

我们仍然假设玩家 1 在不知道玩家 2 的 $\vec{\eta}$ 选择的情况下做出 $\vec{\xi}$ 选择,反之亦然。

这是说,当这些选择做出后,玩家 1 实际上将按照概率 ξ_{τ_1} 使用 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$,玩家 2 实际上将按照概率 η_{τ_2} 使用

---

① 即一个理论只利用我们目前的工具。当然,我们并不装作能够做出"绝对的"陈述。如果我们目前的要求无法得到满足,那么,我们就不得不寻找其他理论基础。实际上,从有着纯策略的第 14 节过渡到有着混合策略的 17.8,我们已经这么做了。——148,④

② 如上面描述的那样,间接论述只给出必要条件。因此,它有可能给出谬论(借助谬论来证明),或者将可能性缩小到只剩一种情况;不过,在后一种情况下,仍有必要证明剩下那种可能性是令人满意的。——148,⑤

$\tau_2=1,\cdots,\beta_2$。由于他们的选择是相互独立的，结果的数学期望是

$$(17:2)\qquad K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\beta_1}\eta_{\beta_2}。$$

换句话说，我们用一个基本上与 Γ 有着相同结构的新博弈替换了 Γ，但是，它们之间存在着如下形式上的不同：数 τ_1,τ_2——玩家选择——由向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 取代；函数 $H(\tau_1,\tau_2)$——结果或一局博弈的数学期望——由 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 取代。这些讨论证明了，我们现在看待 Γ 的观点与 14.1.2 的观点等价，正如上面描述的那样，惟一的区别是，用 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$、$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 替换了 τ_1,τ_2、$H(\tau_1,\tau_2)$。这一同构暗示着我们运用最初的 Γ 的相同工具的应用，正如 14.2、14.3.1 和 14.3.3 中描述的那样，与小博弈 Γ_1 和大博弈 Γ_2 的比较。

17.4.2 在 Γ_1 中，玩家 1 首先选择其 $\vec{\xi}$，玩家 2 在充分知道其对手的选择 $\vec{\xi}$ 的情况下做出自己的选择 $\vec{\eta}$。在 Γ_2 中，颠倒他们的选择顺序。因此，14.3.1 中的讨论可以一字不漏地照搬过来。选择一个特定的 $\vec{\xi}$ 的玩家 1 期待着玩家 2 选择其 $\vec{\eta}$ 使 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 最小，即玩家 1 的选择 $\vec{\xi}$ 导致 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$。这仅仅是 $\vec{\xi}$ 的一个函数，从而，玩家 1 应该选择他的 $\vec{\xi}$ 使 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 最大。因此，对于玩家 1 来说，Γ_1 的一局博弈的值是

150

$$v'_1=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

类似地，对于玩家 1 来说，Γ_2 的一局博弈的值是

$$v'_2 = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})。$$

[对手有理性行为的假设并不真正起作用，因为 14.3.1 和 14.3.3 中的（14：A：a）—（14：A：e），（14：B：a）—（14：B：e）也可以一字不漏地照搬过来。]

像 14.4.1 那样，我们可以认为，对于玩家 1 来说，Γ_1 劣于 Γ_2。这一明显事实表明

$$v'_1 \leqq v'_2,$$

这一结果的严格证明包含在 13.4.3 的（13：A*）之中，那里的 x、y、φ 对应着我们的 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$、K。① 如果恰好

$$v'_1 = v'_2,$$

那么，14.5 中的分析可以照搬过来。（14：C：a）—（14：C：f）、（14：D：a）和（14：D：b）界定一个"好的"$\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 的概念，并把对于玩家 1 来说一局博弈的值固定为

$$v' = v'_1 = v'_2。②$$

根据 13.4.3，当且仅当 K 的一个鞍点存在，所有这些才会发生。（那里的 x、y、φ 对应着我们 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$、K。）

17.5 广义严格决定性

17.5.1 现在，我们用 v'_1，v'_2 替换了（14：A：c）和（14：B：c）中的 v_1，v_2，而且，上面的讨论表明，前者能够起

---

① 虽然 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 是向量，即实数序列（$\xi_1, \cdots, \xi_{\beta_1}$）和（$\eta_1, \cdots, \eta_{\beta_2}$），但在最大化和最小化中，我们完全可以视它们中的每一个为一个变量。它们的取值范围当然是我们在 17.8 中引入的集合 S_{β_1} 和 S_{β_2}。——150，①

② 详细说明见 17.8。——150，②

到后者的作用。不过，我们像当初依赖 $v_1 = v_2$ 那样依赖 $v'_1 = v'_2$。人们会问，这一替换有什么好处呢？

事实上，对于任意的 Γ，有 $v'_1 = v'_2$ 比 $v_1 = v_2$ 更有前途。过去，当 $v_1 = v_2$ 时，我们称 Γ 为**严格决定的**；现在，为了有所区别，我们称 $v_1 = v_2$ 的 Γ 为**狭义严格决定的**，称 $v'_1 = v'_2$ 的 Γ 为**广义严格决定的**。除非我们能够证明前者意味着后者，引入这一专门术语才是合理的。

151 常识告诉我们，上述说法是显然的：引入混合策略增加了玩家保护自己的策略不被“发现”的能力，因此 v'_1、v'_2 介于 v_1、v_2 之间是预料之中的事情。出于这一理由，我们可以断定

(17:3) $\quad v_1 \leqq v'_1 \leqq v'_2 \leqq v_2$。

（该不等式保证上述说法。）

为了排除可能有的怀疑，我们将给出(13:3)的严格证明。作为另外一个引理的推论，这很容易证明。

17.5.2 首先，我们证明如下相关引理：

(17:A) 对于 S_{β_1} 每一个 $\vec{\xi}$，

$$\operatorname{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \operatorname{Min}_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$$

$$= \operatorname{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$

对于 S_{β_2} 中每一个 $\vec{\eta}$，

$$\operatorname{Max}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \operatorname{Max}_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$$

$$= \operatorname{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}。$$

证明:首先证明第一个公式。第二个公式的证明完全相同,交换 Max 和 Min,$\leqq$ 和 $\geqq$ 即可。

考虑一个特殊向量 $\vec{\eta}=\overrightarrow{\delta^{\tau'_2}}$(见 16.1.3 和 17.2 末尾),我们有

$$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\leqq\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\delta_{\tau_2\tau'_2}$$
$$=\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau'_2)\xi_{\tau_1}。$$

由于上式对所有 τ'_2 成立,故

(17:4:a) $$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\leqq\mathrm{Min}_{\tau'_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau'_2)\xi_{\tau_1}。$$

另一方面,对所有 τ_2,

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\leqq\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$

给定 S_{β_2} 中任一 $\vec{\eta}$,用 η_{τ_2} 与之相乘并对 $\tau_2=1,\cdots,\beta_2$ 求和。因为 $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2}=1$,故

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\geqq\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$ 152

由于上述结果对所有 $\vec{\eta}$ 都成立,故

(17:4:b) $$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\geqq\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$

(17:4:a) 与(17:4:b) 合起来给出我们需要的关系。

如果我们把上述公式与 17.4 中 v'_1、v'_2 的定义结合起来,那么,我们得到

(17:5:a) $$v'_1=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1},$$

(17:5:b) $$\mathrm{v}'_2 = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\tau_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}。$$

这些公式有一个简单的文字解释：在 v'_1 的计算中，我们只须保护玩家1的策略不被发现，这体现在 $\vec{\xi}$（而不是 τ_1）的使用之中；玩家2可以像原来那样继续使用 τ_2（而不使用 $\vec{\eta}$）。在计算 v'_2 时，交换玩家的角色即可。常识告诉我们，这是明显合理的：v'_1 属于博弈 Γ_1（见17.4和14.2）；在那里，玩家2在玩家1之后做出选择且充分知道玩家1的选择，因此他不需要防止自己的策略被玩家1发现。由于 v'_2 属于博弈 Γ_2（同上），玩家的角色被交换了。

如果我们限制 $\vec{\xi}$ 在上述公式中的 $\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}$ 中的变动范围，v'_1 的值就会变得小一些。让我们将其限制为向量 $\vec{\xi} = \vec{\delta}^{\tau'_1}$，($\tau'_1 = 1,\cdots,\beta'_1$，见16.1.3和17.2末尾)。由于

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\delta_{\tau_1\tau'_1} = H(\tau'_1,\tau_2),$$

我们的表达式被替换为

$$\mathrm{Max}_{\tau'_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau'_1,\tau_2) = \mathrm{v}_1。$$

这样，我们证明了

$$\mathrm{v}_1 \leqq \mathrm{v}'_1。$$

类似（见我们上面的引理的证明前的说明），将 $\vec{\eta}$ 限制为 $\vec{\eta} = \vec{\delta}^{\tau'_2}$，我们有

$$\mathrm{v}_2 \geqq \mathrm{v}'_2。$$

153 结合 $\mathrm{v}_1 \leqq \mathrm{v}'_1$（见17.4），这些不等式证明了

$$\mathrm{v}_1 \leqq \mathrm{v}'_1 \leqq \mathrm{v}'_2 \leqq \mathrm{v}_2。$$

17.6　主要定理证明

17.6　我们已经证明，预料之中的广义严格决定性（$v'_1 = v'_2$）在狭义严格决定情况下是成立的。我们关于"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏的讨论表明，它还在其他一些情况下成立，即我们能够有 $v'_1 = v'_2$ 但没有 $v_1 = v_2$。[①]因此，我们可以在 17.5.1 的意义上说，从狭义严格决定性过渡到广义严格决定性的确是一个进步。不过，就我们所知，这一进步也许并不包括本应该控制的范围。特定的博弈 Γ 甚至能够是非广义严格决定的，即我们还没有排除如下可能性

$$v'_1 < v'_2。$$

如果这种情况发生了，那么，我们在 14.7.1 中的讨论就又适用了，而且，在更大程度上，发现对手的策略有着确定的优势：

$$\Delta' = v'_1 = v'_2 > 0,$$

而且，难以看出，没有关于"谁发现谁的策略"的进一步假设，博弈理论如何能够建立起来。

因此，关键是，我们要能够证明，这样的事情永远也不会发生。对所有博弈 Γ，总有

$$v'_1 = v'_2,$$

即

$$(17:6)\qquad \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}),$$

或者说[再次应用 13.4.3 中的（13：B*），那里的 x、y、φ 对

---

① 在这两种游戏中，$v_1 = -1$，$v_2 = 1$（见 14.7.2 和 14.7.3），但是，17.1 中的讨论证明了 $v'_1 = v'_2 = 0$。——153，①

应着我们这里的 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$、K]：$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的一个鞍点存在。

这是一个对所有具有如下形式的函数 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 都成立的一个一般定理：

$$(17:2) \qquad K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}。$$

系数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 绝对不受任何限制；如 14.1.3 中描述的那样，它们构成一个完全随意的矩阵。变量 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 分别是实数
154 序列 $\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}$；它们的定义域分别是集合 S_{β_1}、S_{β_2}（见第150页脚注①）。具有（17:2）形式的函数 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 被称为双线性型。

借助 16.4.3 的结果，这一证明并不困难。[①]下面就是

---

① 这一定理最初是在博弈论的创始人之一的一篇公开发表的文章中提出并得到证明的：冯·诺伊曼："Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," Math. Annalen, Vlo. 100(1928), pp. 295—320。

这一最小最大化问题的一个略微更一般形式产生于另一个与生产方程有关的数理经济学问题之中。

冯·诺伊曼："Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes," Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, Vol. 8(1937), pp. 73—83。

值得指出的是，两个大不相同的问题联系到数理经济学 —— 尽管采取了完全不同的分析方法 —— 却导致了同一数学问题，而且具有相当非同寻常的类型："最小 — 最大型"。如上述第二篇文章里提到的那样，这里以及在其他方向，也许存在着更深的形式上的联系。这个题目应该得到进一步澄清。

第一篇文章中给出的定理证明用到了拓扑学和谓词演算。第二篇文章包含一个不同的证明，它完全是拓扑学的证明，并使这一定理联系到这一学科中的一个重要工具：布劳威尔（L. E. J. Brouwer）的"不动点定理"。这方面得到了进一步澄清，且这一定理的证明在卡库塔尼（S. Kakutani）手里得到简化："布劳威尔的不动点定理的推广"、《杜克数学杂志》，第 8 卷（1941），第 457—459 页。

我们的证明：

我们应用 16.4.3 中的(16:19:a)、(16:19:b)，用我们这里的 τ_1、τ_2、β_1、β_2、$H(\tau_1,\tau_2)$ 替换那里的 i、j、n、m、$a(i,j)$，并用我们这里的 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 替换那里的 $\vec{w}$、$\vec{x}$。

如果(16:19:b) 成立，那么，我们有 S_{β_1} 中的一个向量 $\vec{\xi}$ 满足

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \geqq 0, \qquad \tau_2 = 1,\cdots,\beta_2,$$

即

$$\mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \geqq 0。$$

因此，17.5.2 的公式(17:5:a) 给出

$$\mathrm{v}'_1 \geqq 0。$$

如果(16:19:a) 成立，那么，我们有 S_{β_2} 中的一个向量 $\vec{\eta}$ 满足

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \leqq 0, \qquad \tau_1 = 1,\cdots,\beta_1,$$

即 155

$$\mathrm{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \leqq 0。$$

所有这些证明肯定都不是基本的证明。第一个基本证明是由维勒(J. Ville)给出的，见波莱尔(E. Borel) 等编辑的论文集："Traité du Calcul des Pobabilités et de ses Applications," Vlo. IV, 2："Applications aux Jeux de Hasard," 巴黎(1938)，由维勒给出的注："Sur la Théorie Générale des Jeux où intervient l' Habileté des Joueurs," pp. 105—113。

我们接下来给出的证明保留了由维勒提出的基本化，且变得尤其简单。这一方法的关键是与第 16 节中的凸性理论的联系，尤其是与 16.4.3 的结果的联系。——154, ①

所以,17.5.2 的公式(17:5:b) 给出

$$v'_2 \leqq 0。$$

这样,我们看到:要么 $v'_1 \geqq 0$,要么 $v'_2 \leqq 0$,即

(17:7) $\qquad v'_1 < 0 < v'_2$

是不可能的。

现在,我们随便选一个数 w,并用 $H(\tau_1,\tau_2) - w$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$。①

用 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - w\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$ 替换 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$——由于 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 分别属于 S_{β_1}、S_{β_2} 之中,且 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\xi_{\tau_1}, \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\eta_{\tau_2} = 1$,也就是说用 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - w$ 进行替换。因此,v'_1、v'_2 被分别替换为 $v'_1 - w$ 和 $v'_2 - w$。②所以,(17:7) 应用于 $v'_1 - w$ 和 $v'_2 - w$ 给出

(17:8) $\qquad v'_1 < w < v'_2$ 是不可能的。

w 是完全随意的一个数。假如 $v'_1 < v'_2$,那么,我有可能选择一个数 w 使 $v'_1 < w < v'_2$,这与(17:8) 矛盾。所以,$v'_1 < v'_2$ 是不可能的。这就证明了 $v'_1 = v'_2$。证明完毕。

17.7 纯策略与混合策略方法比较

17.7.1 让我们进一步思考

$$v'_1 = v'_2$$

的含义。这一结果的基本特点是,我们总有 $v'_1 = v'_2$,但并不总有 $v_1 = v_2$,即我们总有广义严格决定性,而并不总有

① 即博弈 Γ 被一个新博弈取代,它与 Γ 的惟一不同之处是在博弈结束时玩家 1 的得(玩家 2 的失)少一个固定的量 w。——155,①

② 如果我们记得上面的脚注,这是十分清楚的。——115,②

狭义严格决定性(见 17.6 开头)。

用数学来表达：

我们总有

$$(17:9) \quad \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}),$$

即 156

$$(17:10) \quad \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$$
$$= \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}。$$

应用(17:A),我们甚至可以将其写成

$$(17:11) \quad \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$$
$$= \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\tau_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}。$$

但我们并不总有

$$(17:12) \quad \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)。$$

让我们比较(17:9)和(17:12):(17:9)总是成立,但是,(17:12)并不总是成立。然而,两者的区别仅仅在于 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 和 τ_1,τ_2。为什么用前者替换后者之后,不成立的(17:12)就转变成了成立的(17:9)了呢?

这是因为,(17:12)中的 $H(\tau_1,\tau_2)$ 是其变量 τ_1,τ_2 的一个完全随意的函数(见 14.1.3),而(17:9)中的 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是其变量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$——即 $\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1};\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}$——的一个极为特殊的函数,一个双线性型(见 17.6 的第一部分)。因此,$H(\tau_1,\tau_2)$ 的绝对一般性使得(17:12)的证明是不可能的,而 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的特殊性——双线性型——提供了

(17:9) 得到证明的基础,见 17.6。[1]

17.7.2 看似不可理解的是,尽管 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是在 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的基础上通过一个有着全面说明的推广过程得到的,前者竟然比后者更加特殊:正如 17.2 描述的那样,我们用混合策略替换最初的纯策略而得到了 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$,即我们用 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 替换 τ_1,τ_2。

但是,进一步思考就会排除这一悖论。与 $H(\tau_1,\tau_2)$ 相
157 比,$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个十分特殊的函数;不过,其变量比原来的变量 (τ_1,τ_2) 有着更广泛的取值范围。事实上,τ_1 以有限集 $(1,\cdots,\beta_1)$ 作为其定义域,而 $\vec{\xi}$ 的取值范围是集合 S_{β_1},它是 β_1 维线性空间 S_{β_1} 中的一个 (β_1-1) 维空间(见 16.2.2 和 17.2)。关于 τ_2 和 $\vec{\eta}$,有类似的说法。[2]

---

① $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个双线性型。这归因于每当涉及概率时,我们就使用"数学期望"。显然,这个双线性型与一个解的存在性有关。从数学上讲,这打开了一个相当有意思的视角:我们可以探索用其他概念替代"数学期望",而不会破坏我们的解,即 17.6,关于二人零和博弈的结果。

显然,在很多方面,"数学期望"都是一个很基本的概念,其在效用理论中的意义在 3.7.1 中得到了强调。——156,①

② 注意,$\vec{\xi}=\{\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}\}$ 有分量 ξ_{τ_1},$\tau_1=1,\cdots,\beta_1$,也包含 τ_1;但是,存在着基本的区别。在 $H(\tau_1,\tau_2)$ 中,τ_1 本身是一个变量。在 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 中,$\vec{\xi}$ 是一个变量,而 τ_1 是这个变量之内的一个变量。$\vec{\xi}$ 实际上是 τ_1 的一个函数(见 16.1.2 末尾),而且这个函数是 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的变量。关于 τ_2 和 $\vec{\eta}$,有类似说法。

用 τ_1,τ_2 来表达:$H(\tau_1,\tau_2)$ 是 τ_1,τ_2 的一个函数,而 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是 τ_1,τ_2 的一个函数的函数(用数学术语说:一个泛函)。——157,①

在 S_{β_1} 中的 $\vec{\xi}$ 中间，实际上存在着特殊的点，这些点对应着 $(1,\cdots,\beta_1)$ 中不同的 τ_1。给定这样一个 τ_1（如 16.1.3 中和 17.2 末尾那样），我们能够建立坐标向量 $\vec{\xi}=\vec{\delta}^{\tau_1}$，表明策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 的选择，排除了其他选择。以同样方式，我们能够把 S_{β_2} 中特殊的 $\vec{\eta}$ 与 $(1,\cdots,\beta_2)$ 中的 τ_2 联系起来：给定这样一个 τ_2，我们能够建立坐标向量 $\vec{\eta}=\vec{\delta}^{\tau_2}$，表明策略 $\sum_2^{\tau_2}$ 的选择，排除了其他选择。

$$\text{显然：}\quad K(\vec{\delta}^{\tau_1},\vec{\delta}^{\tau_2})=\sum_{\tau'_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau'_2=1}^{\beta_2}H(\tau'_1,\tau'_2)\delta_{\tau'_1\tau_1}\delta_{\tau'_2\tau_2}$$
$$=H(\tau_1,\tau_2)\text{。}$$[1]

因此，函数 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 尽管有其特殊性，却包含整个函数 $H(\tau_1,\tau_2)$，从而它的确是两者的更一般概念。由于并非所有 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 具有特殊形式 $\vec{\delta}^{\tau_1},\vec{\delta}^{\tau_2}$，即并非所有混合策略都是纯策略[2]，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 比 $H(\tau_1,\tau_2)$ 更具一般性。$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个双线性型。这一事实只不过表达了这一扩张是借助线性差值法来实现的。也就是说，这一必要的过程归于“数学期望”的直线性。[3]

17.7.3　把从(17:9)到(17:12)的过程倒过来，我们就会看出，我们能够以如下方式说明(17:9)—(17:11) *158*

---

① 如果我们考虑策略的选择 $\vec{\delta}^{\tau_1},\vec{\delta}^{\tau_2}$ 代表着什么，这个公式的含义十分清楚。——157，②

② 即若干策略可能会以正的概率得到有效使用。——157，③

③ 数字效用概念与线性的“数学期望”之间基本联系是在 3.7.1 末尾被指出的。——157，④

正确和(17:12)不正确:

(17:9)和(17:10)表达的是,通过使用混合策略 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 而不使用纯策略 τ_1,τ_2,每位玩家都能够充分保护自己的策略不被对手发现。(17:11)表明,如果发现了对手的策略的玩家使用 τ_1,τ_2,上述说法仍然成立,同时,只有自己的策略正在被发现的玩家才享有 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 的保护作用。最后,(17:12)的错误表明,两位玩家,尤其是其策略被发现的那位玩家,不能无视 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 的保护作用。

17.8 广义严格决定性分析

17.8.1 正如17.4末尾提到过的那样,我们将重新表述14.5的内容,尤其考虑到17.6中建立起来的事实:每一个二人零和博弈 Γ 都是广义严格决定的。由于这一结果,我们可以定义:

$$\begin{aligned} \mathrm{v}' &= \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \\ &= \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \\ &= \mathrm{Sa}_{\vec{\xi}|\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})。\end{aligned}$$

[见13.5.2中(13:C*)和13.4.3末尾。]

我们构造两个集合 $\overline{A}$、$\overline{B}$,它们分别是 S_{β_1}、S_{β_2} 的子集,类似于14.5.1中(14:D:a),(14:D:b)中集合A、B的定义。在13.5.1中,它们是 A^φ 和 B^φ(φ 对应着我们的 K)。我们定义:

(17:B:a) $\overline{A}$ 是 S_{β_1} 中这样一些 $\vec{\xi}$ 组成的集合,对

于这些 $\vec{\xi}$，$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 取其最大值，即

$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{v}'$。

(17:B:b)　$\overline{B}$ 是 S_{β_1} 中这样一些 $\vec{\eta}$ 组成的集合，对于这些 $\vec{\eta}$，$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 取其最小值，即

$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{v}'$。

现在，我们有可能重述 14.5 中的论述了。

在具体做的过程中，我们将使用与 14.5 中 (14:C:a)—(14:C:f) 类似的列举方式。①

首先，我们看到： 159

(17:C:d)　无论玩家 2 如何玩，玩家 1 都能够借助恰当的玩法保证自己的收益 $\geqq \mathrm{v}'$。

无论玩家 1 如何玩，玩家 2 都能够借助恰当的玩法保证自己的收益 $\geqq -\mathrm{v}'$。

证明：令玩家 1 从 $\overline{A}$ 选择 $\vec{\xi}$，那么，无论玩家 2 做什么，即对每一 $\vec{\eta}$，我们有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \geqq \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} = \mathrm{v}'$。令玩家 2 从 $\overline{B}$ 选择 $\vec{\eta}$，那么，无论玩家 1 做什么，即对每一 $\vec{\xi}$，我们有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \leqq \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{v}'$。证明完毕。

第二，(17:C:d) 显然等价于

(17:C:e)　无论玩家 1 如何玩，玩家 2 都能够借助恰当的玩法保证玩家 1 的收益 $\leqq \mathrm{v}'$，即防止玩家 1 的收益 $> \mathrm{v}'$。

---

① (a)—(f) 出现的顺序将不同于其自然顺序。14.5 中也是这样，因为那里的列举是基于 14.3.1 和 14.3.2 中的列举进行的，而且这些段落中的讨论遵循了一条略微不同的思路。——158，①

无论玩家2如何玩,玩家1都能够借助恰当的玩法保证玩家2的收益 $\leqq -v'$,即防止玩家2的收益 $> -v'$。

17.8.2 第三,根据(17:C:d)和(17:C:e)并考虑到(17:C:d)的证明过程,现在,我们可以断言

(17:C:a) 对于玩家1来说,博弈 Γ 的好的玩法(策略组合)是选择一个属于 $\overline{A}$ 的 $\vec{\xi}$,其中 $\overline{A}$ 是(17:B:a)中的集合 $\overline{A}$。

(17:C:b) 对于玩家2来说,博弈 Γ 的好的玩法(策略组合)是选择一个属于 $\overline{B}$ 的 $\vec{\eta}$,其中 $\overline{B}$ 是(17:B:b)中的集合 $\overline{B}$。

第四,(17:C:d)中的结论——(17:C:e)中的等价结论——给出:

(17:C:c) 如果玩家1和玩家2都选择博弈 Γ 的最佳玩法,即如果 $\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$,那么,对于玩家1来说,$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的值将等于一局博弈的值,即 v'。

13.5.2 中的(13:D*)和(17:B:a),(17:B:b)前面关于集合 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 的说明结合起来给出:

(17:C:f) 当且仅当 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 是 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的一个鞍点时,玩家1和玩家2都选择了好的玩法,即 $\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$。

160 所有这些应该弄清楚了的是,v' 的确可以被解释为对于玩家1来说 Γ 的一局博弈的值,而且 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 包含着对于玩家1和玩家2来说的 Γ 的最佳玩法。关于(17:C:a)—(17:

C:f) 的整个论述,不存在任何试探性的或不确定性的东西。关于玩家的"才智"和"谁发现谁的策略"等,我们没有做出额外假设。我们的结果也不要求玩家之一相信另一个玩家的理性行为,这是我们一再强调的一点。(见 4.1.2 末尾和 15.8.3。)

17.9　良策的其他特征

17.9.1　17.8.2 中(17:C:c) 和(17:C:f) 还给出了我们现有解的基本要素 —— 即数 v′,向量集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$—— 的简明特征。

根据(17:C:c),$\overline{A}$,$\overline{B}$ 决定着 v′,因此我们只需研究 $\overline{A}$,$\overline{B}$,而且我们将借助(17:C:f) 进行研究。

按照这一原理,当且仅当 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 是 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的一个鞍点时,$\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$。这意味着,

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Max}_{\vec{\xi}'} K(\vec{\xi}',\vec{\eta}) \\ \mathrm{Min}_{\vec{\eta}'} K(\vec{\xi},\vec{\eta}') \end{array}\right|$$

要将其弄明确,我们要借助 17.4.1 和 17.6 中关于 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的表达式(17:2) 以及 17.5.2 中关于 $\mathrm{Max}_{\vec{\xi}'} K(\vec{\xi}',\vec{\eta})$ 和 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}'} K(\vec{\xi},\vec{\eta}')$ 的引理(17:A) 的表达式。这样,我们的方程变成了

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Max}_{\tau'_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau'_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \\ \mathrm{Min}_{\tau'_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)'\xi_{\tau_1} \end{array}\right|$$

考虑到 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\xi_{\tau_1} = \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2} = 1$,我们还能够将其写为

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\left[\mathrm{Max}_{\tau'_1}\left\{\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau'_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}\right\}-\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}\right]\xi_{\tau_1} = 0,$$

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\left[-\mathrm{Min}_{\tau'_2}\left\{\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau'_2)\xi_{\tau_1}\right\}+\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\right]\eta_{\tau_2} = 0。$$

161 在这些方程式的左边,ξ_{τ_1},η_{τ_2} 的系数都不小于 0。[①] $\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$ 本身也都不小于 0。所以,只有在左边所有项目各自为零时,这些方程才成立,即对其系数不等于零的每一个 $\tau_1 = 1,\cdots,\beta_1$,我们有 $\xi_{\tau_1} = 0$;而对系数不等于零的每一个 $\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$,我们有 $\eta_{\tau_2} = 0$。

总之:

(17:D) $\vec{\xi}$ 属于 $\bar{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\bar{B}$,当且仅当:

对于 $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}$ 没有(在 τ_1)取得其最大值的每一个 $\tau_1 = 1,\cdots,\beta_1$,我们有 $\xi_{\tau_1} = 0$。

对于 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$ 没有(在 τ_2)取得其最小值的每一个 $\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$,我们有 $\eta_{\tau_2} = 0$。

这些原理的文字描述并不那么困难。它们代表着:如果 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 是好的混合策略,那么,$\vec{\xi}$ 排除了对于玩家 1 来说不是针对 $\vec{\eta}$ 的最优策略的策略 τ_1,而且,$\vec{\eta}$ 排除了对于玩家 2 来说不是针对 $\vec{\xi}$ 的最优策略的策略 τ_2;也就是说,正如我们预料的那样,$\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 是相互针对着的最优策略。

---

① 注意其中的 Max 和 Min 的位置!——161,①

17.9.2 这里，还可以说明：

(17:E)　　一个博弈是狭义严格决定的，当且仅当每一位玩家有一个是纯策略的良策。

根据我们前面的讨论，尤其是我们从纯策略过渡到混合策略的推广过程，这一结论在直觉上也是可信的。不过，我们仍给出一个同样简单的数学证明。证明如下：

我们在 17.5.2 的最后一部分看到，v_1 和 v'_1 都是通过将 $\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}$ 运用于 $\mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1, \tau_2)\xi_{\tau_1}$ 来得到的，只不过 $\vec{\xi}$ 的定义域有所不同：对于 v_1，其值域是所有 $\vec{\delta}^{\tau_1}$ ($\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$)，即所有纯策略；对于 v'_1，其值域是整个 S_{β_1}，即混合策略。因此，$v_1 = v'_1$，即两个最大值相等，当且仅当第二个值域的最大值（至少有一次）在第一个值域之内取得。根据 (17:D)，这意味着，（至少）有一个纯策略属于 $\bar{A}$，即它是良策。也就是说：

(17:F:a)　　$v_1 = v'_1$，当且仅当对于玩家 1 来说，存在一个是纯策略的良策。

同样： 162

(17:F:b)　　$v_2 = v'_2$，当且仅当对于玩家 2 来说，存在一个是纯策略的良策。

现在，$v'_1 = v'_2 = v'$，且严格决定性意味着 $v_1 = v_2 = v'$，即 $v_1 = v'_1$ 且 $v_2 = v'_2$。所以，(17:F:a) 和 (17:F:b) 结合起来给出 (17:E)。

17.10 错误、错误的后果和永久最优

17.10.1 我们前面的讨论已经弄清楚了什么是一个

良策。接下来，我们对其他混合策略做简单说明。我们想说的是那些不是良策的策略（即向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$）距"良策"有多远，并描述某一错误——不是良策的策略的使用——的后果。然而，我们并不详细讨论这个题目，它有着很多令人迷惑的结果。

对于 S_{β_1} 中任意一个 $\vec{\xi}$ 和 S_{β_2} 中任意一个 $\vec{\eta}$，我们构造数字函数

$$(17:13:a) \qquad \alpha(\vec{\xi}) = v' - \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}),$$

$$(17:13:b) \qquad \beta(\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v'。$$

根据 17.5.2 中的引理（17:A）

$$(17:13:a^*) \qquad \alpha(\vec{\xi}) = v' - \mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1},$$

$$(17:13:b^*) \qquad \beta(\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} - v'。$$

定义

$$v' = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$$

总是保证

$$\alpha(\vec{\xi}) \geqq 0, \quad \beta(\vec{\eta}) \geqq 0。$$

而且，17.8 中的（17:B:a）、（17:B:b）和（17:C:a）、（17:C:b）意味着，$\vec{\xi}$ 是良策的充分必要条件是，$\alpha(\vec{\xi}) = 0$；$\vec{\eta}$ 是良策的充分必要条件是，$\beta(\vec{\eta}) = 0$。

因此，对于一般的 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 来说，$\alpha(\vec{\xi}),\beta(\vec{\eta})$ 很方便地衡量了它们与良策的差距。$\alpha(\vec{\xi}),\beta(\vec{\eta})$ 明确的文字描述使得这一解释更为明显：公式（17:13:a）、（17:13:b）、（17:

13:a*）和(17:13:b*）清楚表明了玩家拿这一策略冒险的损失的大小 —— 相对于对他来说一局博弈的值[①]。这里，"冒险"指给定条件下能够发生的最大损失。[②] 163

然而，必须理解，$\alpha(\vec{\xi})$，$\beta(\vec{\eta})$ 并不揭示对手的哪一策略将给使用策略 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 的玩家带来这一（最大）损失。尤其不确定的是，如果对手使用某一良策，即 $\bar{B}$ 中的一个 $\vec{\eta}_0$ 或 $\bar{A}$ 中的一个 $\vec{\xi}_0$，这本身就意味着上述最大损失。如果一个（不良）策略 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 被一个玩家采用，那么，最大损失发生在对手的如下策略$\vec{\xi}'$ 或$\vec{\eta}'$

(17:14:a)　　$K(\vec{\xi},\vec{\eta}') = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，

(17:14:b)　　$K(\vec{\xi}',\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，

也就是说，$\vec{\eta}'$ 是针对给定的 $\vec{\xi}$ 的最优策略，或$\vec{\xi}'$ 是针对给定的 $\vec{\eta}$ 的最优策略。而且，我们永远无法断定一个固定的 $\vec{\eta}_0$ 或 $\vec{\xi}_0$ 是否能够是针对所有 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 的最优策略。

17.10.2　如果一个固定的$\vec{\eta}'$ 是针对所有 $\vec{\xi}$ 的最优策略，或一个固定的$\vec{\xi}'$ 是针对所有 $\vec{\eta}$ 的最优策略，我们说$\vec{\eta}'$ 或$\vec{\xi}'$ 是**永久最优策略**。也就是说，对于任意 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$，永久

---

① 损失指一局博弈的值减去实际结果：对于玩家 1 来说是 $v' - K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，对于玩家 2 来说是 $(-v') - [-K(\vec{\xi},\vec{\eta})] = K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v'$。——163，①

② 事实上，应用上面的脚注和(17:13:a)，(17:13:b)

$$\alpha(\vec{\xi}) = v' - \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\eta}}\{v' - K(\vec{\xi},\vec{\eta})\},$$

$$\beta(\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v' = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\{K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v'\},$$

即每一个都是最大损失。——163，②

最优策略满足17.10.1中的(17:14:a)或(17:14:b)。任何永久最优策略$\vec{\eta}'$或$\vec{\xi}'$必然是良策；从概念上说，这是
164 显然的事情，而且证明也不困难。[①]不过，剩下的问题是：良策也是永久最优策略吗？再有，永久最优策略存在吗？

一般来说，上述问题的答案是不。在“硬币配对”或“石头、剪子、布”游戏中，对于玩家1和玩家2来说，惟一的良策分别是$\vec{\xi}=\vec{\eta}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$或$\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$。[②]如果玩家1采取其他玩法，如总是出“正面”或总是出“石头”[③]，那么，如果对手的对策是“反面”或“布”[④]，他将遭受损失。不过，此时对手的策略并不是良策，即不是$\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$或$\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$。如果对手使用良策，这位玩家的错误倒无所

---

① 证明：就$\vec{\eta}'$进行证明就足够了。关于$\vec{\xi}'$，证明类似。

令$\vec{\eta}'$是一个永久最优策略。选择一个$\vec{\xi}^{*}$，它是一个针对$\vec{\eta}'$的最优策略，即

$$K(\vec{\xi}^{*},\vec{\eta}')=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}')。$$

按照定义，

$$K(\vec{\xi}^{*},\vec{\eta}')=\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi}^{*},\vec{\eta})。$$

因此，$\vec{\xi}^{*}$，$\vec{\eta}'$是$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$的一个鞍点，从而，由17.8.2中的(17:C:f)，$\vec{\eta}'$属于$\overline{B}$，即它是一个良策。——163，③

② 见17.1。任何其他概率分布，一旦被“发现”，就会遭受损失。见下面。——164，①

③ $\vec{\xi}=\vec{\delta}'=\{1,0\}$或$\{1,0,0\}$。——164，②

④ 即$\vec{\eta}=\vec{\delta}''=\{0,1\}$或$\{0,1,0\}$。——164，③

谓了。[①]

我们将在 19.2 和 19.10.3 中——以较为精妙和复杂的方式——给出另一个这类例子，它与扑克游戏中的“诈叫”有联系。

所有这些可以概括为：我们所谓的良策从防守的角度看是完美的，但一般来说它们却不能从对手可能的错误中得到最大收益，即它们不是为进攻而进行的计算。

然而，应该牢记的一点是，17.8 中我们的演绎还是有说服力的，即从这个意义上说，不引入新的概念，一个进攻理论是不可能的。不愿意接受这一说法的读者应该再想像一下“硬币配对”或“石头、剪子、布”游戏中的情形。这两种博弈的极简单性把要点弄得十分清楚。

反对过分强调这一点的另一警告是：普通说法中，“进攻”名义下的很多内容并不是上述意义上的“进攻”，即我们的理论完全包括了这些内容。对于有着完美信息的博弈，如我们将在 17.10.3 中看到的那样，这一说法是对的。[②]对于扑克中“诈叫”之类典型的“进攻性”动作（和以信息不完美为必要条件的动作），上述说法也是对的。[③]

17.10.3　最后，我们还要说明的一点是，存在着一类重要的（二人零和）博弈，其中存在着永久最优策略。这些博弈正是我们在第 15 节，尤其是 15.3.2、15.6 和 15.7 中分

① “正面”（或“石头”）这一糟糕的玩法只能被“反面”（或“布”）击败，而后者本身也不是良策。——164，④

② 包括国际象棋和巴加门。——164，⑤

③ 上述讨论相当使用于不“诈叫”。见 19.2 和 19.3。——164，⑥

析的具有完备信息的博弈。事实上，这些博弈的狭义严格决定性证明稍做修改就足以证明这一结论。它会给出永久最优纯策略。不过，我们不在这里对其进行讨论。

165 由于具有完备信息的博弈总是狭义严格决定的（见上），我们也许猜想狭义严格决定的博弈与存在永久最优策略的博弈之间是否存在着更基本的联系。我们不在这里进一步讨论这些事情，只提一下与此有关的如下事实：

(17:G:a) 能够证明，如果（对于两位玩家来说）存在着永久最优策略，那么，该博弈必定是严格决定的博弈。

(17:G:b) 能够证明，(17:G:a) 的逆命题不成立。

(17:G:c) 经过进一步的研究，狭义决定性概念与永久最优策略的存在性有更为密切的联系。

17.11 交换玩家：对称性

17.11.1 下面，我们要讨论的是，对称性在博弈 Γ 中的作用，或更一般地说，交换玩家 1 和玩家 2 的影响。这自然是 14.6 的继续。

正如我们在那里指出过的那样，玩家交换的结果是用 $H(\tau_2,\tau_1)$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$。17.4.1 的公式(17:2) 和 17.6 表明，这一交换的后果是，$-K(\vec{\eta},\vec{\xi})$ 替换 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$。用 16.4.2 的术语说，我们用[14.1.3 中 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的] 矩阵的负转置矩阵替换这一矩阵。

因此，我们可以继续第 14 节中完全相似的思路。如果我们用 $\vec{\xi},\vec{\eta},K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 替换那里的 $\tau_1,\tau_2,H(\tau_1,\tau_2)$，我们有与那里形式上相同的结果。（见 17.4 和 17.8 的结果。）

我们在 14.6 中看到，用 $-H(\tau_2,\tau_1)$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$ 附带着 v'_1,v'_2 变成 $-v'_1,-v'_2$。这些分析的一字不漏的重复表明，用 $-K(\vec{\eta},\vec{\xi})$ 替换 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，附带把 v'_1,v'_2 变成 $-v'_2,-v'_1$。总之：交换玩家 1 和玩家 2，附带把 v_1,v_2,v'_1,v'_2 变成 $-v_2,-v_1,-v'_2,-v'_1$。

14.6 对狭义严格决定性建立起来的结果 $v=v_1=v_2$ 变成了 $-v=-v_1=-v_2$。在缺乏对称性情况下，结论的这一提炼是不可能的。

现在，我们知道，我们总有广义严格决定性，所以，$v'=v'_1=v'_2$。因此，这一结果变成 $-v'=-v'_1=-v'_2$。

这一结果的文字描述也是清楚的：由于我们成功地定义了对于玩家 1 来说 Γ 的一局博弈的值 v'，当交换玩家时，这一数量应理所当然地改变正负号。

17.11.2　我们也可以严格地说，博弈 Γ 是**对称**的。当两位玩家在该博弈中有完全相同的角色时，即交换玩家 1 166
和玩家 2 后得到的博弈与原来的博弈完全相同时，情况就是这样。根据上面所说，这意味着

$$H(\tau_1,\tau_2)=-H(\tau_2,\tau_1),$$

或等价地说

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=-K(\vec{\eta},\vec{\xi})。$$

矩阵 $H(\tau_1,\tau_2)$ 或线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的这一性质是在 16.4.4

中引入的,并被称为斜对称性。[①][②]在这种情况下,v_1,v_2 必定与 $-v_2$,$-v_1$ 一致;因此,$v_1=-v_2$,又由于 $v_1 \geqq v_2$,$v_1 \geqq 0$。但是,v' 必定与 $-v'$ 一致,所以,我们甚至能够断定

$$v'=0。^{③}$$

这样,我们看到:一个对称博弈的一局的值是零。

应该注意,一个非对称的 Γ 的每一局博弈的值 v' 也能够是零。我们称 $v'=0$ 的博弈为公平的博弈。

14.7.2 和 14.7.3 的例子说明:"石头、剪子、布"是对称的(从而是公平的);"硬币配对"公平(见 17.1)而不对称。[④]

---

① 对于矩阵 $H(\tau_1,\tau_2)$ 或相应的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$,对称性定义是

$$H(\tau_1,\tau_2)=H(\tau_2,\tau_1),$$

或等价于

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=K(\vec{\eta},\vec{\xi})。$$

值得注意的是,博弈 Γ 的对称性等价于其矩阵或双线性型的斜对称性,而非对称性。——166,①

② 因此,斜对称性意味着,14.1.3 中图 15 的矩阵以其[由(1,1)、(2,2)等组成的]主对角线为轴的翻转将这一矩阵变成它的负阵。(按照上面的脚注,对称性意味着这一反射将这一矩阵变成它自己。)

图 15 中的矩阵是矩形的,它有 β_2 列,β_1 行。在我们考虑的情况中,这一翻转必定不改变其形状,因此,它必定是正方形的,即 $\beta=\beta_2$。由于博弈 Γ 中的玩家 1 和玩家 2 具有相同角色,这是自然而然的事情。——166,②

③ 由于我们知道 $v'_1=v'_2$,这是当然的事情。如果没有这一点,即没有 16.4.3 的一般定理(16:F),关于 v'_1,v'_2,我们就只能得到有关 v_1,v_2 的那些结论:$v'_1=-v'_2$,又由于 $v'_1 \geqq v'_2$,所以 $v'_1 \geqq 0$。——166,③

④ 在"硬币配对"游戏中,玩家 1 和玩家 2 有着不同的角色:玩家 1 试图对上,而玩家 2 试图避免对上。当然,我们也许认为,这一差异并不是基本的,"硬币配对"游戏的公平性归因于,其非对称性并不是基本性质。这是能够得到说明的,不过,我们不打算在这里进行。公平而非对称博弈的一个更好的例子将由这样一个博弈给出,它完全是非对称的,不过,其中每一位玩家的优势和劣势得到了明智的调整,以致有一个公平的博弈,即 $v'=0$。

在一个对称的博弈中，17.8 中的（17:B:a）和（17:B:b）的集合 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 显然相等。由于 $\overline{A} = \overline{B}$，我们可以在 17.9 的最终准则（17:D）中令 $\vec{\xi} = \vec{\eta}$。我们将其重述如下： 167

（17:H）　在一个对称的博弈中，$\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 的充分必要条件是：对于 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$ 未（在 τ_2）取得其最小值的每一 $\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$，我们有 $\xi_{\tau_2} = 0$。

一个不完全成功的例子是，通过“掷骰子”来构造这样一个博弈。在这一博弈中，玩家 1——“赌客”——掷两颗骰子，每个骰子有 6 个点数，它们是 1,2,3,4,5,6。因此，每掷一次，可能出现的总点数是 2,…,12。这些总点数有如下概率分布：

总点数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36 次中的机率	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
概率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

规则是，如果“赌客”掷出 7 或 11，他赢。如果他掷出 2,3 或 12，他输。如果他掷出其他点（4,5,6，或 8,9,10），那么，他继续掷，直到最初那个点数（他赢）重复出现，或出现一个 7 点（他输）。玩家 2（“赌场”）无法影响投掷过程。

尽管规则对玩家 1 和玩家 2 的影响有很大差异，他们的机率却十分接近：简单计算表明，495 局中，“玩家”对“赌场”机率比是 244 对 251，即一局博弈的值（每单位赌注）是

$$\frac{244-251}{495} = -\frac{7}{495} = -1.414\%。$$

因此，这相当接近公平。也许有人提出这样的问题，即是否再公平一些。——166，④

用 17.9 结语中的术语说，上述条件表达的是：$\vec{\xi}$ 是针对它本身的最优策略。

17.11.3 17.11.1，17.11.2 的结果——即在每一对称博弈中，v′ = 0——能够与 17.8 中的（17:C:d）结合起来。这样，我们有：

（17:I） 在一个对称博弈中，无论对手如何玩，每一位玩家都能够通过恰当的玩法来避免损失。[①]

如果矩阵 $H(\tau_1,\tau_2)$ 是一个斜对称矩阵，那么，S_{β_1} 中存在一个向量 $\vec{\xi}$ 满足

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \geqq 0, \quad \tau_2 = 1,\cdots,\beta_2。$$

这一结果本来可以直接得到，因为它与 16.4.4 中的最后结果（16:G）一致。要理解这一点，只需在那里引入我们现在的符号：用我们的 $\tau_1,\tau_2,H(\tau_1,\tau_2)$ 替换那里的 i，j，$a(i,j)$，并用 $\vec{\xi}$ 替换那里的 $\vec{w}$。

168 我们甚至能够把我们的整个理论建立在这一事实之上，即从上述结果推出 17.6 的定理。换句话说，所有 Γ 的广义严格决定性能够从对称博弈的广义严格决定性推导出来。我们不在这里对之进行讨论，因为 17.6 的推导更直接。

在一个对称博弈中保护自己免受损失的可能性仅仅因为我们使用了混合策略 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 而存在（见 17.7 末尾）。

---

① 即确保自己的所得 ≥ 0。——167，①

如果玩家被限于纯策略 τ_1, τ_2，那么，自己的策略被发现，从而持续损失的危险就会存在。要理解这一点，只需回想我们在“石头、剪子、布”中的发现（见 14.7 和 17.1.1）。19.2.1 中，联系到扑克和“诈叫”的必要性时，我们将认识到同样事实。

第4章 二人零和博弈的例子

18. 一些基本的博弈

18.1 最简单的博弈

169 **18.1.1** 我们已经完成了二人零和博弈的一般讨论。接下来,我们要研究此类博弈的一些例子。与我们的抽象讨论相比,这些例子更能够说明我们的理论各部分的真正意义。它们尤其表明,我们的理论给出的某些形式上的步骤可以有直接的常识性解释。这里,我们有 19.2、19.10 和 19.16 中将要提到的那些"实践"或"心理"现象的主要方面的严格形式化。①

18.1.2 首先,参数 β_1、β_2——即博弈的正规型中两位玩家面对的备择个数的大小——是博弈 Γ 的复杂程度的合理估计。其中之一或两者都是 1 的情况可以被忽略:

① 我们强调这一点,是因为人们广泛认为这些事情不适合严格(数学)研究。——169,①

这意味着，问题中的玩家没有选择余地，无法影响该博弈。① 因此，对我们来说，有意义的最简单此类博弈是

(18:1)　$$\beta_1 = \beta_2 = 2$$

的情况。我们在 14.7 中看到，"硬币配对"就是这样的博弈，其矩阵由 13.4.1 中的图 12 给出。此类博弈的另一个例子是图 14。

现在，让我们考虑满足(18:1)，即图 27 所描述的最一般的博弈。如果"硬币配对"中的不同配对方法既不必代 170
表相同收益(或根本不是收益)，也不代表相同损失(或根本不是损失)，那么，图 27 的描述也适用于"硬币配对"博弈。② 对于这种情况，我们建议讨论 17.8 的结果——博弈 Γ 的值和良策集合 $\overline{A}$，$\overline{B}$。这些概念已经由 17.8(基于 17.6 的定理)的一般存在性证明建立起来。不过，在这个具体例子中，我们将通过明确的计算重新得到它们，并进而更好地理解它们的作用和它们的可能性。

	1	2
1	H(1,1)	H(1,2)
2	H(2,1)	H(2,2)

图 27

18.1.3　关于图 27 给出的博弈，我们可以稍做调整，

① 因此，这一博弈实际上是一个人的博弈，当然不再是零和博弈。见 12.2。——169，②

② 图 12 和图 27 之间的比较说明，在"硬币配对"博弈中，$H(1,1) = H(2,2) = 1$(对上的收益)；$H(1,2) = H(2,1) = -1$(没有对上的损失)。——170，①

将使详细讨论大为简化。

首先，玩家 1 的两个备择之中的哪一个记为 $\tau_1=1$，哪一个记为 $\tau_1=2$，我们可以随意安排。我们可以交换它们，即交换矩阵的两个行。

第二，同样随意的是玩家 2 的两个选择的记号 $\tau_2=1$，$\tau_2=2$。我们也可以交换它们，即交换矩阵的两个列。

最后，两位玩家中的哪一个称为玩家 1 也是随意的，即用 $-\mathcal{H}(\tau_1,\tau_2)$ 取代 $\mathcal{H}(\tau_1,\tau_2)$（见 14.6 和 17.11）。这等于交换上述矩阵的行和列，并改变其元素的符号。

把这些事情结合起来，我们有 $2\times2\times2=8$ 种可能的调整，从根本上说，它们都描述同一博弈。

18.2 简单博弈的定量分析

18.2.1 现在，让我们开始严格的讨论。我们将考虑几种可能的"情况"。这些"情况"是按照 $\mathcal{H}(\tau_1,\tau_2)$ 同时就两个变量 τ_1、τ_2 的最大值和最小值在矩阵中的各种可能的位置来区别的。乍一看，它们的界定似乎是随意的，但事实是，它们带来各种可能结果的一个敏锐分类。

相应地，考虑 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$。这两个值中的每一个将至少出现一次，也可能出现多次。① 不过，这不是我们此刻要关注的事情。下面，我们给出各种情况的定义：

---

① 在"硬币配对"中（见上面脚注①），$\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 是 1，并在 (1,1) 和 (2,2) 处取此值；而 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 是 -1，并在 (1,2) 和 (2,1) 处取此值。——170，②

18.2.2 情况(A):$\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$和 $\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$发生的地方既不在同一行,也不在同一列。

通过交换 $\tau_1=1,2$ 和 $\tau_2=1,2$,我们能够使 $\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$发生的地方是(1,1);那么,$\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$必定发生在(2,2)。因此, 171
我们有

$$(18:2)\qquad H(1,1)\left\{\begin{matrix}\geqq H(1,2)\geqq\\ \geqq H(2,1)\geqq\end{matrix}\right\}H(2,2)。$$

故,(1,2)是一个鞍点。①

因此,在这种情况下,这一博弈是严格决定的,而且

$$(18:3)\qquad v'=v=H(1,2)。$$

18.2.3 情况(B):不可能做出上述安排:

选择($\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$,$\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$)的两个位置,使它们位于同一行或同一列。如果它们本来位于同一行,那么,交换玩家 1 和玩家 2 就可以使这两个位置总是位于同一列。②

必要的话,通过交换 $\tau_1=1,2$ 和 $\tau_2=1,2$,我们能够把 $\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$的位置移动到(1,1),因此我们所指的行是 $\tau_1=1$。$\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$必定出现在(2,1)。③ 所以,我们有:

$$(18:4)\qquad H(1,1)\left\{\begin{matrix}\geqq H(1,2)\geqq\\ \geqq H(2,2)\geqq\end{matrix}\right\}H(2,1)。$$

---

① 请回忆 13.4.2。注意,我们取(1,2)而不是(2,1)。——171,①

② 交换两位玩家会改变矩阵每一元素的符号(见上),从而交换 $\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$和 $\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$。但不管怎样,它们总归位于同一列。——171,②

③ 严格地说:它也可以是(1,1)。这样的话,$H(\tau_1,\tau_2)$有相同的 $\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$和 $\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$,它必定是一个常数。因此,我们仍然能够说 $\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$是(2,1)。——173,③

实际上，$H(1,1)=H(1,2)$ 或 $H(2,2)=H(2,1)$ 被排除了，因为那样意味着我们可以把 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 放在(1,2)，(2,1)或(1,1)，(2,2)，从而变成了情况(A)。[①]

这样，我们能够把(18:4)增强为：

$$(18:5)\qquad H(1,1)\left\{\begin{array}{l} >H(1,2)\geqq \\ \geqq H(2,2)> \end{array}\right\}H(2,1)。$$

现在，我们必须对情况进一步分类：

18.2.4 情况(B_1)：

$$(18:6)\qquad H(1,2)\geqq H(2,2)$$

那么，(18:5)能够被增强为：

$$(18:7)\qquad H(1,1)>H(1,2)\geqq H(2,2)>H(2,1)。$$

从而，(1,2)再次成了一个鞍点。

因此，在这种情况下，该博弈还是严格决定的，而且

$$(18:8)\qquad v'=v=H(1,2)。$$

172 **18.2.5** 情况(B_2)：

$$(18:9)\qquad H(1,2)<H(2,2)$$

那么，(18:5)能够被增强为：

$$(18:10)\qquad H(1,1)\geqq H(2,2)>H(1,2)\geqq H(2,1)。$$[②]

该博弈不是严格决定的。[③]

然而，我们不难发现良策，即 $\overline{A}$ 中的一个 $\vec{\xi}$ 和 $\overline{B}$ 中的

---

① 正如"硬币配对"游戏中的情况那样，$H(1,1)=H(2,2)$ 和 $H(1,2)=H(2,1)$ 是完全可能的。见第 17 页脚注①和第 172 页脚注①。——171，④

② 这正是"硬币配对"的情况。见第 170 页脚注①和第 171 页脚注④。——172，①

③ 显然，$v_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)=H(1,2)$，$v_2=\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}=H(2,2)$，故 $v_1<v_2$。——172，②

一个 $\vec{\eta}$ 满足 17.9 中的典型条件(17:D)。我们甚至能够再进一步:我们能够选择 $\vec{\eta}$ 使得 $\sum_{\tau_2=1}^{2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}$ 对于所有的 τ_1 相同,并选择 $\vec{\xi}$ 使得 $\sum_{\tau_1=1}^{2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$ 对于所有的 τ_2 相同。为此,我们要求:

$$(18:11)\quad \begin{cases} H(1,1)\eta_1+H(1,2)\eta_2=H(2,1)\eta_1+H(2,2)\eta_2 \\ H(1,1)\xi_1+H(2,1)\xi_2=H(1,2)\xi_1+H(2,2)\xi_2 \end{cases}$$

这意味着:

$$(18:12)\quad \xi_1:\xi_2=H(2,2)-H(2,1):H(1,1)-H(1,2),$$

$$\eta_1:\eta_2=H(2,2)-H(1,2):H(1,1)-H(2,1)。$$

我们必须满足这些比率,满足如下永久约束条件

$$\xi_1\geqq 0,\quad \xi_2\geqq 0\quad \xi_1+\xi_2=1$$

$$\eta_1\geqq 0,\quad \eta_2\geqq 0\quad \eta_1+\eta_2=1$$

是可能的,因为根据(18:10),上述比率[即右边是(18:12)]是正的。我们有:

$$\xi_1=\frac{H(2,2)-H(2,1)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)},$$

$$\xi_2=\frac{H(1,1)-H(1,2)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)}。$$

以及:

$$\eta_1=\frac{H(2,2)-H(1,2)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)},$$

$$\eta_2=\frac{H(1,1)-H(2,1)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)}。$$

我们甚至能够证明,$\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 是惟一的,即 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不含有其他元素。

173 证明：如果 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 不是我们在上面找到的向量，那么，根据17.9的特征条件（17：D），$\vec{\eta}$ 或 $\vec{\xi}$ 必定分别有一个分量是0。但这样的话，$\vec{\eta}$ 或 $\vec{\xi}$ 就会不同于上面的值，因为这些向量中两个分量都是正的。这样，我们看到：如果 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 之一不同于上面的值，那么，两者都不同于上面的值。从而两者必定都有一个分量是0。两者的另一分量都是1，即两者都是坐标向量。① 因此，两者所代表的 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 实际上是 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的一个鞍点。见17.9中的（17：E）。这样，这一博弈就成了严格决定的，但我们知道此种情况下它不是。

证明完毕。

我们看到，（18：11）中的四个表达式有相同的取值，即

$$\frac{H(1,1)H(2,2)-H(1,2)H(2,1)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)},$$

而且，根据17.5.2中的（17：5：a）和（17：5：b），这个值正是v′。故，我们有

$$(18:13)\qquad v'=\frac{H(1,1)H(2,2)-H(1,2)H(2,1)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)}。$$

18.3 定性的特征化描述

18.3.1 18.2中的结果能够以多种方式概括，以使其含义更为明确。我们从下面的准则开始：

（1，1）和（2，2）组成图27中矩阵的一条对角线，

① {1,0}或{0,1}。——173，①

(1,2)和(2,1)则组成其另一条对角线。

我们说两个数集 E 和 F 是隔离的，意思是要么 E 的每一个元素都比 F 的每一个元素大，要么 E 的每一个元素都比 F 的每一个元素小。

考虑 18.2 的情况(A)、(B_1)和(B_2)。在前两种情况下，该博弈是严格决定的，而且矩阵一个对角线上的元素与另一对角线上的元素是隔离的。① 在后一种情况下，该博弈不是严格决定的，一条对角线上的元素与另一条对角线上的元素不是隔离的。②

因此，对角线隔离是一个博弈非严格决定的充分必要条件。这一准则的获得符合 18.2 中运用的 18.1.3 的调整。但是，18.1.3 中描述的三个调整过程既不影响严格决定性，也不影响对角线隔离。③ 因此，我们的第一个准则总是成立的。我们将其重述如下：

(18:A)　　一个博弈是非严格决定的，当且仅当矩阵的一条对角线上的元素与另一条对角线上的元素是隔离的。 174

18.3.2　在情况(B_2)中，即当一个博弈是非严格决定的情况下，我们找到的 $\overline{A}$ 中惟一的 $\vec{\xi}$ 和 $\overline{B}$ 中惟一的 $\vec{\eta}$ 的两个分量都不等于 0。这一事实以及上述惟一性都不受

---

① 情况(A)：由(18:2)，$H(1,1) \geq H(1,2) \geq H(2,2)$。情况($B_1$)：由(18:7)，$H(1,1) > H(1,2) \geq H(2,2)$。——173，②

② 情况(B_2)：由(18:10)，$H(1,1) \geq H(2,2) > H(1,2) \geq H(2,1)$。——173，③

③ 前者是明显的，因为这些只是记号上变化。后者即将得到证明。——173，④

18.1.3 描述的调整的影响。[①] 所以，我们有：

(18:B) 如果该博弈是非严格决定的，那么，存在着惟一一个良策 $\vec{\xi}$（即属于 $\overline{A}$）和惟一一个良策 $\vec{\eta}$（即属于 $\overline{B}$），而且两者的所有分量都是正的。

根据(18:B)，$\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$（$\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$，$\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$）的分量都不会是0。因此，17.9 的准则表明，(18:11)前面的说法——当时的充分条件而非必要条件——现在成了（充分）必要条件。从而，(18:11)必定得到满足，它的所有结果都是正确的。这尤其适用于(18:11)之后给定的 ξ_1、ξ_2、η_1、η_2 值，以及(18:13)中给定的 v′的值。从而，只要该博弈不是严格决定的，所有这些描述都适用。

18.3.3 下面，我们描述另一个准则：

在一个一般矩阵 $H(\tau_1, \tau_2)$（见第9页图15，我们暂时允许任意的 β_1、β_2）中，我们说一行（如 τ'_1）或一列（比如 τ'_2）分别优于另一行（比如 τ''_1）或列（比如 τ''_2），意思是对于所有 τ_2，$H(\tau'_1, \tau_2) \geqq H(\tau''_1, \tau_2)$；或对于所有 τ_1，$H(\tau_1, \tau'_2) \geqq H(\tau_1, \tau''_2)$。

这一概念的一个简单含义是：它意味着，无论对手做出什么选择，对于玩家1来说，选择 τ'_1 至少与选择 τ''_1 一样好——或对于玩家2来说，选择 τ'_2 至少与选择 τ''_2 一样好。[②]

---

① 这些也即将得到证明。——174，①

② 这当然是一种例外情况：一般来说，两个备择的相对优劣依赖于对手的选择。——174，②

现在，让我们回到 $\beta_1=\beta_2$ 的情况。重新考虑 18.2 中的情况(A)、(B_1)和(B_2)。在前两种情况下，一个行或一个列优于另一个行或列。① 在最后一种情况下，都不成立。②

因此，一个行或一个列优于另一行或列是博弈 Γ 被严格决定的充分必要条件。像我们的第一个准则那样，这服从于 18.2 中运用了 18.1.3 中做出的调整。而且，正如那里说明的那样，这些调整过程既不影响严格决定性，也不影响行或列的优化。因此，我们当前的准则也总是成立的。我们将其重述如下：

(18:C)　　博弈 Γ 是严格决定的，当且仅当一个行或一个列优于另一个行或列。

18.3.4　条件(18:C)是严格决定性的充分条件，这并不令人吃惊：它意味着，对于两位玩家之一来说，他的可能选择之一总是至少与另一选择一样好(见上)。因此，他知道做什么，而他的玩家也知道将会发生什么，这就隐含着严格决定性。 175

当然，这些分析隐含着寄希望于另一位玩家的理性行为的投机心理，这是我们最初的讨论没有考虑的。15.8 开头和末尾的说明在一定程度上适用于这一简单得多的情况。

在结果(18:C)中，我们真正关心的是，这一条件的必要性也是成立的，也就是说，没有什么比行或列的优化能

---

① 情况(A)：由(18:2)，第一列优于第二列。情况(B_1)：由(18:7)，第一行优于第二行。——174，③

② 情况(B_2)：不难验证，(18:10)排除了所有四种可能性。——174，④

够导致严格决定性这件事情更为微妙。

应该牢记的是，我们正在考虑的是最简单的情况：$\beta_1=\beta_2=2$。我们将在 18.5 中看到，当 β_1,β_2 变大时，各个方面的条件如何纠缠在一起。

18.4 具体例子：硬币配对的推广

18.4.1 下面是 18.2 和 18.3 的结果的一些应用。

(a)普通的"硬币配对"，其中图 27 中的矩阵 H 由第 94 页的图 12 给定。我们知道，这一博弈的值是

$$v'=0,$$

且有惟一的良策

$$\vec{\xi}=\vec{\eta}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}。$$

(见 17.1。18.2 的公式直接给出这一结果。)

18.4.2 (b)"硬币配对"游戏，其中对上"正面"的奖励加倍。因此，图 27 中的矩阵将不同于图 12 中的矩阵，位置(1,1)的元素加倍了：

	1	2
1	2	-1
2	-1	1

图 28a

这一矩阵的对角线是隔离的(1 和 2 大于 -1)，因此良策是惟一的，而且是混合策略[见(18:A)，(18:B)]。根据 18.2.5 中情况(B_2)中的相关公式，我们有

$$v' = \frac{1}{5},$$

和良策

$$\vec{\xi} = \{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\} \qquad \vec{\eta} = \{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}。$$

我们将会看到，对上“正面”的奖品加倍增加了试图对上“正面”的玩家 1 的该博弈一次博弈的值。这也导致 176
他降低出“正面”的频率，因为这时的奖品使得这一选择变得明显了，从而也变得危险了。对上“正面”招致额外损失这一直接威胁以同样方式影响着玩家 2。这一口头文字论述有着明显的合理性，但肯定是不严格的。然而，我们给出这一结果的公式是严格的。

18.4.3　(c)“硬币配对”，其中对上“正面”的奖品加倍，但玩家 1 出“正面”而没有对上受到的惩罚变成原来的三倍。图 27 中的矩阵变成

	1	2
1	2	-3
2	-1	1

图 28b

两条对角线是隔离的(1 和 2 大于 -1, -3)，所以良策是惟一的，且是混合策略(见上)。我们前面用过的公式给出这一博弈的值

$$v' = -\frac{1}{7},$$

和良策

$$\vec{\xi} = \left\{\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right\},\qquad \vec{\eta} = \left\{\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right\}。$$

请读者给出这一结果的像前面那样的口头解释。沿着这一思路，不难构建其他这类例子。

18.4.4 (d)我们在18.1.2中看到，“硬币配对”游戏的这些变形是最简单的二人零和博弈。借助这一环境条件，它们获得了一定的一般意义，并由18.2和18.3中的结果给予了证实：的确，我们在那里看到，这类博弈以最简单的形式给出了严格决定性和非严格决定性的条件。需要补充的一点是，这些博弈与“硬币配对”游戏的联系只强调了一个特殊方面。现实中，以不同外表出现的很多其他博弈都可以归为这一类。下面就是一个这样的例子：

这个博弈取自《福尔摩斯历险记》中的一个情节。[①][②]

177 福尔摩斯想从伦敦到多佛尔，然后到欧洲大陆，以逃避追踪他的莫利埃蒂教授。上了火车，当火车缓缓驶离车站时，他发现莫利埃蒂出现在月台上。福尔摩斯理所当然地认为——这里，假设他充分理智——他的对手也看到了他，并有可能乘坐特快列车追上他。现在，福尔摩斯有两种选择：继续去多佛尔，或就近在坎特伯雷站下车。他那

① 柯南道尔：《福尔摩斯历险记》，纽约，1938，第550—551页。——176，①

② 这种情形当然可以看作实际生活中很多可能冲突的范型。摩根斯顿(O. Morgenstern)对此进行了详细说明：*Wirtschaftsprognose*，维也纳，1928，第98页。

作者并不抱有上述著作或“Vollkomene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht”(载 *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol. 6, 1934)中乐观的观点。相应地，我们的解将回答门格尔如下著作中的疑问：Neuere Fortschritte in den exacten Wissenschaften, “Einige neuere Fortschritte in der exacten Behandlung Socialwissenschaftlicher Probleme,”维也纳，1936，第117页和第131页。——176，②

足够聪明的对手也会想到这些,从而也有同样的两个选择机会。这两位对手都必须在不知道对方的决策的情况下选择自己的下车地。作为这些选择的结果,如果他们最终出现在同一月台上,那么,福尔摩斯将会被莫利埃蒂杀掉。如果福尔摩斯安全到达多佛尔,他就可以顺利逃脱。

尤其对于福尔摩斯来说,良策是什么呢? 显然,这个游戏与“硬币配对”有着一定的相似性。莫利埃蒂是那个想“对上”的玩家。因此,我们假设他是玩家 1,福尔摩斯是玩家 2。用 1 记到达多佛尔,用 2 记中途下车。(这对 τ_1 和 τ_2 都适用。)

接下来,我们考虑图 27 中的矩阵。位置(1,1)和(2,2)对应着莫利埃蒂追上福尔摩斯,因此对应有一个很大的矩阵元素值,如 100。位置(2,1)表示福尔摩斯成功逃到多佛尔,而莫利埃蒂在中途下了车。这是莫利埃蒂的失败,用一个负的矩阵元素描述,如 -50——在排序中,小于上述正值。位置(1,2)表示福尔摩斯在中间站避开了莫利埃蒂,但他未能到达大陆。这最好算作一个平手,并用取值 0 的矩阵元素描述。

矩阵 H 由图 29 给出:

	1	2
1	100	0
2	-50	100

图 29

如上面(b)、(c)描述的那样,对角线是隔离的(100 >

0，-50）。因此，良策是惟一的，且是混合策略。前面用过的公式给出莫利埃蒂的值

$$v' = 40$$

178 和二人的良策（莫利埃蒂的 $\vec{\xi}$，福尔摩斯的 $\vec{\eta}$）：

$$\vec{\xi} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}, \quad \vec{\eta} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}。$$

因此，莫利埃蒂应该以 60% 的概率去多佛尔，而福尔摩斯应该以 60% 的概率中途下车，每一情况下的剩余概率都是 40%。[①]

18.5 更复杂一些的例子

18.5.1 我们在 17.8 中描述的二人零和博弈的一般解把一些特殊的选择机会和概念变成了如下情形：有无严格决定性，一次博弈的值 v'，和良策集 $\overline{A}$，$\overline{B}$。由于有了这些，我们得到了 18.2 中十分简单而明确的特征和特征值。在 18.3 中重述这些结果时，这些变得尤其突出。

这一简单性甚至有可能导致某些误解。事实上，18.2，18.3 的结果是通过最基本的明确计算而得到的。18.3 中有关严格决定性的组合准则（18：A），（18：C），至少就其最终形

---

① 柯南道尔讲述的故事不考虑混合策略而给出实际使用的策略。据此，福尔摩斯中途下了车，并带着胜利的微笑看着莫利埃蒂的特快列车奔向多佛尔。柯南道尔的答案在纯策略中是最好的，他给每一对手安排了我们发现是最可能的策略（即用肯定性取代 60% 的概率）。然而，这一过程导致福尔摩斯全胜似乎有点不对劲，因为如我们在上面看到的那样，这一局面肯定有利于莫利埃蒂。（当福尔摩斯乘坐的火车驶出维多利亚车站时，我们关于 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 的结果是福尔摩斯有 48% 的取胜概率。）——178，①

式来说，比我们此前有的东西都直接得多。这会使人产生这样的疑问：17.8 的分析（和 14.5 的严格决定性情况下的相应分析）是否包含着某种我们需要的东西呢？尤其因为它们的基础都是 17.6 的数学定理，而这一定理以第 16 节中的直线性和凸性为必要条件。如果所有这些能够用 18.2，18.3 那样的讨论取而代之，那么第 16 和第 17 节中我们的讨论方式从总体上说就变得不合理了。[①]

事情并非如此。如我们在 18.3 末尾指出的那样，18.2 和 18.3 的过程的极大简单性和结果归因于这样一个事实，即它们只适用于最简单类型的二人零和博弈："硬币配对"一类的游戏，其特征是 $\beta_1=\beta_2=2$。对于一般情况，第 16、17 节的较抽象分析似乎是必不可少的。

下面我们用 β 取值较大的例子来说明 18.2 和 18.3 的结论如何不成立。这也许有助于理解这些事情。 179

18.5.2　我们只须考虑 $\beta_1=\beta_2=3$ 的情况。事实上，它们将联系到"硬币配对"游戏，通过引入第三个选择而变得更一般一些。

因此，两位玩家将各有选择 1，2，3（即 τ_1,τ_2 的值）。读者可以设想选择 1 代表"正面"，选择 2 代表"反面"，选择 3 代表"取消"之类的事情。玩家 1 仍试图"对上"。如果两位玩家之一"取消"，那么，对方出"正面"或"反面"都无所谓。惟一重要的事情是，他是否选择出硬币，或是否也"取消"。因此，我们现在有图 30 那样的矩阵：

---

① 它自然缺乏严格性，不过对于这一初步问题使用大量的数学是没有必要的。——178，②

τ_1 \ τ_2	1	2	3
1	1	-1	γ
2	-1	1	γ
3	α	α	β

图 30

前面的四个元素——前两行的前两个元素——类似于“硬币配对”游戏(见图12)。取值α的两个元素代表玩家1“取消”而玩家2没有“取消”。取值γ的两个元素代表着相反的情况。取值β的元素代表两位玩家都“取消”。通过赋予适当的值(正的、负的或零),能够给予这类情况出现时的惩罚,或使其没有差异。

通过特殊的安排,即选择适当的α,β,γ的值,我们能够得到我们想要的任何例子。

18.5.3 我们想说明的是,18.3的结果(18:A)、(18:B)和(18:C)无一是一般地正确的。

关于(18:C):这一严格决定性准则显然联系着$\beta_1=\beta_2=2$的特殊情况:对于更大的β_1,β_2值,两条对角线甚至没有穷尽这个矩阵,从而发生在对角线上的事情不能够像从前那样描述整个博弈。

关于(18:B):我们将给出一个非严格决定博弈的例子,但存在一个良策,它对于玩家之一是一个纯策略(当然不是另一玩家的良策)。在这个例子中,更为奇妙的是,玩家之一有若干个良策,而另一个玩家却只有一个良策。

180 在图30的博弈中,我们选择α,β,γ的值为:

τ_1 \ τ_2	1	2	3
1	1	-1	0
2	-1	1	0
3	α	α	$-\delta$

图 31

$\alpha>0,\delta>0$。请读者自己决定哪一组合的“取消”受到奖励或受到惩罚。

下面用准则 17.8 对这一博弈进行详细讨论。

对于 $\vec{\xi}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\}$，总有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})=0$，即这一策略不可能使玩家 1 遭受损失。因此，$v'\geqq 0$。对于 $\vec{\eta}=\vec{\delta}^3=\{0,0,1\}$，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})\leqq 0$①，即这一策略不可能使玩家 2 遭受损失。故，$v'\leqq 0$。所以，我们有

$$v'=0。$$

因此，$\vec{\xi}$ 是一个良策，当且仅当总有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})\geqq 0$；$\vec{\eta}$ 是一个良策，当且仅当总有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})\leqq 0$。② 不难看出，要前者成立，当且仅当

$$\xi_1=\xi_2=\frac{1}{2},\xi_3=0。$$

要后者成立，当且仅当

① 实际上，它等于 $-\delta\xi_3$。——180，①

② 我们将这些讨论的简单口头解释留给读者。——180，②

$$\eta_1=\eta_2 \leqq \frac{\delta}{2(\alpha+\delta)}, \qquad \eta_3=1-2\eta_1\text{。}$$

因此，良策 $\vec{\xi}$ 的集合 $\overline{A}$ 恰恰包含一个元素，且不是一个纯策略。相反，良策 $\vec{\eta}$ 的集合却包含无穷多个策略，其中之一是纯策略，即 $\vec{\eta}=\vec{\delta}^3=\{0,0,1\}$。借助图 21 那样的图形描述（见图 32、图 33），集合 $\overline{A},\overline{B}$ 是能够想像得到的。

关于（18:C）：我们将给出这样一个例子，它是严格决定的，但其中既不存在一个行优于另一个行，也不存在一个列优于另一个列。实际上，我们将做得更多。

18.5.4 暂时地，我们允许 β_1 和 β_2 取任何值。行或列的优化的意义已经在 18.3 末尾考虑过。它意味着，玩家之
181 一选择他看好的可能选择之一似乎有一个简单直接的动机，这以某种方式缩小了范围，并最终联系到严格决定性。

特别地：如果行 τ'_1 优于行 τ''_1，即如果对所有 τ_2，$H(\tau''_1,\tau_2)\leqq H(\tau'_1,\tau_2)$，那么，玩家 1 永远不必考虑选择 τ''_1，因为对他来说，τ'_1 在任何情况下都至少不差。而且：如果列 τ''_2 优于列 τ'_2，即对每一 τ_1，$H(\tau_1,\tau''_2)\geqq H(\tau_1,\tau'_2)$，那么，玩家 2 永远不必考虑选择 τ''_2，因为 τ'_2 在任何情况下都至少不差。（见上面提到的地方，尤其见第 174 页脚注②。）

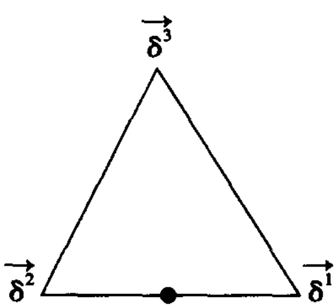


图 32

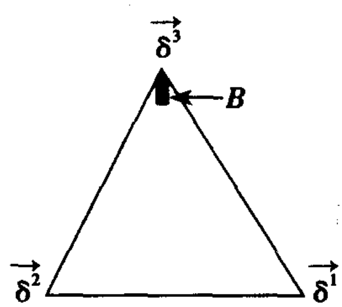


图 33

现在，我们可以利用一个更一般的结构：如果行 τ''_1，即玩家 1 的对应于 τ''_1 的纯策略 $\tau'_1 \neq \tau''_1$ 行的平均——即一个混合策略 $\vec{\xi}$——占优，且 $\vec{\xi}$ 具有分量 $\xi_{\tau''_1}=0$，那么，显然，玩家 1 永远无须考虑选择 τ''_1，因为其他 τ'_1 在任何情况下都不比 τ''_1 差。这种情况的数学表达是

$$(18:14:a)\quad \begin{cases} H(\tau''_1,\tau_2) \leqq \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} & \tau_2=1,\cdots,\beta_2 \\ \vec{\xi}\ 属于\ S_{\beta_1},\quad \xi_{\tau''_1}=0。 \end{cases}$$

对于玩家 2 来说，如果列 τ''_2——即玩家 2 的对应着 τ''_2 的策略——被 $\tau'_2 \neq \tau''_2$ 的行的平均——一个具有分量 $\eta_{\tau''_2}=0$ 的混合策略 $\vec{\eta}$——占优，那么，相应情况出现。这种情况的数学表达是

$$(18:14:b)\quad \begin{cases} H(\tau_1,\tau''_2) \geqq \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} & \tau_1=1,\cdots,\beta_1 \\ \vec{\eta}\ 属于\ S_{\beta_2},\quad \eta_{\tau''_2}=0。 \end{cases}$$

结论与上面类似。

因此，在(18:14:a)或(18:14:b)发生的博弈中，玩家之一的选择范围可以合理地缩小。[1] *182*

18.5.5　接下来，我们要说明的是，(18:14:a)，(18:

---

[1] 这当然是一个笼统的试探性说明。我们并不真的需要它，因为我们已经有 14.5 和 17.8 的讨论。我们也许会猜到，它能够被用于取代或至少简化那些讨论。但是，我们即将在下面给出的一个例子将使这一希望破灭。

存在得到这些结果的另一种思路：如果(18:14:a) 或(18:14:b) 成立，那么，其与 17.8 的结合能够被用于获得有关良策集合 $\bar{A}$,$\bar{B}$ 的信息。我们不打算在这里讨论这个题目。——182，①

14:b)的适用范围是十分有限的:我们将给出一个严格决定的博弈,其中,(18:14:a),(18:14:b)都不成立。

让我们回到图 30 那种类型的博弈($\beta_1=\beta_2=3$)。我们取 $0<\alpha<1,\beta=0,\gamma=-\alpha$:

τ_1 \ τ_2	1	2	3
1	1	-1	$-\alpha$
2	-1	1	$-\alpha$
3	α	α	0

图 34

请读者自己确定哪一个组合的"取消"受到奖励或受到惩罚。

下面是这一博弈的详细讨论:

元素(3,3)显然是鞍点,所以这一博弈是严格决定的,且

$$v=v'=0。$$

借助 18.5.3 中使用的方法,不难看出,良策 $\vec{\xi}$ 的集合 $\overline{A}$ 和 $\vec{\eta}$ 的集合 $\overline{B}$ 都只包含一个元素:纯策略 $\vec{\delta}^3=\{0,0,1\}$。

另一方面,要验证(18:14:a)和(18:14:b)不成立,即图 34 中任何一行都不被其他两行的平均占优,任何一列也不被其他两列的平均占优时,读者将会遇到小的麻烦。

18.6 机会和不完美信息

18.6.1 上面讨论的例子弄清楚了的是,几率——严格说是概率——在一个博弈中的作用未必显著,它是由博

弈规则给定的。图 27 和图 30 描述的博弈就有着不给出概率的规则;所有动作都是个人动作。① 然而,我们发现, 183
它们中的大多数不是严格决定的,即它们的良策是混合策略,涉及概率的明确使用。

另一方面,我们关于那些有着完美信息的博弈的分析表明,这些博弈总是严格决定的,即它们有良策,且是纯策略,根本不涉及概率(见第 15 节)。

因此,从玩家行为——要使用的策略——的角度看,重要的是博弈是否是严格决定,其中是否包含机会动作并不重要。

第 15 节中关于有着完美信息的博弈的结果表明,严格决定性与支配玩家信息状况的规则之间存在着密切联系。为清楚说明这一点,尤其要说明机会动作出现与否基本上是无关紧要的,我们将证明:在每一(二人零和)博弈中,任一机会动作都能够被个人动作的一个组合取代,这一博弈的可能策略完全没变。有必要允许规则中包括玩家的不完美信息,但我们要证明的是:不完美信息包括明确的机会动作的所有可能结果。②

---

① 所有博弈简化为正规型甚至说明得更多:它证明了,每一博弈等价于一个没有机会动作的博弈,因为正规型只包含个人动作。——183,①

② 如 11.1 中描述的那样,引入(纯)策略和裁判的选择之后,存在着直接消除机会动作的一个直接方法。事实上,作为把一个博弈变成其正规型的最后一步,我们通过明确引入 11.2.3 中的期望值消除了机会动作。

但是,我们希望在不严重改变博弈结果的情况下消除机会动作。我们将用一个个人动作(我们将会看到是两个动作)取代一个机会动作,这样,它们各自在玩家策略的决定中的作用将保持不变,且可逐一评价。关于涉及到的结构问题,这一详细处理较上面提到的总结将会给出一个清楚的概念。——183,②

18.6.2 让我们考虑一个(二人零和)博弈 Γ 和其中的一个机会动作 M_κ① 像正常情况那样,借助 $\sigma_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 列举选择机会,并假设它们的概率 $p_\kappa^{(1)},\cdots,p_\kappa^{(\alpha_\kappa)}$ 都等于
184 $1/\alpha_\kappa$。② 现在,用两个个人动作 M'_κ, M''_κ 取代 M_κ。M'_κ, M''_κ 分别是玩家 1 和玩家 2 的个人动作。两者都有 α_κ 个选择机会。我们用 $\sigma'_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 和 $\sigma''_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 记相应的选择。这些动作以什么样的顺序排列无关紧要,但我们假定两个都必须是在没有有关其他动作(包括 M'_κ, M''_κ)的信息的情况下做出的。我们用这一矩阵定义一个函数 $\delta(\sigma',\sigma'')$。[见图 35。矩阵元素是 $\delta(\sigma',\sigma'')$。③] M'_κ, M''_κ——即相应个人选择 σ',σ''——对这一博弈的影响就好像 M_κ 本来有的选择是对应着(机会)选择 $\sigma_\kappa=\delta(\sigma',\sigma'')$。我们将这一新的博弈记为 Γ^*。我们声明,Γ^* 与 Γ 有相同的可能策略。

---

① 就目前而言,M_κ 的特征是否依赖于此前的博弈进程并不重要。——183,③

② 这并不失一般性。要理解这一点,假设问题中的概率取任一合理值,如 $r_1/t,\cdots,r_{\alpha_\kappa}/t$($r_1,\cdots,r_{\alpha_\kappa}$ 和 t 是正整数)。(这里事实上有一个缺陷,不过不太严重,因为任何概率都能够用有理数近似。)

现在,修改机会动作 M_κ,使其有 $r_1+\cdots+r_{\alpha_\kappa}=t$ 个备择(而不是 α_κ 个)。记为 $\sigma'_\kappa=1,\cdots,t$(而不是 $\sigma_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$)。这样,$\sigma'_\kappa$ 的第一个值 r_1 中的每一个都像 $\sigma_\kappa=1$ 那样对这一博弈有相同影响;σ'_κ 的第二个值 r_2 中的每一个都像 $\sigma_\kappa=2$ 那样对这一博弈有相同影响,如此等等。那么,赋予所有 $\sigma'_\kappa=1,\cdots,t$ 相同概率 $1/t$ 如同赋予 $\sigma_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 最初的概率 $r_1/t,\cdots,r_{\alpha_\kappa}/t$。——183,④

③ $$\delta(\sigma',\sigma'')\begin{cases}=\sigma'-\sigma''+1 & \sigma'\geqq\sigma''\\ =\sigma'-\sigma''+1+\alpha_\kappa & \sigma'\leqq\sigma''\end{cases}$$

因此,$\delta(\sigma',\sigma'')$ 总是数 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 之一。——184,①

σ' \ σ''	1	2	········	$\alpha_\kappa-1$	α_κ
1	1	α_κ	········	3	2
2	2	1	········	4	3
·	·	·	········	·	·
·	·	·	········	·	·
·	·	·	········	·	·
$\alpha_\kappa-1$	$\alpha_\kappa-1$	$\alpha_\kappa-2$	········	1	α_κ
α_κ	α_κ	$\alpha_\kappa-1$	········	2	1

图 35

18.6.3 事实上：让玩家 1 在 Γ^* 中使用 Γ 的一个固定不变的混合策略，进一步指定动作 M'_κ①，选择 $\sigma'=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 的概率都是 $1/\alpha_\kappa$。那么，从玩家 2 的角度看，有着玩家 1 的这一策略的博弈 Γ^* 如同博弈 Γ。这是因为，在 M''_κ（即任意 $\sigma''_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$）时，他的任何选择产生等于最初的机会动作 M_κ 的结果：图 35 表明，矩阵的第 $\sigma''=\sigma''_\kappa$ 列恰好包含 $\sigma=\delta(\sigma',\sigma'')=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 各一次，即 $\delta(\sigma',\sigma'')$ 将按照相同概率 $1/\alpha_\kappa$ 取值 $1,\cdots,\alpha_\kappa$（应归于玩家 1 的策略），就好像 M_κ 本来应该的那样。这样，从玩家 1 的角度看，Γ^* 与 Γ 一样好。

交换玩家 1 和玩家 2，从而图 35 中的行起到列的作用，相同论述表明，从玩家 2 的角度看，Γ^* 也至少与 Γ 一样好。 185

① M'_κ 是他的个人动作，所以他的策略必须给出。在 Γ 中不存在这一必要，因为 M_κ 是一个机会动作。——184，②

由于两位玩家的立场是对立的，这意味着，Γ^* 与 Γ 等价。[1]

18.7 上述结果的解释

18.7.1 把 18.6.2 和 18.6.3 的运算重复用于 Γ 的所有机会动作，它们都会被消除，从而证明 18.6.1 的最终意图。借助实例进行讨论将有助于更好地理解这一结果。

(A)考虑如下相当基本的“机会”博弈。两位玩家借助一个 50%—50% 的机会装置决定下一单位由谁支付。用 18.6.2,18.6.3 的工具将这一只有一个机会动作的博弈转换为一个有两个个人动作的博弈。在图 35 中，令 $\alpha_\kappa=2$，$\delta(\sigma',\sigma'')$ 值 1,2 用实际支付 1，-1 替换，这一矩阵就变成了图 12 中的矩阵。回忆 14.7.2 和 14.7.3，我们看到，这正是“硬币配对”游戏。

也就是说：“硬币配对”是借助个人动作和不完备信息产生概率 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 的工具。(回忆 17.1!)

(B)修改(A)，允许“平手”：两位玩家借助一个 $33\frac{1}{3}\%$，$33\frac{1}{3}\%$，$33\frac{1}{3}\%$ 的概率装置决定下一单位由谁支付，或没有任何人支付。再次应用 18.6.2、18.6.3。现在，图 35 中的矩阵中 $\alpha_\kappa=3$，$\delta(\sigma',\sigma'')$ 值 1,2,3 由实际支付

[1] 我们请读者把这些分析转换为第 11 节以及 17.2 和 17.8 中的严格形式：这并不困难，只不过烦琐而已。我们希望，上述文字论述清楚而简单地说明了我们考虑的现象的基本道理。——185，①

0,1,-1替代,该矩阵等于图 13 中的矩阵。由 14.7.2 和 14.7.3,我们看到,这正是"石头、剪子、布"游戏。

也就是说:"石头、剪子、布"通过个人动作和不完全信息产生概率$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$的工具。(回忆 17.1!)

18.7.2 (C)图 35 的 $\delta(\sigma',\sigma'')$ 能够用另一个函数取代,而且值域 $\sigma'=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 和 $\sigma''=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 能够用其他值域 $\sigma'=1,\cdots,\alpha'_\kappa$ 和 $\sigma''=1,\cdots,\alpha'_\kappa$ 替换,条件是:图 35 中的矩阵的每一行包含数 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中每一个相同次数。① 且每一行包含数 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中的每一个相同次数。② 事实上,18.6.2 的分析也只用到了 $\delta(\sigma',\sigma'')$(和 $\alpha'_\kappa,\alpha''_\kappa$)的这两个性质。

不难看出,在开始玩牌之前,谨慎"抽牌"就属于这一范畴。当 52 张牌之一必须由一个机会动作选择时,概率是$\frac{1}{52}$。这实际上是通过洗牌来实现的。这是一个机会动作,但如果洗牌的玩家不诚实,这就变成了他的个人动作。为了防止他的不诚实,允许另一位玩家指定洗 *186*
过的牌从何处开始取牌,即在那一位置"抽牌"。这两个动作(尽管它们是个人动作)的组合等价于最初倾向于的机会动作。当然,缺乏信息也是这一方法有效的必要条件。

这里,$\alpha_\kappa=52$,$\alpha'_1=52!$ = 这副牌可能摆出的个数,

---

① $\alpha'_\kappa/\alpha_\kappa$ 倍。因此,α'_κ 必定是 α_κ 的一个倍数。——185,②

② $\alpha''_\kappa/\alpha_\kappa$ 倍。因此,α''_κ 必定是 α_κ 的一个倍数。——185,③

$\alpha''=52$是"抽牌"的位置的个数。我们请读者完成这些细节,并选择这一例子中的$\delta(\sigma',\sigma'')$。[①]

19. 扑克与诈叫

19.1 扑克游戏描述

19.1.1 我们已多次强调,18.3 中讨论的,尤其是 18.4 中较具体地讨论的$\beta_1=\beta_2=2$的情况只涉及最简单的二人零和博弈。接着,我们在 18.5 中给出了一些复杂例子,这些复杂性能够出现在一般二人零和博弈之中,但是,为了更好地理解我们的一般结果(即 17.8)的含义,我们可以讨论一个更为复杂的博弈。对于$\beta_1=\beta_2=2$的情况,这一点尤其需要,因为在这种情况下,被称之为(纯)策略的τ_1,τ_2的选择很少配得上这个名称:将其称为"动作"并不夸张。事实上,在这些极其简单的情况下,扩展型与正规型之间很难有任何差异,从而动作与策略的等同性是这些博弈的正规型的一个特征。下面,我们将利用扩展型来分析一个博弈,其中的玩家有若干动作,从而,从扩展型向正规型和策略的过渡不再是一个空的运算。

---

① 我们假设了,洗牌只被用于产生一张牌。如果整副牌都要用到,那么,"抽牌"并不绝对安全。一位不诚实的洗牌者产生牌张之间的一定关系,"抽牌"无法破坏这一关系。这样,这方面的知识会使这位洗牌者合理地占有优势。——186,①

19.1.2　我们要严格讨论的是扑克。[①][②] 然而，实际中的扑克实在是一个过于复杂的题目，不可能做出详尽的分析，因此我们不得不对其进行适当的简化性修改。有些修改甚至相当大。[③] 对于我们来说，在我们的简单模型中，扑克的基本概念和关键性质总归要保留下来。因此， 187

---

① 这是一种很流行的扑克牌游戏，多用于赌博，其名称很多。有的地方称其为“拖拉机”。目前最为流行的互联网游戏网站将其称为梭哈。——译者注

② 关于扑克的一般分析以及将要在下面给出的对其不同变形的数学讨论是由冯·诺伊曼于1926—1928年完成的，但此前没有公开发表。[见“Zur Theorie der Gesellschaftsspiele,”Math. ann. ,Vol. 100(1928)中的参考文献。]这尤其适用于19.4—19.10的对称型变种，19.11—19.13的(A)，(B)和在这些讨论占据主导地位的关于“诈叫”的讨论。19.14—19.16的不对称变形(C)是1949年为了这一著作的出版而讨论的。

第154页脚注①中提到的波莱尔和维勒的著作中，关于扑克的讨论也占有相当篇幅。(Vol. IV,2:“applications aux Jeux de Hasard,”Chap. V:“Le jeu de Poker.”)它们十分有启发意义，但主要是以多少有点试探性的方式把概率运用于扑克的评价，没有系统运用潜在的一般博弈理论。

波莱尔的著作的第91—97页分析了扑克的一个肯定是策略性的阶段(“诈叫”)。这也可以被看作是扑克的一个简单变形——可以与我们在19.4—19.10和19.14—19.16中考虑的两个变形比较。实际上，它与后者有密切联系。

希望比较这两个变形的读者将会发现，下面的说明是有帮助的：

(I)我们的叫牌 a,b 对应着上述著作中的 $1+\alpha$。

(II)我们在19.4—19.10中考虑的变形与上述著作中考虑的情况之间的差别是：如果玩家1从一个“低水平”的叫牌开始，那么，我们的变形提供了整手牌的比较，而上述著作中的变形使他无条件地失去了“低水平”叫牌的数额。也就是说，我们把这一起始“低水平”叫牌当作是“眼前的事情”(见19.14的开头，特别是第211页脚注①)，而上述著作中将其当作是“过去了的事情”。我们相信，我们的做法是对实际中的扑克的这一阶段的更好描述。尤其是，我们需要对“诈叫”进行恰当的分析和解释。详细内容见第219页脚注①。——186，②

③ 见19.11和19.16末尾。——187，①

我们有可能把基本的一般结论和解释建立在这样一些结果之上，这些结果是我们运用前面建立起来的理论得到的结果。

本来，扑克可以由任意多个人玩，[1]由于我们正在分析的是二人零和博弈，我们设定玩家人数为 2。

扑克游戏开始时，从一副牌[2]中给每位玩家发 5 张牌，共有 2598960 种组合。[3] 5 张牌的一个组合称“一手牌”，按一定方式排序，即有规则规定“一手牌”的“大小”，从“大”到“小”，“最大”，第二，第三，等等。[4] 扑克有多种玩法，它们分两类：“Stud”和“Draw”。在“Stud”中，玩家的 5 张牌在开始的时候全部给出，在以后的进程中不能改变。在“Draw”中，一位玩家能够以多种方式更换他手中的牌的一部分或全部。在有些变形玩法中，玩家可以在玩的过程中分阶段依次得到他的牌。由于我们要讨论的是最简单的情况，我们将只研究 Stud。

在这种情况下，没有必要讨论牌张的组合。用 S 记一手牌中所有可能的组合的个数——从一整副牌中抽出

---

① 从某种意义上说，最大人数是 4 或 5。——187，②

② 有时是整副牌，共 52 张。当参与人人数较小时，常常用其中的一部分，如 32 张或 28 张。有时，增加一两种特殊牌张，即“大王”、“小王”。——187，③

③ 这是就整副牌而言的。有基本组合知识的读者会注意到，这是“52 个取 5 个的不重复组合”的个数：

$$\binom{52}{5}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=2598960。——187，④$$

④ 这一描述涉及一些人们熟知的技术术语：“同花大顺”、“同花顺”、“四张同点”或“炸弹”、“同花”等。我们没有必要在这里讨论它们。——187，⑤

5 张的组合数是 2598960，那么，我们也可以将其说成，每一位玩家从 $s=1,2,\cdots,S$ 中抽取一个数。我们的想法 188
是，$s=1$ 对应着最大的一手牌，$s=S-1$ 对应着第二大的那手牌，…，$s=1$ 对应着最小的那手牌。由于一个“公正的发牌”等于假设各手牌的概率相等，我们必须把抽取上述数字 s 解释为一个机会动作，$s=1,\cdots,S$ 的每一可能值的概率都等于 $1/S$。因此，这一博弈从两个机会动作开始：玩家 1 为自己和玩家 2 各抽取一个数[1]，分别记为 s_1 和 s_2。

19.1.3　一般来说，扑克游戏的下一阶段是“叫牌”。这一概念是，一个玩家给出一个一定金额的叫牌之后，他的对手可以选择“不叫”，“跟了”或“争叫”。“不叫”意味着他愿意支付他上次叫牌的数额（必然低于当前数额），不做任何争辩。在这种情况下，两位玩家手中的牌到底是什么是无所谓的。两位玩家根本不开牌。“跟了”意味着接受对手的叫牌，比手中的牌，持有大牌的玩家收到当前叫牌的数额。“跟了”是这一局的结束。“争叫”意味着对手用更高叫牌反击当前的叫牌，其中玩家的角色交换，原先的竞叫者现在可以选择“不叫”、“跟了”或“争叫”，等等。[2]

---

① 实际中，第二个玩家从第一个玩家抽过的牌中抽取。像对待其他复杂性一样，我们也不考虑这一复杂性。——188，①

② 情况常常因在开始的时候必须给出无条件支付而变得复杂。在有些变形中，要求玩家在游戏开始前下注；在另一些变形中，要求开叫的玩家支付额外数额；有时，要求所有玩家支付额外数额。我们不予考虑。——188，②

19.2 诈叫

19.2.1 所有这些的关键是,有一手大牌的玩家希望叫得高一些,且进行多次争叫,因为他有很好的理由指望自己会赢。因此,叫得高或争叫得高的玩家的对手会假设他有一手大牌。这会使对手"不叫"。然而,由于在"不叫"的情况下,牌是不亮开的,甚至一个有一手小牌的玩家,通过高水平叫牌或争叫给对手造成自己有一手大牌的(错误)印象,从而迫使对手不叫,也会战胜有一手大牌的玩家。

这一做法正是人们熟知的"诈叫"。毫无疑问,有经验的牌手都这么做过。值得怀疑的是,这是否是其真实动机。实际中,第二种解释是值得考虑的。如果人们知道一个玩家只在有一手大牌的情况下才叫得很高,在这种情况下,他的对手大概会不叫。这样,当这位玩家的牌真的很
189 大时,他也不能在若干轮争叫中把赌注加大。因此,他要在其对手的心目中制造不确定性,即使其对手知道他偶尔会在有一手弱牌的情况下叫得很高。

总之:关于两位玩家诈叫的动机,一是想在一手弱牌的情况下给对手造成自己有一手大牌的错误印象;二是在真有一手大牌的情况下给对手造成自己有一手弱牌的错误印象。两者都是反向信号传递即误导对手的例子(见 6.4.3)。然而,应该看到,第一类诈叫在对手放弃时最成功,因为这保证了想要取得的收益;第二类诈叫在对手选择"跟了"即失败的时候是最成功的,因为他达到了向对

手传递错误信息的目的。①

19.2.2 这类动机不直接的——明显不理性的——叫牌还有着另一种结果。此类叫牌必然是危险的，可以想像，值得用恰当的反诈叫措施使其风险变大，以限制对手使用它们。但是，反诈叫措施的动机事实上也是间接的。

我们花费这么长的篇幅说明这些试探性分析，原因在于我们的理论要解开所有这些可能的混合策略。我们将会在 19.10、19.15.3 和 19.16.2 中看到，围绕诈叫的这些现象如何能够得到定量分析，像占据开叫地位等那样，这些动机如何与这种游戏的主要策略特点联系着。

19.3 扑克游戏描述（续）

19.3.1 现在，让我们回到扑克的技术规则。为了避免无休止的争叫，叫牌的次数通常是受限制的。② 为了避免不切实际的冒叫——给对手造成难以想像的不合理后果，每次叫牌或争叫的数额有上限。通常，过低的争叫也是禁止的。我们将在后面说明这样做的理由（见19.13）。

---

① 这里，请再次原谅我们忽略了我们前面指出的指导原则；上述讨论显然假设了一个博弈序列（使得对手习惯的统计观察是可能的），而且它也肯定有着"动态分析"的特征。

我们请读者参阅 17.3，那里，这一明显的冲突得到了认真的研究。那里的分析完全适用于当前这一情况，应该能够证明我们的方法的合理性。这里，我们只须补充的一点是，我们的不一致——多次博弈和动态分析术语的使用——只是一个试探性的分析。以这种方式，我们能够使我们的讨论较为简洁和接近日常谈论这些事情的语言。但是，在 17.3 中，我们精心说明了如何用寻找一个良策这一严格静态问题来取代这些有疑问的东西。——189，①

② 这是 7.2.3 的停止规则。——189，②

我们将用如下最简单的形式把叫牌和争叫的这些限制明确表达出来：我们将假设这两个数字是 a, b

$$a > b > 0$$

190 是事先给定的，而且在一次叫牌中，只有两种可能："高"或"低"，前者是 a，后者是 b。我们能够通过改变 a/b 这一惟一重要的比率增加或降低这一博弈的风险，当 a/b 远大于 1 时，该博弈风险变大；当 a/b 大于 1 不太多时，该博弈相对安全。

对叫牌和争叫次数的限制将被用于简化整个博弈。实际中，玩家之一从最初的叫牌开始，然后玩家交换。

玩家之一占据开叫地位的利弊——和首先采取行动的必要性——本身就是一个有意思的问题。我们将在 19.14 和 19.15 中讨论一种非对称型的扑克游戏，其中首先采取行动是有意义的。但我们现在不希望为这一问题所困。换句话说，为了获得最纯和最简单的扑克游戏的其他基本特征，我们暂时避免偏离对称性。因此，我们将假设两位玩家都做出开叫，互不知道对手的选择。当两者都做出的开叫之后，相互告知对方自己的叫牌，即他的叫牌是"高"还是"低"。

19.3.2 我们要对这一游戏做进一步简化，只允许每位玩家选择"不叫"或"跟了"，即排除"争叫"。事实上，"争叫"只不过是已经包含在一个较高的开叫中的倾向的更详细和更强烈的表达。由于我们想进行尽可能简化，我们将避免以多种方式表达同一倾向[见 19.11、19.14 和 19.15 中的(C)]。

相应地，我们把这些条件描述为：考虑两位玩家相互告知自己的叫牌的那一刻。如果两人都叫"高"或"低"，那么，两者亮牌，有较大的牌的玩家将从对手那里收到数

量 a 或 b。如果他们手里的牌一样大，那么，不发生支付。如果一个人叫的是“高”，另一个人叫的是“低”，那么，叫“低”的玩家可以选择“不叫”或“跟了”。“不叫”意味着他向对手支付这一“低”数额（不考虑看对手的牌）。“跟了”意味着他从叫“低”改而叫“高”，这种情况就好像两人一开始就叫的都是“高”。

19.4　规则的严格描述

19.4　现在，我们严格陈述达成的规则，以总结上面最简单扑克游戏的描述：

首先，两位玩家通过一个机会动作获得手中的牌，即一个数 $s=1,\cdots,S$，这些数中的每一个有着相同的概率 $1/S$。我们把两位玩家手中的牌分别记为 s_1、s_2。

此后，每位玩家将通过一个个人动作来选择 a 或 b，即“高”或“低”叫牌。每位玩家在知道自己手里的牌而不 191
知道对手手里的牌或选择（叫牌）的情况下做出选择（叫牌）。最后，每一位玩家将自己的选择（叫牌）告知对方。（每个人都仍然知道自己手里的牌和选择。）如果出现一“高”一“低”，那么，由后者选择“不叫”或“跟了”。

这就是这个游戏的玩法。当一局结束时，按如下方式支付：如果两位玩家都叫的是“高”或“低”，或一“高”一“低”且叫的是“低”的玩家随后选择了“跟了”，那么，视 $s_1>$，或 $<s_2$，玩家 1 从玩家 2 分别得到数额 a、0 或 $-a$。如果两位玩家都叫的是“低”，那么，视 $s_1>,=$ 或 $<s_2$，玩家 1 从玩家 2 分别得到数额 b、0 或 $-b$。如果一位玩家叫的是“高”，另一位玩家叫的是“低”且随后选择“不叫”，那么，叫

“高”(或“低”)的玩家 1 从玩家 2 那里得到数额 b(或 $-b$)。[①]

19.5 策略描述

19.5.1 在这一博弈中,一个(纯)策略显然由下述指示组成:对于每一手牌 $s=1,\cdots,S$,指出将做出的叫牌是“高”还是“低”,在后一种情况下,如果叫“低”遇到对手叫的是“高”,要进一步指出这位玩家选择“跟了”还是“不叫”。一个简单的描述是一个数字指数 $i_s=1,2,3$;$i_s=1$ 意味着一个“高”叫牌;$i_s=2$ 意味着一个“低”叫牌并随后选择了“跟了”;$i_s=3$ 意味着一个“低”叫牌并随后选择“不叫”。因此,一个策略就是对于每一个 $s=1,\cdots,S$,指定这样一个指数 i_s,即指定一个序列 $i_1,\cdots,i_S$。

上面的描述适合两位玩家。相应地,我们将上述策略记为 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 或 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$ 。

因此,每位玩家具有相同个数的策略:等于序列 $i_1,\cdots,i_S$ 的个数,即 3^S。用 11.2.2 的符号

$$\beta_1=\beta_2=\beta=3^S。$$

① 为了保持形式上的正确,这仍应按第 2 章第 6 节和第 7 节的模式排列。因此,首先提到的两个机会动作(发牌)应被称为动作 1 和 2;随后的两个个人动作(叫牌)被称为动作 3 和 4;最后的个人动作(“不叫”或“跟了”)被称为动作 5。

在动作 5 的情况下,如 7.1.2 和 9.1.5 描述的那样,由谁做出这个个人动作以及备择的个数取决于博弈的进程。(如果两位玩家都叫“高”或都叫“低”,那么,备择的个数是 1,我们将这个空的个人动作归于谁无关紧要。如果一个叫“高”,另一个叫“低”,那么,这一个人动作是叫“低”的那位玩家的。)

上述符号的一致使用还要求写出 s_1,s_2 的 σ_1,σ_2;“高”或“低”的 σ_3,σ_4;“不叫”或“跟了”的 σ_5。

我们请读者指出所有这些差别。——191,①

假如我们想严格遵从上述符号，我们应该就 $\tau_1=1,\cdots,\beta$ 枚举序列 $i_1,\cdots,i_S$，并分别用 $\sum_1^{\tau_1}$ 和 $\sum_2^{\tau_2}$ 记玩家1和玩家2的（纯）策略。不过，我们宁愿继续使用我们当前的符号。 192

接下来，我们必须描述的是，在两位玩家分别使用了策略 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 和 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$ 的情况下，玩家1收到的支付。这是矩阵元素 $H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)$。[①]

如果两位玩家实际拿到的牌分别是 s_1 和 s_2，那么，根据上述规则，玩家1收到的支付能够表达为：$L_{sgn(s_1-s_2)}$，其中 $sgn(s_1-s_2)$ 是 s_1-s_2 的正负号[②]，三个函数

$$L_+(i,j),\quad L_0(i,j),\quad L_-(i,j)\qquad i,j=1,2,3$$

能够表达为下述矩阵：[③]

$i \backslash j$	1	2	3
1	a	a	b
2	a	b	b
3	$-b$	b	b

$L_+(i,j)$

图 36

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	0	b
2	0	0	0
3	$-b$	0	0

$L_0(i,j)$

图 37

$i \backslash j$	1	2	3
1	$-a$	$-a$	b
2	$-a$	$-b$	$-b$
3	$-b$	$-b$	$-b$

$L_-(i,j)$

图 38

① 序列 $i_1,\cdots,i_S$ 是行指数，$j_1,\cdots,j_S$ 是列指数。在我们当初的符号中，策略是 $\sum_1^{\tau_1}$ 和 $\sum_2^{\tau_2}$，矩阵元素是 $H(\tau_1,\tau_2)$。——192，①

② 分别对应着 $s_1>$、$=$ 或 $<s_2$ 的 $+$、0 或 $-$。它以算术形式表达了哪一手牌更大。——192，②

③ 请读者认真比较这些矩阵和我们对规则的文字描述，并验证它们的正确与否。另一种值得注意的情况是，该博弈的对称性对应着如下恒等式：

$$L_+(i,j)\equiv -L_-(j,i),\quad L_0(i,j)\equiv -L_0(j,i)。$$——192，③

如前面描述的那样，s_1, s_2 源于机会动作。因此，

$$H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2 = 1}^{S} L_{sgn(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2})。$$[1]

19.5.2 接下来，我们过渡到 17.2 意义上的（混合）
193 策略。它们是属于 S_β 的 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$。考虑到我们现在正使用的符号，我们必须以新的方式指出这些向量的分量：我们写 $\xi_{i_1, \cdots, i_S}, \eta_{j_1, \cdots, j_S}$ 而不写 $\xi_{\tau_1}, \eta_{\tau_2}$。

像 17.4.1 的（17:2）那样，我们给出玩家 1 的收益的期望值：

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i_1, \cdots, i_S, j_1, \cdots, j_S} H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S) \xi_{i_1, \cdots, i_S} \eta_{j_1, \cdots, j_S}$$

$$= \frac{1}{S^2} \sum_{i_1, \cdots, i_S, j_1, \cdots, j_S} \sum_{s_1, s_2} L_{sgn(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2}) \xi_{i_1, \cdots, i_S} \eta_{j_1, \cdots, j_S}。$$

交换两个 $\sum$ 的顺序并写成如下方式是有好处的：

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i_1, \cdots, i_S, j_1, \cdots, j_S} L_{sgn(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2}) \xi_{i_1, \cdots, i_S} \eta_{j_1, \cdots, j_S}。$$

如果我们令

$$(19:1) \qquad \rho_i^{s_1} = \sum_{\substack{i_1, \cdots i_S \neq i_{s_1} \\ i_{s_1} = i}} \xi_{i_1, \cdots, i_S},$$

$$(19:2) \qquad \sigma_j^{s_2} = \sum_{\substack{j_1, \cdots j_S \neq j_{s_2} \\ j_{s_2} = j}} \eta_{j_1, \cdots, j_S},$$

---

[1] 作为上面脚注③的结果，请读者验证

$$H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S) = -H(j_1, \cdots, j_S | i_1, \cdots, i_S)。$$

即

$$H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S)$$

是一个斜对称矩阵，再次表达了该博弈的对称性。——192，④

那么，上述方程变成

$$(19:3)\quad K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2}\sum_{i,j}L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\rho_i^{s_1}\sigma_j^{s_2}。$$

这里有必要对(19:1)—(19:3)的含义进行文字说明。

(19:1)表明，$\rho_i^{s_1}$ 是玩家 1 拿到一手牌 s_1 时，借助混合策略 $\vec{\xi}$ 选择 i 的概率；(19:2)表明，$\sigma_j^{s_2}$ 是玩家 2 拿到一手牌 s_2 时，借助混合策略 $\vec{\eta}$ 选择 j 的概率。① 直觉上清楚的一点是，期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 仅仅依赖于概率 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$，而不依赖于潜在概率 $\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_s}$ 和 $\eta_{j_1},\cdots,\eta_{j_s}$ 本身。② 以这一直接方式，不难看出，公式(19:3)是正确的：我们只需回忆 194
$L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})$ 的含义和 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 的解释。

---

① 我们从 19.4 得知，i 或 $j=1$ 意味着一个“高”叫牌，$i=2,3$ 意味着一个“低”叫牌，并有着随后选择“跟了”或“不叫”的倾向。——193，①

② 这意味着，两个不同的(纯)策略组合有可能有相同的实际影响。

aabb 我们可以用一个简单的例子说明这一点。令 $S=2$，即假设只存在一手“大牌”和一手“小牌”。把 $i=2,3$ 看作一回事，即假设只存在一个“高”叫牌和“低”叫牌。那么，存在着四种可能的(纯)策略，我们分别称为：

“鲁莽”：总是叫“高”。

“谨慎”：总是叫“低”。

“正常”：大牌时叫“高”，小牌时叫“低”。

“诈叫”：小牌时叫“高”，大牌时叫“低”。

那么，“鲁莽”和“谨慎”的 50—50 混合策略与“正常”和“诈叫”的 50—50 混合策略有相同效果：两者都意味着，这一玩家将在任何情况下都以 50—50 随机地叫“高”或“低”。

然而，在我们现在的符号中，这是两个不同的混合策略，即两个不同的 $\vec{\xi}$。

这当然意味着，我们的完全适合一般博弈的符号对于很多具体博弈来说是多余的。在有一般目的的数学讨论中，这是常有的事情。

当我们给出一般理论时，就没有理由认为这是多余的了。但是，对于我们正在讨论的这个具体博弈来说，我们将把它去掉。——193，②

19.5.3 非常清楚，根据 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 含义和(19:1)、(19:2)对它们的正式定义，它们满足如下条件：

$$(19:4) \qquad \rho_i^{s_1} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \rho_i^{s_1} = 1,$$

$$(19:5) \qquad \sigma_j^{s_2} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{s_2} = 1。$$

另一方面，满足这些条件的任何 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 都能够借助(19:1)和(19:2)从 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 得到。这在数学上是清楚的①，也是符合直觉的。$\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 的任何这类系统都是一个概率系统，它定义一个可能的计算方法(modus procedendi)，所以它们必定对应着某一混合策略。

(19:4)和(19:5)刚好给出了两个三维向量：

$$\vec{\rho}^{s_1} = \{\rho_1^{s_1}, \rho_2^{s_1}, \rho_3^{s_1}\} \qquad \vec{\sigma}^{s_2} = \{\sigma_1^{s_2}, \sigma_2^{s_2}, \sigma_3^{s_2}\}$$

那么，(19:4)和(19:5)恰恰说明，所有 $\vec{\rho}^{s_1}$，$\vec{\sigma}^{s_2}$ 都属于 S_3。

这说明，这些向量的引入带来了多么大的简化：$\vec{\xi}$(或 $\vec{\eta}$)是 S_β 中的一个向量，即依赖于 $\beta - 1 = 3^S - 1$ 个常数；$\vec{\rho}^{s_1}$(或 $\vec{\sigma}^{s_2}$)是 S_3 中 S 个向量，即每一个依赖于两个常数；因此，它们合起来是 $2S$ 个常数。而且，甚至对于一个不太大的 S，$3^S - 1$ 也远远大于 $2S$。②

19.6 问题陈述

195 **19.6** 由于要对付的是一个对称博弈，我们能够使用

① 例如，令 $\xi_{i_1,\cdots,i_S} = \rho_{i_1}^1 \cdot \cdots \cdot \rho_{i_S}^S$，$\eta_{i_1,\cdots,i_S} = \rho_{j_1}^1 \cdot \cdots \cdot \sigma_{j_S}^S$，并验证 17.2.1 的(17:2:a)、(17:1:b) 是上述(19:4) 和(19:5) 的结果。——194，①

② 实际上，S 大约等于 250 万(见第 187 页脚注④)；因此 $3^S - 1$ 和 $2S$ 都很大，但前者远远大于后者。——194，②

17.11.2 的(17:H)中关于良策(混合策略)的特征描述，即 $\overline{A}$ 中的 $\vec{\xi}$。这一结果是说：$\vec{\xi}$ 必须是针对它本身的最优策略，即 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 必定在 $\vec{\xi}=\vec{\eta}$ 时实现。

19.5 告诉我们，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 实际依赖于 $\vec{\rho}_i^{s_1},\vec{\sigma}_j^{s_2}$。这样，我们可以将其写成 $K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s\mid\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s)$。那么，19.5.2 中的(19:3)告诉我们(我们重新安排求和 $\sum$ 的顺序)

$$(19:6)\qquad K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s\mid\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s)$$
$$=\frac{1}{S^2}\sum_{S_1,i}\sum_{S_2,j}L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\rho_i^{s_1},\sigma_j^{s_2}。$$

而且 $\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s$ 作为一个良策的特征是：

$$\mathrm{Min}_{\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s}K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s\mid\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s)$$

在 $\vec{\rho}^1=\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\rho}^s=\vec{\sigma}^s$ 时实现。这一条件基本上能够以 17.9.1 中对付类似问题的方法得到。我们换一种方式对其进行简要说明。

(19.6)中的 $\mathrm{Min}_{\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s}$ 等于分别就 $\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s$ 求最小值，因此，考虑这样一个 $\vec{\sigma}^{s_2}$，它受到的约束条件只是要求它属于 S_3，即

$$\sigma_j^{s_2}\geqq 0,\qquad \sum_{\sigma_j^{s_2}=1}^{3}=1。$$

(19:6)是三个分量 $\sigma_1^{s_2},\sigma_2^{s_2},\sigma_3^{s_2}$ 的一个线性表达式。因此，在它取得其最小值的地方，$\vec{\sigma}^{s_2}$ 的所有分量 $\sigma_j^{s_2}$ 中不具有最小可能系数者均等于零。

$\sigma_j^{s_2}$ 的系数是

$$\frac{1}{S^2}\sum_{S_1,i}L_{符号(s_1-s_2)}(i,j)\rho_i^{s_1},$$

记为$\frac{1}{S}\gamma_j^{s_2}$。

所以，(19:6)变成

$$(19:7)\qquad K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^S\mid\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^S)=\frac{1}{S}\sum_{s_2,j}\gamma_j^{s_2}\sigma_j^{s_2}。$$

196 而且，它就$\vec{\sigma}^{s_2}$取最小值的条件是

(19:8) 对每一数对s_2,j，如果$\gamma_j^{s_2}$没有（在j中[①]）取得其最小值，那么，我们有$\sigma_j^{s_2}=0$。

因此，在$\vec{\sigma}^1=\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\sigma}^S=\vec{\rho}^S$取最小值的一个良策的特征是：

(19:A) $\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^S$描述了一个良策，即$\vec{\xi}$属于$\bar{A}$，当且仅当：

对于每一个数对s_2,j，如果$\gamma_j^{s_2}$没有（在j中[②]）取得其最小值，那么，我们有$\rho_j^{s_2}$。

最后，我们当然要借助图36—38的矩阵图明确给出$\gamma_j^{s_2}$的表达式。它们是

$$(19:9:a)\qquad \gamma_1^{s_2}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(-a\rho_1^{s_1}-a\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})-b\rho_3^{s_2}+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(a\rho_1^{s_1}+a\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})\Big\},$$

$$(19:9:b)\qquad \gamma_2^{s_2}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(-a\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(a\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1}+b\rho_3^{s_1})\Big\},$$

---

① 意思是在j中，而不是在s_2,j中！——196，①

② 同上。

$$(19:9:c)\qquad \gamma_3^{s_2}=\frac{1}{S}\left\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}\left(b\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1}\right)+b\rho_1^{s_2}\right.$$
$$\left.+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}\left(b\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1}+b\rho_3^{s_1}\right)\right\}。$$

19.7 从离散情况过渡到连续情况

19.7.1 19.6 的(19:A)与公式(19:7)、(19:9:a)、(19:9:b)和(19:9:c)结合起来能够用于决定所有良策。[①] 这方面的分析有着令人厌烦的组合特征，涉及若干不同情况的分析。我们得到的结果是定量分析结 197
果，类似于下面在修正的假设条件下得到的结果，差别只是细节性的，这些细节性的东西也被称为策略的"精细结构"(fine structure)。我们将在 19.12 中给予更多说明。

此刻，我们的主要兴趣是解的主要特征，而不是"精细结构"问题。首先，让我们注意可能的牌 $s=1,\cdots,S$ 构成的序列的"颗粒状"结构。

如果我们想把各手牌的大小按照一个 0%—100% 的刻度来描述，或用一个 0—1 的分数来描述，那么，最小的一手牌 $s=1$ 将对应着 0，最大的一手牌 S 将对应着 1。因此，"一手牌" s($s=1,\cdots,S$)应该位于这一刻度的 $z=\dfrac{s-1}{S-1}$ 处，即我们有如下对应关系：

---

① 这一决定是由我们两人之一做出的，且即将在别的地方出版。——196，②

可能的牌	旧刻度	$s=$	1	2	3	……	$S-1$	S
	新刻度	$z=$	0	$\frac{1}{S-1}$	$\frac{2}{S-1}$	……	$\frac{S-2}{S-1}$	1

图 39

因此，z 的值十分稠密地填入区间①

$$(19:10)\qquad 0 \leqq z \leqq 1。$$

但不管怎样，它毕竟是一个离散的序列。这正是上面提到的“颗粒状”结构。下面，我们将用一个连续的区间取代它。

也就是说，我们假设，选择手中牌 s 即 z 的机会动作能够产生区间(19:10)中的任何 z。我们假设，(19:10)的任何一个部分的概率是这一部分的长度，即 z 是均匀分布于(19:10)的。② 我们记玩家 1 和玩家 2 拿到的牌分别为 z_1,z_2。

19.7.2 这一变化要求我们用向量 $\vec{\rho}^{z_1},\vec{\sigma}^{z_2}$ $(0\leqq z_1, z_2\leqq 1)$取代 $\vec{\rho}^{s_1},\vec{\sigma}^{s_2}$ $(s_1,s_2=1,\cdots,S)$；它们仍然是概率向量，即仍属于 S_3。所以，分量（概率）$\rho_i^{s_1},\sigma_j^{s_2}$ $(s_1,s_2=1,\cdots,S;i,j=1,2,3)$让位于分量 $\rho_i^{z_1},\sigma_j^{z_2}$ $(0\leqq z_1,z_2\leqq 1;i,j=1,2,3)$。类似，19.6 中的 $\gamma_j^{s_2}$ 变成 $\gamma_j^{z_2}$。

下面，我们要写出(19:7)中的 K 和(19:9:a)，(19:9:b)，(19:9:c)中 $\gamma_j^{s_2}$ 的表达式。显然，求和

198

$$\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{S},\quad \frac{1}{S}\sum_{s_2=1}^{S}$$

① 你会回想起(第 187 页脚注④)，S 大约是 250 万。——197，①

② 这是所谓几何概率。——197，②

必须被换成积分

$$\int_0^1 \cdots dz_1, \qquad \int_0^1 \cdots dz_2,$$

求和

$$\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{s_2-1}, \quad \frac{1}{S}\sum_{s_1=s_2+1}^{S}$$

换成积分

$$\int_0^{z_2} \cdots dz_1, \qquad \int_{z_2}^{0} \cdots dz_1,$$

因子 $1/S$ 后面的孤立项可以被忽略。[①②] 理解这些之后，K 和公式 γ_j^s（即 γ_j^z）的公式变成了：

(19:7*)
$$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2} dz_2,$$

(19:9:a*)
$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - a\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + a\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1,$$

(19:9:b*)
$$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1} + b\rho_3^{z_1})dz_1,$$

(19:9:c*)
$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^{z_2} (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1$$

---

① 具体而言，我们指(19:9:a)和(19:9:c)中的中间项 $-b\rho_3^{s_2}$ 和 $b\rho_1^{s_2}$。——198，①

② 对应着 $s_1 = s_2$ 的项，在我们现在的符号中，相应是 $z_1 = z_2$，而且，由于 z_1, z_2 是连续变量，它们的概率等于零。

数学上，你可以把这些运算说成是，我们正在进行一个令 $S \to \infty$ 取极限的过程。——198，②

$$+\int_{z_3}^{1}(b\rho_1^{z_1}+b\rho_2^{z_1}+b\rho_3^{z_1})\,dz_1。$$

而且 19.6 的(19:A)的特征变成了

(19:B)　　$\vec{\rho}^{\,z}$ $(0\leqq z\leqq 1)$(它们都属于 S_3)描述一个良策,当且仅当:

对于每一个数对 z,j,如果 γ_j^z 没有(在 j 中①)取得其最小值,那么,我们有 $\rho_j^z=0$。②

19.8　解的数学决定

199　**19.8.1**　下面,我们继续研究良策 $\vec{\rho}^{\,z}$,即 19.7 的隐含条件(19:B)的解。

首先假设,$\rho_2^z>0$ 总成立。③ 对于这样一个 z,必然有 $\mathrm{Min}_j\gamma_j^z=\gamma_2^z$,从而,$\gamma_1^z\geqq\gamma_2^z$,即

$$\gamma_2^z-\gamma_1^z\leqq 0。$$

把(19:9:a*)、(19:9:b*)代入上式得

---

① 意思是在 j 中,而不是在 z 和 j 中!——198,③

② 公式(19:7*)、(19:9:a*)、(19:9:6*)、(19:9:c*)和这个准则本可以通过讨论这一"连续的"安排来直接得到,从一开始就用 $\vec{\rho}^{\,z_1}$,$\vec{\rho}^{\,z_1}$ 替换 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$,使我们的证明显得严格、完备,我们在 19.4—19.7 中选择了较长和较为易懂的过程。读者将会发现,完成上面提到的简短而直接的讨论是一个很好的练习。

我们希望建立这样一类博弈的理论,其中这类连续参数系统直接进入我们的理论,即目前这一做法的充分推广,而不仅仅限于一个具体博弈。

在这方面,维勒向前迈出了有意义的一步,见第 154 脚注 ① 提到的著作第 110—113 页。那里做出的连续性假设对于很多应用来说过于严格,尤其我们当前面临的情况。——198,④

③ $j=2$ 时的受到考虑的良策,即特定条件下有"跟了"倾向的"低"叫牌。——199,①

(19:11)　$(a-b)\left(\int_0^z \rho_2^{z_1} dz_1 - \int_z^1 \rho_2^{z_1} dz_1\right) + 2b\int_z^1 \rho_3^{z_1} dz_1 \leqq 0$。令 z^0 是使 $\rho_2^z > 0$ 的那些 z 的上限。[①] 根据连续性,(19:11)对于 $z = z^0$ 也是成立的。由于按定义,$z_1 > z^0$ 时,不可能有 $\rho_2^{z_1} > 0$,所以(19:11)中 $\int_{z^0}^1 \rho_2^{z_1} dz_1 = 0$。这样,我们将符号由 - 改为 +,从而(19:11)变成

$$(a-b)\int_0^1 \rho_2^{z_1} dz_1 + 2b\int_{z^0}^1 \rho_3^{z_1} dz_1 \leqq 0。$$

但是,根据假设,$\rho_2^{z_1}$ 总是 $\geqq 0$,且有时 >0。从而,上述不等式中的第一项 >0。[②③] 第二项显然 $\geqq 0$。这样,我们得到了一个矛盾。也就是说,我们证明了

(19:12)　$$\rho_2^z \equiv 0。$$[④]

19.8.2　消除了 $j=2$ 之后,让我们分析 $j=1$ 与 $j=3$ 之间的关系。由于 $\rho_2^z = 0$,所以 $\rho_1^z + \rho_3^z \equiv 1$,即

(19:13)　$$\rho_3^z = 1 - \rho_1^z,$$

且

---

① 满足 $\rho_2^z > 0$ 的最大 z^0 任意地发生在 z^0 邻近。(但我们并不要求对于所有 $z < z^0$,$\rho_2^z > 0$。)如果满足 $\rho_2^z > 0$ 的 z 存在,z^0 的存在性是肯定的。——199,②

② 当然,$a-b>0$。——199,③

③ 似乎没有必要如此深入积分或其他度量的细节。我们假设我们的函数是光滑的,足以使一个正的函数有一个正的积分。如果我们使用上面提到的有关数学理论,我们能够更容易地给出严格的处理。——199,④

④ 读者应该逐字重述这一结果:通过分析一手牌的假设中的可能上限,我们排除了有"跟了"意向的"低"叫牌。而且,我们证明了,至少在那附近,一个直接的"高"叫牌是人们更倾向于的。

当然,在我们的模型中,这是不允许的,因为我们的简化禁止了"羞叫"。——199,⑤

(19:14) $$0 \leqq \rho_1^z \leqq 1。$$

现在,区间 $0 \leqq \rho_1^z \leqq 1$ 可能有这样一个子区间,在这个子区间内,$\rho_1^z = 0$ 或 $\rho_1^z = 1$ 总成立。① 一个 z 不属于这两类区间
200 中的任何一个,即任意地接近于 $\rho_1^{z'} \neq 0$ 和 $\rho_1^{z'} \neq 1$ 的地方,称 z 为**中间情况**。由于 $\rho_1^{z'} \neq 0$ 或 $\rho_1^{z'} \neq 1$(即 $\rho_3^{z'} \neq 0$)意味着 $\mathrm{Min}_j \gamma_j^{z'} = \gamma_1^{z'}$ 或 $\gamma_3^{z'}$,所以我们看到:$\gamma_1^{z'} \leqq \gamma_3^{z'}$ 或 $\gamma_1^{z'} \geqq \gamma_3^{z'}$ 发生在中间情况 z 的任意邻近。因此,对于一个 z,根据连续性 ②,$\gamma_1^z = \gamma_3^z$,即

$$\gamma_3^z - \gamma_1^z = 0。$$

代入(19:9:a*)、(19:9:c*)并回忆(19:12)和(19:13)给出

$$(a+b)\int_0^z \rho_1^{z_1} dz_1 - (a-b)\int_z^1 \rho_1^{z_1} dz_1 + 2b\int_z^1 (1-\rho_1^{z_1}) dz_1 = 0$$

即

(19:15) $$(a+b)\left(\int_0^z \rho_1^{z_1} dz_1 - \int_z^1 \rho_1^{z_1} dz_1\right) + 2b(1-z) = 0。$$

接下来,考虑两个中间情况 z 和 z''。将(19:15)运用于 $z = z'$ 和 $z = z''$ 并相减,那么,

$$2(a+b)\int_{z'}^{z''} \rho_1^{z_1} \mathrm{d}z_1 - 2b(z''-z') = 0,$$

即

(19:16) $$\frac{1}{z''-z'}\int_{z'}^{z''} \rho_1^{z_1} dz_1 = \frac{b}{a+b}。$$

文字表达为:在两个中间情况 z'、z'' 之间,ρ_1^z 的平均是 $\frac{b}{a+b}$。

---

① 即策略指导玩家总是叫"高"或它指导玩家总是叫"低"(并随后"不叫")。——199,⑥

② γ_j^z 是用积分(19:9:a*)、(19:9:b*)和(19:9:c*)定义的,因此它们肯定是连续的。——200,①

所以，$\rho_1^z \equiv 0$ 和 $\rho_1^z \equiv 1$ 都不可能在整个区间

$$z' \leqq z \leqq z''$$

上成立，因为这样会产生平均值 0 或 1。所以，这个区间必定包括另一个中间情况 z，即在任意两个中间情况之间至少存在着第三个中间情况。这一结果表明，任何两个中间情况 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$ 之间总存在另一个中间情况。因此，使(19:16)成立的 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$ 任意稠密地存在于 z'、z'' 之间。但是，根据连续性，(19:16)必定对 z'、z'' 之间的所有 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$ 成立。①在 z'、z'' 之间，除了 $\rho_1^z = \dfrac{b}{a+b}$，没有其他选择余地。②

19.8.3　如果中间情况 z 总是存在的，那么，存在一个最大的和一个最小的，将两者分别记为 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$。我们有 201

(19:17)　$\rho_1^z = \dfrac{b}{a+b}$，　对于任何 $\overline{z'} \leqq z \leqq \overline{z''}$。

如果根本不存在中间情况 z，那么，(对于所有 z)，我

---

① (19:16)中的积分肯定是连续的。——200，②

② 显然，面积为零的——即总概率(例如有限个数的固定的)——离散个数 z 的例外情况是允许的。它们不改变积分值。一个严格的数学证明并不困难，不过不是这里需要的(见第 199 页脚注④)。因此，最简单的办法是假设 $\rho_1^z = \dfrac{b}{a+b}$ 毫无例外地属于 $\overline{z'} \leqq z \leqq \overline{z''}$。

在评价后面涉及区间 $\overline{z'} \leqq z \leqq \overline{z''}$ 的公式，以及涉及区间 $0 \leqq z < \overline{z'}$，$\overline{z''} < z' \leqq 1$ 的公式的时候，我们要将这一点牢记在心。后两个区间没有把 $\overline{z'}$，$\overline{z''}$ 计算进去。这当然是无所谓的：两个固定的孤立的点——这种情况下的 $\overline{z'}$ 和 $\overline{z''}$——总是可以舍弃的(见上)。

然而，读者必须注意的是，当 z 自身被比较时，一个 $<$ 与一个 $\leqq$ 之间没有显著区别，但对于 γ_j^z 来说，事情就不是这样。我们看到，$\gamma_1^z > \gamma_3^z$ 意味着 $\rho_1^z = 0$，而 $\gamma_1^z \geqq \gamma_3^z$ 却没有这一结果。(见图 41、图 47 和图 48 的讨论。)——200，③

们必定有 $\rho_1^z \equiv 0$ 或 $\rho_1^z \equiv 1$。不难看出，两者都不是解。[1] 因此，中间情况 z 的确存在且(19:17)成立。

19.8.4 对所有的 z，(19:15)的左边是 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$，从而，对于 $z=1$，

$$\gamma_3^1 - \gamma_1^1 = (a+b)\int_0^1 \rho_1^{z_1} \mathrm{d}z_1 > 0$$

（因为 $\rho_1^{z_1} \equiv 0$ 被排除了）。根据连续性，$\gamma_3^z - \gamma_1^z > 0$，即 $\gamma_1^z < \gamma_3^z$ 在 z 仅仅近似等于 1 时也是成立的。因此，对于这些 z，$\rho_3^z = 0$，即 $\rho_1^z = 1$。故，(19:17)的必要条件是 $\overline{z''} < 1$。在 $\overline{z''} \leqq z \leqq 1$ 中，不存在中间情况的 z；所以，$\rho_1^z \equiv 0$ 或 $\rho_1^z \equiv 1$ 仍旧在整个区间上成立。我们前面的结果排除了 $\rho_1^z \equiv 0$。所以，

(19:18) $\rho_1^z \equiv 1$， 对所有 $\overline{z''} \leqq z \leqq 1$。

19.8.5 最后，让我们考虑(19:17)的左端点 $\overline{z'}$。如果 $\overline{z'} > 0$，那么，我们有区间 $0 \leqq z \leqq \overline{z'}$。这个区间不包含中间情况 z，所以我们有 $\rho_1^z \equiv 0$ 或 $\rho_1^z \equiv 1$ 在 $0 \leqq z \leqq \overline{z'}$ 上任意一点成立。(19:15)左边，即 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 的一阶导数显然是 $2(a+b)\rho_1^z - 2b$。因此，在 $0 \leqq z < \overline{z'}$ 内，如果 $\rho_1^z \equiv 0$，这个导数是 $2(a+b) \cdot 0 - 2b = -2b < 0$；如果 $\rho_1^z \equiv 1$，那么，这个导数是 $2(a+b) \cdot 1 - 2b = 2a > 0$，即 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 在 $0 \leqq z < \overline{z'}$ 上分别单调递减或递增。由于它在上端点（中间情况 $\overline{z'}$）处

[1] 也就是说，在所有情况下，总是叫"低"（随后"不叫"）不是一个良策；在任何情况下总是叫"高"也不是良策。

数学证明：对于 $\rho_1^z \equiv 0$：算出 $\gamma_1^0 = -b, \gamma_3^0 = b$，从而 $\gamma_1^0 < \gamma_3^0$，这与 $\rho_3^0 = 1 \neq 0$ 矛盾；对于 $\rho_1^z \equiv 1$：算出 $\gamma_1^0 = a, \gamma_3^0 = b$，从而 $\gamma_3^0 < \gamma_1^0$，与 $\rho_1^0 = 1 \neq 0$ 矛盾。——201，①

的值是 0，我们分别有 $\gamma_3^z-\gamma_1^z>0$ 或 <0，即 $\gamma_1^z<\gamma_3^z$ 或 $\gamma_3^z<\gamma_1^z$。前者要求，在 $0\leqq z<\overline{z'}$ 内，$\rho_3^z\equiv 0$，$\rho_1^z\equiv 1$，后者要求 $\rho_1^z\equiv 0$。但是，作为我们的出发点的假设分别是 $\rho_1^z\equiv 0$，或 $\rho_1^z\equiv 1$。因此，每一种情况中都存在着一个矛盾。

故

(19:19)
$$\overline{z'}=0。$$

19.8.6　下面，我们通过说明(19:15)对于中间情况的 $z=\overline{z'}=0$ 的成立性来确定 $\overline{z''}$。这时，(19:15)变成了

$$-(a+b)\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1+2b=0,$$

$$\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1=\frac{2b}{a+b}。$$

但是，(19:17)、(19:18)和(19:19)给出　202

$$\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1=\overline{z''}\cdot\frac{b}{a+b}+(1-\overline{z''})\cdot 1$$

$$=1-\frac{a}{a+b}\cdot\overline{z''}。$$

所以，我们有

$$1-\frac{a}{a+b}\cdot\overline{z''}=\frac{2b}{a+b},$$

$$\frac{a}{a+b}\cdot\overline{z''}=1-\frac{2b}{a+b}=\frac{a-b}{a+b},$$

即

(19:20)
$$\overline{z''}=\frac{a-b}{a}。$$

结合(19:17)、(19:18)、(19:19)和(19:20)给出：

$$(19:21)\qquad \rho_1^z\begin{cases} = \dfrac{b}{a+b} & 0 \leqq z \leqq \dfrac{a-b}{a} \\ = 1 & \dfrac{a-b}{a} < z \leqq 1\text{。}\end{cases}$$

与(19:12)、(19:13)结合起来,这就完全描述了这一策略的特征。

19.9 解的详细分析

19.9.1 19.8 断言,扑克博弈中有且只有一个良策。①它由 9.8 中的(19:21)、(19:12)和(19:13)描述。下面,我们将给出这一策略的几何图示,以使后面的口头讨论更加容易。(见图 40。这个图的实际比例是$a/b \sim 3$。)

粗线描述的是 $\rho = \rho_1^z$。因此,粗线的高度就是一个"高"开叫的概率 ρ_1^z。细线 $\rho = 1$ 的高度是一个"低"开叫(并随后"不叫")的概率:$\rho_3^z = 1 - \rho_1^z$。

19.9.2 19.7 的公式(19:9:a*)、(19:9:b*)和(19:9:c*)允许我们计算系数 γ_j^z。我们给出其图示,把基本的验证留给读者。(见图 41。实际比例是图 40 中的比例,即 $a/b \sim 3$。)实线代表 $\gamma = \gamma_1^z$;点线代表 $\gamma = \gamma_2^z$;虚线代表 $\gamma = \gamma_3^z$。图 41 表明,在$0 \leqq z \leqq \dfrac{a-b}{a}$内,实线和虚线重合(即 γ_1^z 与

203 γ_3^z 一致),在$\dfrac{a-b}{a} < z \leqq 1$ 内,点线与虚线重合(即 γ_2^z 与 γ_3^z 一

① 事实上,我们仅仅证明了,只有在 19.8 中确定的策略才能够是良策,而且这一策略也的确是良策。这是已有的有关良策存在性的结果,虽然我们从"离散"情况到"连续"情况的过渡也许会引起一些怀疑。但是,我们将在下面证明,我们正在讨论的策略的确是良策,即满足 19.7 的(19:B)。——202,①

致）。这三条线中的每一条都由两段组成，它们相交于 $z=\frac{a-b}{a}$。图中给出了关键点 $z=0,\frac{a-b}{a},1$ 处 γ_j^z 的值。①

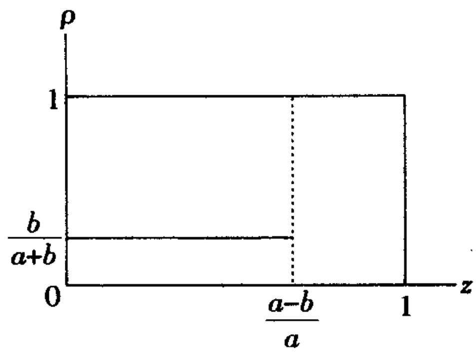


图 40

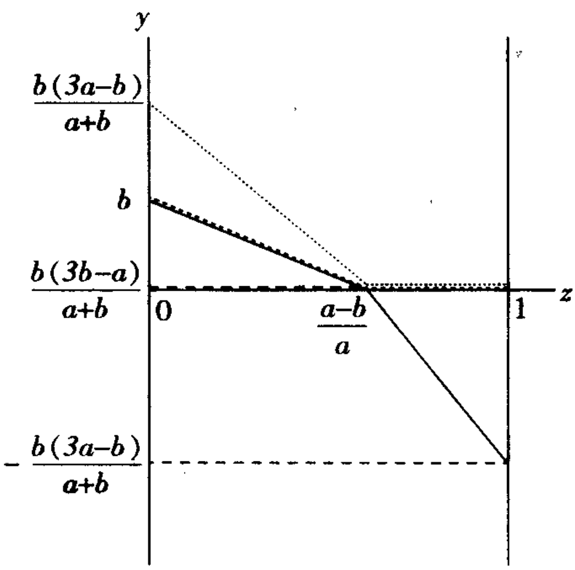


图 41

19.9.3 比较图 40 和图 41 表明，我们的策略的确是 204

① 这些结果的简单计算留给读者。——203，①

良策，即它满足 19.7 的(19:B)。事实上：在 $0 \leqq z \leqq \frac{a-b}{a}$ 内，$\rho_1^z \neq 0$ 且 $\rho_3^z \neq 0$，γ_1^z 和 γ_3^z 都是最下面的线，即等于 $\mathrm{Min}_j \gamma_j^z$。在 $\frac{a-b}{a} < z \leqq 1$ 内，只有 $\rho_1^z \neq 0$，只有 γ_1^z 是最低的线，即等于 $\mathrm{Min}_j \gamma_j^z$。(由于 $\rho_2^z = 0$，γ_2^z 表现如何是无所谓的事情。)

我们还能够从 19.7 中的(19:7*)计算出 K，即一局博弈的值。不难得到，$K=0$。这是预料之中的事情，因为该博弈是对称的。

19.10 解的解释

19.10.1 下面，我们给出 19.8、19.9 结果的文字说明。

首先，在图 40 中，良策的图形表明，对于一手充分大的牌 $\rho_1^z = 1$，这位玩家就应该叫"高"而不是别的。$z > \frac{a-b}{a}$ 就是这样的情况。然而，对于较弱的牌，$\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$，$\rho_3^z = 1 - \rho_1^z = \frac{a}{a+b}$，$\rho_1^z$，$\rho_2^z$ 都不等于零，这位玩家应该(以一定的概率)不规律地叫"高"和"低"。$z \leqq \frac{a-b}{a}$ 就属于这种情况。这种情况下，"高"开叫应该少于"低"开叫，事实上 $\frac{\rho_3^z}{\rho_1^z} = \frac{a}{b}$ 且 $a > b$。上述公式还表明，最后一类"高"开叫随着"高"开叫(相对于"低"开叫)代价的提高，"高"开叫越来越少见。

"弱"牌高叫是按照一定的概率不规律地做出的，而

且随“高”叫的代价的提高而减少。其显而易见的解释是：这些是普通扑克中的“诈叫”。

由于我们对扑克做出的极端简化，“诈叫”是以一种十分粗浅的方式出现的。不过，其象征性的含义无论如何是不会错的：有一手强牌（$z > \frac{a-b}{a}$）的玩家应该总是叫“高”；有一手“弱”牌（$z < \frac{a-b}{a}$）的玩家应该在绝大多数情况下叫“低”（概率为$\frac{a}{a+b}$），但偶尔进行不规律的“诈叫”（概率为$\frac{b}{a+b}$）。

19.10.2　第二，作为“诈叫”的条件，区间 $0 \leqq z \leqq$ *205*
$\frac{a-b}{a}$还联系着另外一个问题，即 17.10.1 和 17.10.2 中讨论的背离良策、“永久最优”、“防守”和“进攻”的后果问题。

我们假设玩家 2 背离良策，即使用概率 σ_j^z，不同于上面得到的 ρ_j^z，进一步假设玩家 1 仍使用 ρ_j^z，即良策，那么，我们能够对 γ_j^z 应用 19.7 中的（19:9:a*）、（19:9:b*）、（19:9:c*）以及图 41 的描述，并把对于玩家 1 来说的一局博弈的值用 19.7 中的（19:7*）表达出来

$$(19{:}22)\qquad K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^z \sigma_j^z dz\ 。$$

因此，玩家 2 的 σ_j^z 是针对玩家 1 的 ρ_j^z 的最优策略，如果 19.6 中（19:8）那样的条件得到满足：

(10:C)　　对于每一个数对 z,j，如果 γ_j^z 没有（在 j 内[①]）取得其最小值，那么，我们有 $\sigma_j^z=0$。

也就是说，(19:C)是 σ_j^z 成为与 ρ_j^z 一样好的针对 ρ_j^z 的策略即给出 $K=0$ 的充分必要条件。不然的话，σ_j^z 就是一个不好的策略，即给出 $K>0$。换句话说：

(19:D)　　一个错误策略，即一个不同于良策 ρ_j^z 的策略 σ_j^z 在对手固守这一良策而不会遭受损失的充分必要条件是，σ_j^z 满足上面的(19:C)。

看一眼图41就会明白，(19:C)意味着，对于 $z>\frac{a-b}{a}$，σ_2^z，$\sigma_3^z=0$；而对于 $z\leqq\frac{a-b}{a}$，仅仅有 $\sigma_2^z=0$。[②]也就是说：(19:C)描述的是一手强牌（$z>\frac{a-b}{a}$）的"高"叫牌，没有别的；对于任何一手牌，它都杜绝了"低"叫牌而后选择"跟了"，但是，对于一手弱牌，即落入"诈叫"区间（$z\leqq\frac{a-b}{a}$）的牌，它未能描述"高"叫牌出现的概率和"低"叫牌而后选择"不叫"的概率。

19.10.3　因此，对良策的任何背离，其中不仅仅包括不正确的"诈叫"，都将带来直接的损失，对手只要固守良策就足够了。当对手固守良策时，不正确的"诈叫"不会带

---

① 意思是在 j 内，而不是在 z,j 内！——205，①

② 事实上，在某一个地方 $\sigma_2^z=0$ 是允许的，但 z 的这一孤立值的概率是0，从而能够被忽略。见第200页脚注③。——205，②

来损失，但是，对手能够通过适当背离良策给你造成损失。 206
也就是说，“诈叫”的意义不是在实际博弈中对付一个好的玩家，而在于用它防止对手背离良策。这与19.2末尾的说明一致，尤其与我们在那里给出的“诈叫”的第二种解释一致。① 事实上，“诈叫”带来的不确定因素恰恰是我们在那里做出的对手策略约束，这已经在 19.2 末尾得到分析。

我们关于“诈叫”的结果还符合 17.10.2 的结论。我们看到，扑克的这一变形的惟一一个良策是不求永久最优，从而，根本不存在永久最优。（见 17.10.2 第一点说明，尤其是第 163 页脚注③。）而且，从 17.10.2 的第二部分讨论的意义上说，“诈叫”是防守性的。

19.10.4　最后，让我们看一下上面提到的进攻步骤，即通过背离良策，一位玩家能够从对手不正确的“诈叫”中得到的好处。

我们交换一下玩家的角色：令玩家 1 不正确地“诈叫”，即使用不同于图 40 的 ρ_j^z。由于只涉及不正确的“诈叫”，我们仍然假设

$$\text{对于所有的 } z \qquad \rho_2^z = 0$$

$$\text{对于所有的 } z > \frac{a-b}{a}, \begin{cases} \rho_1^z = 1 \\ \rho_3^z = 0 \end{cases}$$

这样，我们感兴趣的只是下面的结果

---

① 这些对于我们正在考虑的扑克类型都成立。进一步的讨论见 19.16。——206，①

(19:23) $\rho_1^z \geqq \frac{b}{a+b}$ 对于某些 $z = z_0 < \frac{a-b}{a}$ 成立。①

19.8 中的(19:15)的左边仍然是 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 的一个正确表达式。考虑一个 $z < z_0$，那么，(19:23)中的 $\geqq$ 保留 $\int_0^z \rho_1^z \mathrm{d}z_1$ 不受影响，但它增加(减少) $\int_z^1 \rho_1^z \mathrm{d}z_1$，从而，它减少(增加)(19:15)的左边，即 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$。由于不改变(19:23) $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 也会等于 0(见图 41)，因此，它将 $\leqslant 0$。即 $\gamma_3^z \leqslant \gamma_1^z$。然后，考虑一个 z，

$$z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}。$$

207 那么，(19:23)中 $\geqq$ 增加(减少) $\int_0^z \rho_1^z \mathrm{d}z_1$，而 $\int_z^1 \rho_1^z \mathrm{d}z_1$ 保持不变，从而，它增加(减少)(19:15)的左边，即 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$。由于不改变(19:23)，$\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 也会是 0(见图 41)，因此它将 $\geqq 0$，即 $\gamma_3^z \geqq \gamma_1^z$。总之：

(19:E) 有着 $\geqq$ 的变换(19:23)造成

$$\gamma_3^z \leqslant \gamma_1^z \qquad z < z_0,$$

$$\gamma_3^z \geqq \gamma_1^z \qquad z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}。$$

所以，对手能够得到好处，即通过使用不同于当前的 ρ_j^z 的 σ_j^z 来减少(19:22)的 K：对于 $z < z_0$，以 $\sigma_1^z(\sigma_3^z)$ 为代价增加

① 我们的确需要一个以上的 z 满足这一条件，见第 200 页脚注③。这一简单假设是，这些不等式在 z_0 的一个小的邻域内成立。根据第 199 页脚注④和第 200 页脚注③，对这一问题进行严格数学处理并不困难。出于与那里同样的理由，我们不这么做。——206，②

$\sigma_3^z(\sigma_1^z)$，即把 σ_1^z 从 ρ_1^z 的值$\frac{b}{a+b}$减少（增加）到端点值 0（1）；对于 $z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}$，以 $\sigma_3^z(\sigma_1^z)$ 为代价增加 $\sigma_1^z(\sigma_3^z)$，即把 σ_1^z 从 ρ_1^z 的值$\frac{b}{a+b}$增加（减少）到端点值 1(0)。换句话说：

（19:F）　对于给定的一手牌 z_0，如果对手"诈叫"太多（太少），那么，你能够以如下方式对其背离良策进行惩罚：对于比 z_0 弱的一手牌，"诈叫"更少（更多）；对于比 z_0 强的牌，"诈叫"更多（更少）。

也就是说，模仿他拿比 z_0 强的牌时的错误，而与他拿弱牌时的做法相反。

这就详细描述了如何做出正确"诈叫"以防止对手"诈叫"过多或过少，并且给出了这么做的结果。这方面的讨论能够深入下去，但我们不想这么做。

19.11　更加一般的扑克

19.11　前面的讨论使我们对扑克的策略结构和可能结果有了一些认识，但是，这些结果的推导要归于我们对博弈规则的简化。这些简化是 19.1、19.3、19.7 中做出的。要真正理解这一博弈，我们就应该将这些简化去掉。

这并不是说，我们（在 19.1 中）已经去掉的该博弈中的所有复杂因素都必须重新出现①，不过，这一博弈的某些简单且重要的特征的确被去掉了，而且重新对其进行分 208

① 我们不想这么做，我们只考虑二人博弈！——207，①

析是非常有意义的。特别是：

（A）各手牌应该是离散的，而不是连续的（见 19.7）。

（B）应该有两种以上的叫牌方式（见 19.3）。

（C）应该给每一位玩家多于一次的叫牌机会，而且应该考虑交替叫牌，而不是同时叫牌（见 19.3）。

我们尚且不能在同时满足（A）、（B）、（C）的条件下找到良策。因此，我们只能分别加上条件（A）、（B）、（C）。

对于（A）和（B），我们已经有了完美的答案。但是，对于（C），取得的进步十分有限。要详细给出这些数学推导就走得太远了，我们将简单提一下有关（A）、（B）、（C）的一些结果。

19.12 各手牌离散的情况

19.12.1 首先考虑（A），即回到我们在 19.1.2 末尾引入的、并在 19.4—19.7 中使用的衡量各手牌的离散刻度。这种情况下的解在很多方面类似于图 40 中的解。一般来说，$\rho_2' = 0$，而且存在一个一定的 s^0，使得 $s > s^0$ 时，$\rho_1' = 1$；$s < s^0$ 时，$\rho_1' \neq 0, 1$。还有，如果我们换成 z 刻度（见图 39），那么，$\frac{s^0 - 1}{S - 1}$十分接近$\frac{a - b}{a}$。[①] 这样，正如图 40 所表明的那样，我们有一个"诈叫"区域，在它的上边是"高"叫牌区域。

但是，对于 $s < s^0$，即在"诈叫"区域内，ρ_1' 却根本不等

① 严格说，当 $S \to \infty$ 时，$\frac{s^0 - 1}{S - 1} \to \frac{a - b}{a}$。——208，①

于或接近图 40 中的$\frac{b}{a+b}$。① 它们围绕这个值摆动，其摆动幅度依赖于 S 的特定算术性质，但当 $S\to\infty$ 时，这种摆动并不呈现出消失的趋势。然而，ρ_1^s 的平均趋于$\frac{b}{a+b}$。② 换句话说：

这一离散博弈的良策十分类似于其连续博弈的良策："诈叫"区域和"高"叫牌区域的划分，这些区域的位置和大小，以及发生在"高"叫牌区域中的事情，这些都十分相似。但是，在"诈叫"区域中，这种相似性只能就若干强弱相当的牌的平均而言。单就一手牌而言，精确过程很可能不同于图 40 中的情况，并依赖于 s 和 $S(a/b)$ 的算术 209
性质。③

19.12.2 因此，较严格地对应着图 40 的策略——即对所有 $s<s^0$，$\rho_1^s\equiv\frac{b}{a+b}$——不是良策，且与良策相当不同。不过，我们能够证明，使用这一"平均"策略的最大损失并不大。严格说，当 $S\to\infty$ 时，它趋于 0。④

---

① 也就是说，无论 s 如何变动，当 $S\to\infty$ 时，ρ_1^s 的极限都不是$\frac{a}{a+b}$。——208，②。

② 事实上，对于大多数 $s<s^0$，$\frac{1}{2}(\rho_1^s+\rho_1^{s+1})=\frac{b}{a+b}$。——208，③

③ 因此，在图 40 的等价图中，图形的左半部分将不是直线（在 $0\leq z\leq\frac{a-b}{a}$ 中，$\rho=\frac{b}{a+b}$），而是一条围绕这个平均值剧烈波动的线。——209，①

④ 它实际是 $1/S$。请回忆一下，在实际扑克中，S 大约是 250 万。（见第 187 页脚注④。）——209，②

这样，我们看到：在离散博弈中，正确的“诈叫”方式有一个十分复杂的“精细结构”，它能够给使用者带来很小的优势。

这有可能是一个典型的现象，并且频繁出现在比较复杂的实际博弈之中。它证明，当我们断定或期望这一理论中的连续性时，我们必须十分小心。① 不过，其实际意义是，由此造成的收益或损失很小，而且即使是对于一个非常有经验的玩家来说，也存在着未知的事情。

19.13 m 个可能的叫牌

19.13.1 然后考虑(B)：即保持各手牌之间的连续性，但允许以两种以上的方式叫牌。也就是说，我们用更多个数的叫牌替换两种叫牌

$$a > b(>0)。$$

假设有 m 种叫牌，它们的排序是：

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{m-1} > a_m(>0)。$$

这种情况下的解也与图 40 中的解有一定的相似之处。② 存在一个确定的 $z^0$③，使得 $z > z^0$ 时，这位玩家应该做出最高叫牌，并不再做其他事情；当 $z < z^0$ 时，他应该以一定的概率不规律地变化叫牌水平（总是包括最高叫牌 a 和其

---

① 请回忆第 198 页脚注④第二部分中的说明。——209，③

② 在对规则做出进一步限制的情况下，结果才是确定的。对规则的进一步限制是，在对手叫得更高时，禁止选择“跟了”，即每位玩家预计会做出他的最终和最高叫牌，如果他的对手叫得更高，他选择“不叫”（并接受结果）。——209，④

③ 类似于图 40 中的$\frac{a-b}{a}$。——209，⑤

他）。必须以多大概率做出什么叫牌是由 z 的值决定的。[1] 210
因此，正如图40表明的那样，我们有一个"诈叫"区域，且它之上是一个"高"叫牌区域——实际是最高叫牌且无其他事情。但是，在其自身区域 $z \leqq z^0$ 之内，与图40相比，"诈叫"有着更为复杂多变的结构。

尽管这一结构有着某些有意思的方面，我们并不详细分析这一结构。然而，我们将提到它的一个奇特之处。

19.13.2　给定两个值

$$a > b > 0。$$

用它们分别代表最高叫牌和最低叫牌：

$$a_1 = a, \quad a_m = b。$$

令 $m \to \infty$ 且选取其余叫牌 $a_2, \cdots, a_{m-1}$ 使得它们无限稠密地填满区间

$$b \leqq x \leqq a \tag{19:24}$$

（见下面脚注②中给出的两个例子）。如果上面描述的良策趋于某一极限，即趋于一个 $m \to \infty$ 的渐近策略，那么，你能够将其解释为一个良策，其中只有上界和下界是确定下来的（a 和 b），叫牌能够是区间（19:24）中的任何点。也

---

① 如果他必须做出的叫牌是 $a_1, a_p, a_q, \cdots, a_n$（$1 < p < q < \cdots < n$），那么，我们能够证明，它们的概率必定分别是

$$\frac{1}{ca_1}, \frac{1}{ca_p}, \frac{1}{ca_q}, \cdots, \frac{1}{ca_n}, \left(c = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_p} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

即如果要做出一定的叫牌，那么，其概率必定与其代价呈反比。

对于给定的 $z, a_p, a_q, \cdots, a_m$ 中何者实际出现取决于一个更为复杂的准则。我们不在这里讨论它。

注意，上述 c 的必要性在于使概率之和等于1。读者可以自己验证图40中的概率具有上述值。——210，①

就是说，19.3 开头提到的两个叫牌之间的一个最小区间的要求被去掉了。

现在，情况并不是这样。例如，我们能够在 $a_1 = a$ 和 $a_m = b$ 之间插入 $a_2, \cdots, a_{m-1}$，它们可以是算术序列，也可以是几何序列。① 一个渐近策略能够以两种方式中的任一个得到，但两个策略在很多基本方面大不相同。

如果我们考虑一个博弈，其中(19:24)中的任意叫牌都是允许的，那么，直接决定其良策是可能的。事实上，上
211 面提到的两个策略都是良策，还有着其他很多良策。

这表明，两个叫牌之间有一个最小区间这一假设的放弃能够带来多么大的复杂性：一个极限情况的良策不是有限多个叫牌情况下的良策的近似。19.12 的结论再次得到了强调。

19.14 交替叫牌

19.14.1 最后，考虑情况(C)：迄今为止，我们在这方面取得的进步是，我们能够用两位玩家交替叫牌来替换两个玩家的同时叫牌，即玩家 1 先叫，然后玩家 2 叫。

这样，19.4 中陈述的规则被修改为：

首先，每位玩家借助一个机会动作得到他手中的牌 $s = 1, \cdots, S$，这些数中的每一个具有相同概率 $1/S$。我们用 s_1, s_2 分别记玩家 1 和玩家 2 的牌。

---

① 前者的定义是

$$a_p = \frac{1}{m-1}[(m-p)a + (p-1)b] \quad p = 1, 2, \cdots, m-1, m。$$

后者的定义是：

$$a_p = \sqrt[m-1]{a^{m-p} b^{p-1}} \quad p = 1, 2, \cdots, m-1, m。$$ ——210，②

其次[①]，玩家 1 借助一个个人动作选择 a 或 b——“高”或“低”叫牌。[②] 他这么做时，知道自己手里的牌，但不知道对手手里的牌。如果他叫“低”，那么，该博弈结束。如果他叫“高”，那么，玩家 2 将借助一个个人动作，选择 a 或 b——“高”或“低”叫牌。[③] 他这么做时，知道自己手里的牌和对手的选择，但不知道对手手里的牌。

当一局博弈结束时，按如下方式支付：如果玩家 1 叫“低”，那么，视 $s_1 >$、$=$、$< s_2$，玩家 1 从玩家 2 那里得到的数额分别是 b、0、$-b$；如果两位玩家都叫的是“高”，那么，视 $s_1 >$、$=$、$< s_2$，玩家 1 从玩家 2 那里得到的数额分别是 a、0、$-a$；如果玩家 1 叫“高”且玩家 2 叫“低”，那么，玩家 1 从玩家 2 那里得到数额 b。[④]

19.14.2 现在，我们能够讨论纯策略和混合策略了，这基本上类似于 19.5 中最基本的扑克变形。

我们给出这一讨论的主要思路，对于还记得 19.4—19.7 的过程的读者来说，这是完全清楚的。

在这一博弈中，一个纯策略显然由下述指定组成：对于每一手牌 $s = 1, \cdots, S$，指出将要做出的叫牌是“高”还是“低”。用一个数值指数描述更为简单：$i_s = 1$ 意味着“高” 212
叫牌，$i_s = 2$ 意味着“低”叫牌。因此，一个策略就是对每个

---

① 从这里开始，我们可以设想这是玩家 2 已经叫过“低”的继续，现在轮到玩家 1 选择“跟了”或“争叫”。在这一阶段，我们不考虑“不叫”。——211，①

② “争叫”或“不叫”，见脚注①。——211，②

③ 即“跟了”或“不叫”。注意脚注②以后其意思的变化。——211，③

④ 请回忆上面的脚注，解释这些规则。从形式的角度看，我们应该回忆第 191 页脚注①，细节上略作修改。——211，④

$s=1,\cdots,S$ 指定一个指标 i_s，即一个序列 $i_1,\cdots,i_S$。

这同时适用于玩家 1 和玩家 2。相应地，我们将用 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 或 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$ 记上述策略。因此，每一博弈具有相同个数的策略，其个数是序列 $i_1,\cdots,i_S$ 的个数，即 2^S。使用 11.2.2 中的符号

$$\beta_1=\beta_2=\beta=2^S。$$

（不过，这一博弈不对称！）

接下来，我们必须描述的是，如果两位玩家使用了策略 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 和 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$，玩家 1 收到的支付。这是矩阵元素 $H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)$。如果两位玩家手中的牌分别是 s_1 和 s_2，那么，以此方式（使用上述规则），玩家 1 收到的支付能够表达为：它是 $L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})$，其中 $sgn(s_1-s_2)$ 是 s_1-s_2 的正负号，且三个函数

$$L_+(i,j),\quad L_0(i,j),\quad L_-(i,j)$$

能够分别用下列矩阵表示：

$i \backslash j$	1	2
1	a	b
2	b	b

图 42

$i \backslash j$	1	2
1	0	b
2	0	0

图 43

$i \backslash j$	1	2
1	$-a$	b
2	$-b$	$-b$

图 44

如上所述，s_1,s_2 来自机会动作。因此，

$$H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)=\frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2=1}^{S}L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})。$$

19.14.3 接下来，我们转向 17.2 意义上的混合策略。

它们是属于 S_β 的向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$。我们必须标出这些向量的(像)纯策略的分量:我们必须将其写成 $\xi_{i_1,\cdots,i_S},\eta_{j_1,\cdots,j_S}$,而不将其写成 $\xi_{\tau_1},\eta_{\tau_2}$。

我们给出 17.4.1 的(17:2),它描述的是玩家 1 的收益期望

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{i_1,\cdots,i_S,j_1,\cdots,j_S} H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)\xi_{i_1,\cdots,i_S}\eta_{j_1,\cdots,j_S}$$

$$= \frac{1}{S^2}\sum_{i_1,\cdots,i_S,j_1,\cdots,j_S}\ \sum_{s_1,s_2=1} L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})\xi_{i_1,\cdots,i_S}\eta_{j_1,\cdots,j_S}。$$

但两个 $\sum$ 交换并写成如下方式是有好处的 213

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2}^{S}\ \sum_{i_1,\cdots,i_S,j_1,\cdots,j_S} L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})\xi_{i_1,\cdots,i_S}\eta_{j_1,\cdots,j_S}。$$

如果我们令

(19:25) $$\rho_i^{s_1} = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_S 且\\ i_{s_1}|i_1,\cdots,i_S|}} \xi_{i_1,\cdots,i_S},$$

(19:26) $$\sigma_j^{s_2} = \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_S 且\\ j_{s_2}|j_1,\cdots,j_S|}} \eta_{j_1,\cdots,j_S},$$

那么,上述方程变成

(19:27) $$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2}^{S}\sum_{i,j} L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\rho_i^{s_1}\sigma_j^{s_2}。$$

19.14.4 所有这些都与 19.5.2 完全一样。正如那里的情况那样,(19:25)表明,$\rho_i^{s_1}$ 是玩家 1 手里的牌是 s_1 时使用混合策略 $\vec{\xi}$ 做出选择 i 的概率。(19:26)表明,$\sigma_j^{s_2}$ 是玩家 2 手里的牌是 s_2 时使用混合策略 $\vec{\eta}$ 做出选择 j 的概率。同样,直觉上清楚的是,期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 仅仅依赖于这些概率,而不依赖于潜在概率 $\xi_{i_1,\cdots,i_S},\eta_{j_1,\cdots,j_S}$ 本身。(19:27)表达了

这一点，并且能够轻易地基于这一基础推导出来。

还清楚的一点是，$\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 的含义以及它们的正式定义(19:25)，(19:26)表明，它们满足下述条件：

$$(19:28)\qquad \rho_i^{s_1} \geqq 0 \qquad \sum_{i=1}^{2} \rho_i^{s_1} = 1,$$

$$(19:29)\qquad \sigma_j^{s_2} \geqq 0 \qquad \sum_{j=1}^{2} \sigma_j^{s_2} = 1,$$

而且，任何满足这些条件的 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 都能够借助(19:25)和(19:26)从适宜的 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 得到。(见 19.5.2 中的相应步骤尤其见第 194 页脚注①。)这刚好形成两个二维向量

$$\vec{\rho}^{s_1} = \{\rho_1^{s_1}, \rho_2^{s_1}\}, \qquad \vec{\sigma}^{s_2} = \{\sigma_1^{s_2}, \sigma_2^{s_2}\}。$$

那么，(19:28)，(19:29)恰恰说明，所有 $\vec{\rho}^{s_1}$，$\vec{\sigma}^{s_2}$ 都属于 S_2。

214 因此，$\vec{\xi}$(或 $\vec{\eta}$)是 S_β 中的一个向量，即依赖于 $\beta - 1 = 2^S - 1$ 个常数；$\vec{\rho}^{s_1}$(或 $\vec{\sigma}^{s_2}$)是 S_2 中的 S 个向量，即每一个依赖于一个数字常数，因此，它们合起来组成 S 个数字常数。这样，我们就从 2^S 简缩到了 S(见 19.5.3 末尾)。

19.14.5 现在，像在 19.6 中做的那样，我们重写(19:27)

$$(19:30)\qquad K(\vec{\rho}^{1}, \cdots, \vec{\rho}^{S} \mid \vec{\sigma}^{1}, \cdots, \vec{\sigma}^{S}) = \frac{1}{S} \sum_{s_2, j} \gamma_j^{s_2} \sigma_j^{s_2},$$

有系数

$$\frac{1}{S}\gamma_j^{s_2} = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, i} L_{\operatorname{sgn}(s_1 - s_2)}(i, j) \rho_i^{s_1},$$

利用图 42—44 中的矩阵图，

$$(19:31:\mathrm{a})\ \gamma_1^{s_2} = \frac{1}{S}\left\{ \sum_{s_1=1}^{s_2-1} (-a\rho_1^{s_1} - b\rho_2^{s_1}) + \sum_{s_1=s_2+1}^{S} (a\rho_1^{s_1} + b\rho_2^{s_1}) \right\},$$

$$(19{:}31{:}\mathrm{b})\ \gamma_2^{s_2}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(b\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1})+b\rho_1^{s_2}+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(b\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1})\Big\}。$$

由于这一博弈不再是对称的，我们还需要其中交换玩家角色的公式，这一公式是

$$(19{:}32)\ K(\vec{\rho}^{\,1},\cdots,\vec{\rho}^{\,s}\mid\vec{\sigma}^{\,1},\cdots,\vec{\sigma}^{\,s})=\frac{1}{S}\sum_{s_1,i}\delta_i^{s_1}\rho_i^{s_1},$$

具有系数

$$\frac{1}{S}\delta_i^{s_1}=\frac{1}{S^2}\sum_{s_2,j}L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\,\sigma_j^{s_2},$$

利用图 42—44 中的矩阵图，

$$(19{:}33{:}\mathrm{a})\ \delta_1^{s_1}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_2=1}^{s_1-1}(a\sigma_1^{s_2}+b\sigma_2^{s_2})+b\sigma_2^{s_1}+\sum_{s_2=s_1+1}^{S}(-a\sigma_1^{s_2}+b\sigma_2^{s_2})\Big\},$$

$$(19{:}33{:}\mathrm{b})\ \delta_2^{s_1}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_2=1}^{s_1-1}(b\sigma_1^{s_2}+b\sigma_2^{s_2})+\sum_{s_2=s_1+1}^{S}(-b\sigma_1^{s_2}-b\sigma_2^{s_2})\Big\}。$$

判断良策的准则基本上是 19.6 中准则的重复，即由于我们现在考虑的这一博弈的非对称性，就像 19.6 的准则能够从 17.11.2 末尾的对称准则得到那样，我们可以从 17.9 215
的一般准则(17:D)得出当前准则。也就是说：

(19:G)　　属于 S_2 的 $\vec{\rho}^{\,1},\cdots,\vec{\rho}^{\,s}$ 和 $\vec{\sigma}^{\,1},\cdots,\vec{\sigma}^{\,s}$ 描述的是良策，其充分必要条件是：

对于每一对 s_2,j，如果 $\gamma_j^{s_2}$ 没有(在 j 中)取得其最小值，那么，我们有 $\sigma_j^{s_2}=0$；对于每一对 s_1,i，如果 $\delta_i^{s_1}$ 没有(在 i 中)取得其最大值，那么，我们有 $\rho_i^{s_1}=0$。

19.14.6　接下来，我们用 19.7 意义上各手牌连续的情况取代离散的 s_1,s_2。(尤其见那里的图 39。)如 19.7 描述的那样，这等于用向量 $\vec{\rho}^{\,z_1}$，$\vec{\sigma}^{\,z_2}$ $(0\leq z_1,z_2\leq 1)$ 替换 $\vec{\rho}^{\,s_1}$，

$\vec{\sigma}^{s_2}$ $(s_1, s_2 = 1, \cdots, S)$，它们仍然是具有相同性质的概率向量，即仍然属于 S_2。所以，分量 $\rho_i^{s_1}, \sigma_j^{s_2}$ 让位于分量 $\rho_i^{z_1}, \sigma_j^{z_2}$。类似地，$\delta_i^{s_1}, \gamma_j^{s_2}$，变成 $\delta_i^{z_1}, \gamma_j^{z_2}$。就像 19.7 中的（19:7*）、（19:9:a*）、（19:9:b*）和（19:9:c*）那样，公式（19:30）、（19:31:a）、（19:31:b）、（19:32）、（19:33:a）和（19:33:b）中的求和变成积分。所以，我们有：

$$(19:30^*) \qquad K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2} \mathrm{d}z_2,$$

$$(19:31:a^*) \quad \gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1,$$

$$(19:31:b^*) \quad \gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1 + \int_{z_2}^1 (b\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1,$$

以及

$$(19:32^*) \qquad K = \sum_i \int_0^1 \delta_i^{z_1} \rho_i^{z_1} \mathrm{d}z_1,$$

$$(19:33:a^*) \quad \delta_1^{z_1} = \int_0^{z_1} (a\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2 + \int_{z_1}^1 (-a\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2,$$

$$(19:33:b^*) \quad \delta_2^{z_1} = \int_0^{z_1} (b\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2 + \int_{z_1}^1 (-b\sigma_1^{z_2} - b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2。$$

这样，我们的良策准则同样被转换过来了。（这如同从 19.6 中的从离散准则到 19.7 中的连续准则的转换。）我们得到

（19:H） 属于 S_2 的 $\vec{\rho}^{z_1}$ 和 $\vec{\sigma}^{z_2}$ $(0 \leq z_1, z_2 \leq 1)$ 描述的是良策，其充分必要条件是：

对于每一对 z_2, j，如果 $\gamma_j^{z_2}$ 没有（在 j 中）取得其最小值，那么，我们有 $\sigma_j^{z_2} = 0$。对于每一对 z_1, i，如果 $\delta_i^{z_1}$ 没有（在 i 中）取得其最大值，那么，我们有 $\rho_i^{z_1} = 0$。

19.15　全部解的数学描述

19.15.1　良策 $\overrightarrow{\rho^z}$，$\overrightarrow{\sigma^z}$ 的决定，即 19.14 末尾指出的隐 216
含条件的解的决定能够充分得到说明。做到这一点的数学方法类似于 19.8 中确定扑克的基本变形中的良策——即 19.7 末尾指出的隐含条件的解——的那些方法。

我们不在这里给出数学讨论，但是我们将描述它所给出的良策 $\overrightarrow{\rho^z}$，$\overrightarrow{\sigma^z}$。

有且只有一个良策 $\overrightarrow{\rho^z}$，但是良策 $\overrightarrow{\sigma^z}$ 却形成一个广泛的族。（见图 45—46。这些图的实际比例是 $a/b \sim 3$。）

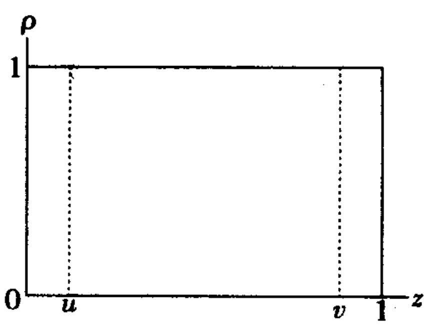


图 45

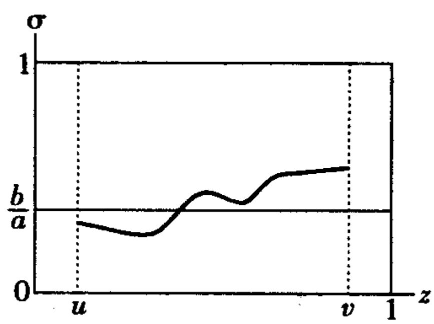


图 46

$$u = \frac{(a-b)b}{a(a+3b)}$$

$$v = \frac{a^2+2ab-b^2}{a(a+3b)}$$

图中粗直线分别代表 $\rho = \rho_1^z$，$\sigma = \sigma_1^z$。因此，粗直线高于 $\rho = 0$（$\sigma = 0$）的高度是"高"叫牌的概率，ρ_1^z（σ_1^z）；$\rho = 1$（$\sigma = 1$）高于粗线的高度是"低"叫牌的概率，$\rho_2^z = 1 - \rho_1^z$

$(\sigma_2^z = 1 - \sigma_1^z)$。图 46 中，区间 $u \leqq z \leqq u$ 上，$\sigma = \sigma_1^z$ 曲线的不规则的粗曲线部分代表着良策 $\vec{\sigma}^z$ 的多样性。事实上，$\sigma = \sigma_1^z$ 曲线的这一部分满足如下（充分必要）条件：

$$\frac{1}{v - z_0}\int_{z_0}^{v} \sigma_1^z \mathrm{d}z \begin{cases} = \dfrac{b}{a} & \text{当 } z_0 = u \\ \geqq \dfrac{b}{a} & \text{当 } u < z_0 < v \end{cases}$$

文字表达为：σ_1^z 在 u 和 v 之间的平均值是 b/a，而且在这一区间的右端点上，σ_1^z 的平均值总是 $\geqq b/a$。

217 因此，$\vec{\rho}^z$ 和 $\vec{\sigma}^z$ 在下述三个区间上有三种不同表现：①

首先，$0 \leqq z < z$；第二，$u \leqq z \leqq u$；第三，$v < z \leqq 1$。这三个区间的长度分别是 $u, v - u, 1 - v$，而且，关于 u, v 的有点复杂的表达式能够借助如下容易验证的比率记忆，这些比率是：

$$u:(1 - v) = (a - b):(a + b),$$
$$(v - u):1 - v = a:b。$$

19.15.2 19.14.6 中的公式(19:31:a*)、(19:31:b*)和(19:33:a*)、(19:33:b*)允许我们计算系数 γ_j^z, δ_i^z。我们给出（19.9 中图 41 那样的）图示，而不给出公式，并把基本的验证工作留给读者。在识别良策 $\vec{\rho}^z, \vec{\sigma}^z$ 时，惟有 $\delta_1^z - \delta_2^z, \gamma_2^z - \gamma_1^z$ 有意义：事实上，19.14 末尾的准则能够被解释为，每当这个差 >0，那么，ρ_2^z 或 $\sigma_2^z = 0$；而且，当这个差 <0 时，ρ_1^z 或 $\sigma_1^z = 0$。因此，我们给出这些差的图示。（见图 47，图 48。这些图的实际比例是图 45 和图 46 的比例，即 $a/b \sim 3$。）

---

① 注意这些区间的端点。见第 200 页脚注③。——217，①

图中普通的线代表曲线 $\gamma=\gamma_2^z-\gamma_1^z$；加了结点的线代表 $\delta=\delta_1^z-\delta_2^z$。图 48 中，$\delta=\delta_1^z-\delta_2^z$ 在区间 $u\leqq z\leqq v$ 上的不规则部分对应着图 46 中 $\sigma=\sigma_1^z$ 在同一区间上的不规则部分，即它也代表良策 $\vec{\sigma}^z$ 的多样性。$\sigma=\sigma_1^z$ 曲线的那一部分受到的约束（见图 46 后面的讨论）意味着，$\delta=\delta_1^z-\delta_2^z$ 曲线的这一部分必须落在图 48 中的阴影区域之内。

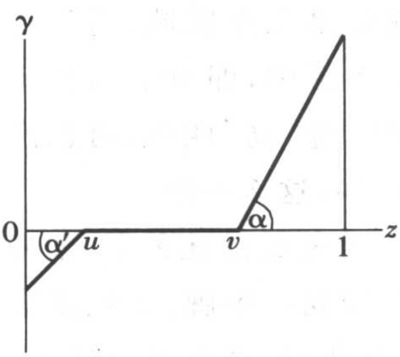


图 47

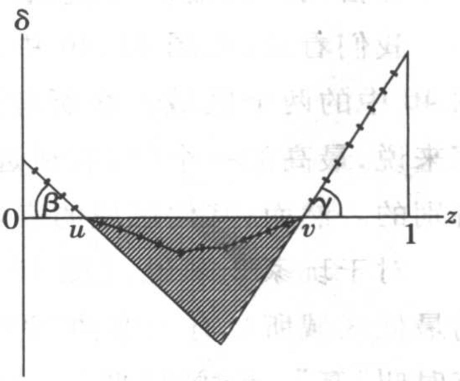


图 48

19.15.3　比较图 45 和图 47，图 46 和图 48，我们看到，我们的策略的确是良策，即它们满足（19:H）。我们请读者对照 19.9 中图 40 与图 41 的比较验证这一点。

K 的值还能够从 19.14.6 中的（19:30*）或（19:32*） 218
得到。这一结果是：

$$K=bu=\frac{(a-b)b^2}{a(a+3b)}。①$$

① 关于数字确定：如果 $a/b=3$，即我们的所有图形以这一比率为基础，那么，$u=\frac{1}{2}$，$v=\frac{7}{9}$ 且 $K=\frac{b}{9}$。——218，①

因此，玩家 1 对这一博弈有一个正的期望值，即有优势[①]，这显然能够归因于他占据着开叫的位置。

19.16 解的解释：结论

19.16.1 像 19.10 中讨论 19.8、19.9 中的结果那样，我们也能够讨论 19.15 中的结果。不过，我们并不打算为此占用大量篇幅，只想给出几点说明。

我们看到，在图 45、46 中出现的是三个区域，而不是图 40 中的两个区域。在所有这些图形中，即对于两位玩家来说，最高的一个（向右最远）对应着“高”叫牌，再也没有别的。然而，其他区域的表现就没有这么一致。

对于玩家 2 来说，（图 46），中间区域描述的是图 40 的最低区域所具有的那种“诈叫”，即同一手牌，不规律地有时叫“高”，有时叫“低”。如图 40 所示，概率虽非任意，却也不是惟一确定的。[②] 还有，图 46 中存在一个较低的区域，玩家 2 必须在这一区域中做出“低”叫牌，即他手中的牌太弱，不宜表现出那种混合行为。

再有，在玩家 2 的中间地带，像图 41 那样，$\gamma_2^s - \gamma_1^s = 0$，$\gamma_j^s$ 同样表现出无所谓，因此，他在这一地带的行为动机

---

① 对于 $a/b \sim 3$，这一优势大约是 $b/9$（见上面脚注①），即大约是“低”叫牌的 11%。——218，②

② 见图 46 后面的讨论。事实上，用 $\sigma_1^s = 0$ 和 1 来满足那些要求甚至也是可能的；例如，在中间区间的低于 $\frac{a-b}{a}$ 的部分，$\sigma_1^s = 0$；在高于 $\frac{b}{a}$ 的部分，$\sigma_1^s = 1$。

这样一个解（即 $\sigma_1^s \neq 0,1$，且由图 45，$\rho_1^s \neq 0,1$）的存在性当然意味着扑克的这一变形是严格决定的。但是，以此为基础的讨论并不给出图 46 中实际画出的那种解。——218，③

像 19.10 最后一部分中讨论的那样直接。事实上，这些“高”叫牌更多地是反“诈叫”防守措施，而不是真正的“诈叫”。由于玩家 2 的这次叫牌是这一局的结束，后一种动机的确不存在，但是，有必要借助偶尔的“高”叫牌——通过“跟了”——控制对手的“诈叫”。

对于玩家 1（图 45）来说，情况则不同。在最低地带，他必须叫“高”，并且不再做其他事情；在中间地带，叫“低”并不再做其他事情。拿一手十分弱的牌而叫“高”——而拿一手中等牌叫“低”，就其纯粹形式而言，属于进攻性的“诈叫”。在“诈叫”地带（即最低地带），δ_1^z 并非可有可无：图 48 中 $\delta_1^z - \delta_2^z > 0$，即这些条件下的任何失败的“诈叫”都会导致一时的损失。 219

19.16.2　总结：扑克的这一新的变形使我们区别了两种“诈叫”：纯粹进攻性“诈叫”，由占据开叫地位的玩家做出；防守性“诈叫”，由最后叫牌的玩家做出，对于有“诈叫”嫌疑的对手，不规律地选择“跟了”，甚至在有一手中等牌的情况下也会这么做。在扑克的最初变形中，由于两位玩家同时叫牌，开叫地位在他们之间平分了，其中包含着我们现在能够将其看作这两件事情的混合的一个过程。①

---

① 第 186 页脚注②中提到的波莱尔的分析与我们的过程有相似之处。用我们现在的术语说，波莱尔过程能够被描述如下：

无论对于纯策略来说，还是对于混合策略来说，最大最小值问题（对于玩家 1 来说是最大，对于玩家 2 来说是最小）的解总是确定的。这两者是一回事，即这一变形是严格决定的。以这种方式获得的良策非常类似于图 46 中的良策。相应地，“诈叫”的特征则不像我们的图 40 和图 45 中描述得那么清楚。见上面的类比分析。——219，①

所有这些为研究具有较长交替叫牌和争叫过程的实际扑克提供了富有启发性的见解。这一问题的确困难,但也不是不可求解,我们将在其他著作中对其进行进一步研究。

第5章　三人零和博弈

20. 准备性研究

20.1　一般观点

20.1.1　我们已经建立起二人零和博弈理论。根据 220
12.4中的描述，我们的下一个任务是建立三人零和博弈理论，这将给我们带来一个全新的视野。到目前为止，我们已经讨论过的博弈都有其自身的典型问题。我们看到，一人零和博弈能够被描述为一个最大值问题；二人零和博弈的特征是两个人之间的利益对立，不再能够被描述为一个最大值问题。就像从一人博弈到二人零和博弈的转变使问题不再是纯粹的最大值问题那样，从二人零和博弈到三人零和博弈则使问题不再是单纯的利益对立问题。

20.1.2　事实上，在一个三人零和博弈中，两位玩家之间的关系能够多种多样。在一个二人零和博弈中，一个人的得必定是另一个人的失，所以，存在着绝对的利益对

立。在一个三人零和博弈中，某一玩家的一个具体动作可能对另外两位玩家都不利，但也可能有利于其中的一个而不利于另外一个。[①] 因此，某些玩家会偶尔有共同利益，从而，可以想像，我们需要一个更精细的理论来区别这种利益一致是整体性的，还是局部性的。另一方面，由于这一博弈是零和博弈，利益对立必定存在，因此这一理论还必须对付可能出现的复杂情况。

尤其是，有可能发生，一位玩家可以在多种措施中选择其中的一个，这样，他能够调整他的行为，使自己与另外一位玩家的利益一致或对立；他也能够选择他希望与哪一位玩家建立这种一致利益，以及（有可能）在多大程度上建立这种共同利益。

221 **20.1.3** 一旦一位玩家有可能选择有共同利益的合作者，博弈就变成了选择一个联盟。可以预料，当联盟形成时，其中两位玩家之间的某种协议将是必要的。我们也可以这么说：共同利益使得合作成了需要的事情，从而有可能导致其中的两位玩家达成一致。另一方面，利益对立只不过要求已经做出这一选择的玩家独立地按照自己的利益行事。

二人零和博弈中丝毫没有合作的可能。两位玩家之间，一个不输，另一个就不可能赢，根本没有达成协议的

---

① 当然，所有这些都服从我们在二人零和博弈中已经认识到并加以解决了的那些复杂性和困难：一个具体动作是否有利于某一玩家不仅依赖于这一动作本身，还可能依赖于其他玩家做什么。然而，我们希望首先把新的困难分离出来，并且在其纯粹形式上分析它们。然后，我们再讨论它们与原来有的困难之间的关联。——220，①

基础。[1] 这是最基本的常识。如果需要一个正式的证明，这一证明就存在于我们能够完成二人零和博弈理论而从未提到过玩家之间的协议。

20.2 联盟

20.2.1 我们已经认识到，三人零和博弈有一个不同于二人零和博弈的特征。这一特征是否惟一呢？这是一个有待回答的问题。如果我们能够不引人新的概念而完成三人零和博弈理论的建立，那么，我们就能够说，它是惟一的。当我们前进到 23.1 时，情况基本上就是这样。现在，我们看到，这是这一情况中的一个主要新因素，而且我们要首先充分讨论它。

我们要集中讨论的是，在一位玩家与其他玩家的合作或对立中，他有哪些选择？也就是说，我们要分析的是结成联盟的可能性。哪两位玩家将结成联盟？哪位玩家是这一联盟的敌人？[2]

---

① 当然，在一个一般的二人博弈（即可变和博弈）中，情况就不是这样：在这种情况下，两位玩家可以通过合作生产出更大的收益。因此，一般二人博弈与三人零和博弈之间有一定的相似之处。

我们将在第 11 章，尤其是 56.2.2 中看到，其背后是一个一般关系：一般 n 人博弈密切联系着 $(n+1)$ 人零和博弈。——221，①

② 值得注意的是，当博弈中的人数达到三时，联盟首先出现在一个零和博弈之中。在一个二人博弈中，没有足够的人数：一个联盟至少吸收两位玩家，然后就找不到联盟的敌手了。不过，虽然三人博弈本身意味着联盟，人数仍太少，以至于这些联盟受到特定的约束：一个联盟只能有两个成员，而且它恰好是针对剩下的那位成员的。

如果有四位或五位玩家，那么，情况会大不相同，有可能形成若干个联盟，而且这些联盟有可能合并或相互为敌。有些这类例子将出现在 36.1.2 末尾以及 37.1.2 等；另外一个被提到的现象将出现在 8.3.2。——221，②

222 所以，我们希望构造一个三人零和博弈的例子，在这个例子中，这个方面是最为突出的和惟一有意义的事情，也是所有玩家能够想像到的惟一目标。[①]

20.2.2 这里，我们还需提到如下环境因素：一位玩家最多能够在两个联盟中做出选择，因为除了他本人之外只剩下两位玩家，他可以吸引他们中的任何一位合作来对付第三位玩家。我们将通过对三人博弈的研究弄明白这一选择是如何做出的，是否每一位玩家都有这类选择机会。然而，如果一位玩家建立联盟（无论我们最终如何解释这一操作）的可能性是惟一的，那么，我们并不清楚从什么意义上说存在一个联盟：按照规则要求，以一种惟一的方式作用于一位玩家的动作从本质上说更多地属于单方面策略，而不是合作性的联盟。当然，在当前阶段，这些分析也是相当含糊和不确定的。我们现在将其提出来，原因是这些区别将是关键。

至少在目前这一阶段，同样不确定的是，一位玩家面对的结盟机会如何联系着另一位玩家面对的结盟机会。事实上，一位玩家是否有若干选择机会也意味着另一位玩家是否有多种选择机会。

---

① 从方法论上说，这如同二人零和博弈中的“硬币配对”分析。我们在14.7.1中认识到，二人零和博弈的新的关键特征是决定哪位玩家“发现”其对手。“硬币配对”是这样一种游戏，其中“发现对手”完全主导一切，惟此是重要的事情。——222，①

21. 三人简单多数博弈

21.1　博弈描述

21.1　接下来，我们描述上面提到的例子：在一个简单的三人零和博弈中，玩家之间达成协议——即联盟——的可能性是惟一值得考虑的重要事情。

这一博弈是：

通过一个个人动作，每位玩家选择另外两位玩家之一的号码。[1] 每个人在不知道其他两位玩家的选择的情况下做出自己的选择。

此后，以如下方式进行支付：如果两位玩家相互选择
了对方的号码，那么，我们说他们结成了一个“对”
(a couple)。[2] 显然，只可能出现一个“对”，或者干脆一个 223
也没有。[3][4] 如果恰好出现一个对，那么，结成“对”的两位

---

① 玩家 1 选择 2 或 3，玩家 2 选择 1 或 3，玩家 3 选择 1 或 2。——222，②

② 我们将会看到，一个“对”的形成符合创立它的玩家的利益。因此，我们接下来关于协议和结盟的讨论将要证明的是，玩家为了“结对”而加入一个联盟。一个“对”与一个联盟之间的区别是不应该被忽视的：一个对是该博弈的规则中出现的一个形式概念；一个联盟则是属于有关这一博弈（和很多其他博弈）的理论的一个概念。——222，③

③ 也就是说，不可能同时存在两个不同的“对”。事实上，由于只有三位玩家，两个“对”必定有一位共同玩家，这位玩家选择的号码必定同时是另外两位玩家之一的号码，即这两个“对”是相同的。——223，①

④ 有可能根本不出现“对”：例如，玩家 1 选择 2，玩家 2 选择 3，玩家 3 选择 1。——223，②

玩家每人得半个单位，而（被排除在外的）第三位玩家损失一个单位。如果没有结成"对"，那么，不发生得失。[①]

读者将不难看出，这类博弈是现实中的社会过程的一个高度形式化的描述。我们将其称为（三人）简单多数博弈（simple majority game）。

21.2 博弈分析："协议"的必要性

21.2.1 让我们努力理解这一博弈中存在的情况。

首先，对于每位玩家来说，在这一博弈中，除了寻找一个伙伴——一个准备与他结成"对"的玩家之外，再也没有别的重要事情。这一博弈是如此简单，绝对消除了其他策略的可能性，以至不存在其他合理过程的余地。由于每位玩家都是在不知道其他玩家的动作的情况下做出自己的个人动作，博弈进程中不存在玩家之间的合作。希望合作的两位玩家必须在博弈开始之前，即在博弈之外达成协议。正在做出其个人动作的、通过选择同伴的号码来兑现自己的诺言的玩家必须相信，他的同伴也会这么做。如上所述，一旦我们关心的只是博弈规则，那么，我们就不再有资格判断这一信任的基础到底是什么。换句话说，有某种事情使这一协议变得"神圣"吗？也许存在着这样的博弈，像6.1和10.1中那样定义博弈规则，这些博弈本身提供了协议的达成和

① 为了保持绝对形式上的正确，这应该按照第2章第6节和第7节那样的方式安排。就像第191页脚注①中讨论的相似情况那样，我们将其留给读者。——223，③

履行机制。[1] 但是,我们无法把我们的分析建立在这些可能性的基础上,因为一个博弈不一定要提供这一机制;上面描述的简单多数博弈就肯定不提供这一机制。因此,我们只能认为协议是在博弈之外达成的。如果我们不允许它们出现,那么,我们就很难看出简单多数博弈中主导一位玩家行为的动机到底是什么。或者,换一种方式说:

我们要讨论的是,在一个给定的博弈中,参与者的理 224
性行为。关于简单多数博弈的分析,我们已经前进到了这样一个点,超越这个点,没有"协议"、"谅解"等辅助概念,我们就很难描述这样的理论。后面,我们将找机会研究,去掉这些概念要求什么样的理论结构。为此,本书中的整个理论将是必要的基础,我们的研究将沿着第 12 章,尤其是第 66 节中指出的方向继续下去。然而,我们现在还不具备这样的实力,我们的理论还没有达到允许这种"忘乎所以"的程度。因此,在下面的讨论中,我们将利用在博弈之外建立联盟的可能性。这将包括签约各方尊重契约这一假设。

21.2.2 这些协议与桥牌之类的游戏中的"惯例"有一定相似之处——然而,一个基本的差别是,桥牌中受到影响的是一个"组织"(即性格分裂为两个"人"的一个玩家),我们在这里面对的是两位玩家之间的关系。此刻,请

---

① 为一位玩家提供一个个人动作,关于这个动作,其他两位玩家中只有一位知道,而且,这个动作中(可能有条件地)包含着第一位玩家的未来政策说明;还有,指示他以后遵守这些说明,或向其保证如不遵守这些说明将会受到惩罚。——223,④

读者回头阅读一下6.4.2最后一部分和6.4.3，尤其是第53页脚注②。

21.2.3 如果我们的理论被当作同一类博弈的一长串实际博弈的统计分析来使用，而不是被当作一局孤立的实际博弈的分析来使用，那么，这暗示着一种新的解释。我们应该认为，协议和其他形式的合作是这样一长串博弈的结果。

如果一位玩家希望保存自己的记录并能够依赖其伙伴的记录，那么，我们就有可能得出一个有强制力的履约机制。然而，我们更倾向于认为，我们的理论只运用于一次博弈。不过，这些考虑毕竟是有意义的，这种情况类似于二人零和博弈混合策略分析中遇到的情况。读者应该把17.3的讨论（经适当修改）运用于当前情况。

21.3 博弈分析：联盟和对称性的作用

21.3 一旦我们承认简单多数博弈中玩家之间可以有协议，问题就简单了。这一博弈给合作的玩家一个绝对可靠的获胜机会，而且该博弈不给任何人采取任何其他理性行为的机会。这一法则是如此基本，应该是充分可信的。

再有，这一博弈关于三位玩家完全对称。这是由该博弈的规则决定的：该博弈的规则不给任何玩家提供不同于其他玩家的机会。在这些可能范围之内，玩家们具体做的
225 事情自然是另一回事。他们的行为可以是不对称的；事实上，由于协议即联盟肯定会产生，不对称将是必然的。在

这三位玩家之间，只有一个联盟形成，另一位玩家必然被留在这一联盟之外。有启发意义的是，这个博弈的规则是绝对公平（对称）的，但是玩家的行为却必然是不对称的。[①②]

因此，这一博弈的惟一有显著意义的策略特征是两位玩家结成联盟的可能性。[③] 由于该博弈的规则是完全对称的，三个可能的联盟[④]必须被认为有相同的基础。如果一个联盟得以形成，那么，博弈规则保证，结盟的两位玩家从（被排斥在联盟之外的）第三位玩家那里得到一单位收益——每人各半个单位。

这三个可能的联盟中的哪一个将会形成？这一问题

---

① 我们在 17.1.1 中看到，二人零和博弈中不存在这样的事情。在那里，如果博弈规则是对称的，每位玩家都得到相同数额（即该博弈的值是零），并且具有相同的良策。也就是说，没有理由预计他们会有不同的行为或最终结果。

当玩家多于两个时，联盟出现了，并且由此产生了玩家之间的"压榨"，造成了上述奇特情况。（在我们目前的三位玩家的情况中，"压榨"归因于每一个联盟仅由两位玩家组成，小于玩家总数，大于玩家的半数。然而，由此假设玩家个数更大情况下不存在"压榨"则是错误的。）——225，①

② 这当然是最常见的社会组织的一个基本特征。在对这些组织的批判中，这也是一个一再出现的论调，针对的主要是以"放任自由"为基础的理论上的社会秩序。这一观点是，绝对的形式上的公平——博弈规则的对称性——并不能保证参与者使用这些规则会产生公平和对称的结果。事实上，这一"无保证"是一个不完全的陈述：可以预料的是，任何详尽的理性行为理论将表明，参与者被迫以不对称的方式结成联盟。

就有关这些联盟的严格理论的发展程度而言，这一经典批判的确得到了理解。值得强调的是，这一典型"社会"现象只有在三个或更多参与者的情况下才会出现。——225，②

③ 在这个博弈中，这样一个联盟自然是相互选择对方的号码的简单协议，以结成一个"对"。这种情况是我们在 4.3.2 开头就已经预见到的。——225，③

④ 玩家 1，2；1，3；2，3 之间的联盟。——225，④

超出了我们的理论范围，至少就其目前发展水平来说是这样（见4.3.2末尾）。我们只能够说，根本没有联盟形成的情况是不合理的，但是，具体哪一个联盟形成则依赖于其他条件。

22. 更多例子

22.1 不对称分配：补偿的必要性

22.1.1 在上一节中，我们详细分析了简单多数博弈问题。接下来，我们必须逐一去掉描述这一博弈的特殊假设：为了在纯粹的和孤立的形式上考察联盟的作
226 用，关于这一博弈的一些特殊假设是必要的。现在，这个任务已经完成，我们必须改变我们的思路以适应更加一般的情况。

22.1.2 我们首先要去掉的一个特殊假设是：在简单多数博弈中，任何联盟能够从对手那里得到一单位收益，而且，博弈规则保证这一单位必须在两个同伙之间平分。下面，让我们考虑这样一个博弈，其中每一个联盟给出相同总收益，但是，博弈规则假设一个不同的分配。为简单起见，我们假设这个联盟是玩家1、2之间的联盟，其中玩家1得到的收益多一些，假设这个多出的数额是ε。所以，修改后的博弈规则是：

新博弈中的动作与21.1中描述的简单多数博弈相同。一个“对”的定义也相同。如果玩家1、2结成一个

“对”，那么，玩家 1 得到的数额是$\frac{1}{2}+\varepsilon$[①]，玩家 2 得到的数额是$\frac{1}{2}-\varepsilon$，玩家 3 损失 1 单位。如果任何其他的“对”形成（如玩家 2、3 结成“对”），那么，结成“对”的两位玩家每人得到半个单位，而被排斥在外的玩家损失一个单位。

这一博弈中会发生什么事情呢？

首先，其特征仍然对应着可能出现的三个联盟，它们对应着可能的三个“对”。表面上看，玩家 1 有一种优势，因为至少在其与玩家 2 的结“队”中得到的收益比最初的简单多数博弈中的收益多 ε。

然而，这一优势其实是一种错觉。如果玩家 1 真的坚持在其与玩家 2 的结“队”中多获得 ε，那么，这会产生如下后果：玩家 1、3 永远不会结“队”，因为从玩家 1 的角度看，1、2 结“队”更好；1、2 结“队”也不会形成，因为从玩家 2 的角度看，2、3 结“队”更好；但是，2、3 结“队”是没有任何障碍的，原因在于它能够使玩家 2、3 的联盟而形成，玩家 2、3 无需考虑玩家 1 和他的特殊愿望。因此，2 和 3 将会结“队”，而且其他的“对”都是不可能的。玩家 1 不但不能得到$\frac{1}{2}+\varepsilon$，甚至也不能得到$\frac{1}{2}$，他肯定是那位将被排斥在外的玩家，并且损失 1 个单位。

因此，玩家 1 保持其在“对”1、2 中的优越地位的努力必定给他带来灾难。他能够做的事情是采取措施使“对”

---

① 一个自然的假设是 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$。——226，①

1、2 与“对”2、3 对于玩家 2 来说有同样的吸引力。也就是说，如果他聪明的话，他将在与玩家 2 结“对”时把额外收益 ε 归还给他的同伙。请注意，他不能保留 ε 中的任何部分，即如果他试图保留一个额外的部分 ε'，[①]那么，只须用 ε' 替换 ε，上述分析就可以一字不漏地重复。[②]

227 **22.1.3** 我们也可以尝试最初的简单多数博弈的其他变形，其中每一个联盟的总值仍然是一个单位。例如，我们能够考虑这样的规则，其中玩家 1 在 1、2 结“队”和 1、3 结“队”中都得到 $\frac{1}{2}+\varepsilon$，而玩家 2 和 3 在 2、3 结“队”中平分。在这种情况下，如果玩家 1 要保有额外收益 ε 或其中的一部分，那么，玩家 2 和 3 都不会考虑与玩家 1 合作。所以，玩家 1 的任何这类企图都肯定导致 2、3 结成联盟并使自己损失一个单位。

另一种可能结果是，两位玩家在其与第三位玩家的结队中都有优势：例如，在 1、3 结队和 2、3 结队中，玩家 1 和 2 分别得到 $\frac{1}{2}+\varepsilon$，玩家 3 得到 $\frac{1}{2}-\varepsilon$；在 1、2 结队中，两位玩家各得半个单位。在这种情况下，玩家 1 和 2 结队会损失利益，玩家 3 将变成玩家 1 和 2 渴望的伙伴。预料之中的事情是，存在着与其进行合作的竞争。这必定最终导致把额外收益 ε 退还给玩家 3。只有这样才会使 1、2 结队重新具有竞争力，并恢复均衡状态。

---

① 当然有 $0<\varepsilon'<\varepsilon$。——226，②

② 导致玩家 1 的最终灾难——对 2，3 的形成——的动机是变弱了，但灾难是相同的，且与原来一样是肯定的。见第 228 页脚注①。——226，③

22.1.4 我们把有关其他变形的分析留给读者，其中，三位玩家在所有三种结队中的待遇都不相同。还有，我们不想把上述分析继续深入下去，尽管这是能够做到的，而且是回击某些反对意见所需要的。我们满足于证明我们当前的方法的某种一般性，这概括为：一位玩家在一个确定的联盟中能够得到什么，不仅取决于规则如何保证这一收益的实现，还取决于他本人和其他玩家的其他结盟机会。由于博弈规则是绝对不可违背的，这意味着，在某些条件下，盟员之间的补偿是必须的。也就是说，一位玩家不得不向其未来盟友支付一个明确的价格。具体补偿数额依赖于每位玩家所面对的选择机会。

我们的上述例子首先用于说明这些原理。这些原理得到理解之后，我们将重新回到这个题目，将其推广，并以更严格的方式进行研究。[1]

22.2 不同力量的联盟

22.2.1 按照计划，我们要把上面的分析进行推广。我们分析这样一个博弈，其中：

如果玩家1、2合作，那么，他们从玩家3那里得到的最大数额是c；如果玩家1、3合作，那么，他们能够从玩家2那里得到的最大数额是b；如果玩家2、3合作，那么，他

---

① 这就是为什么我们不必分析更多有启发意义的论点——下面将进行全面的考虑。

所有这些可能性是4.3.2和4.3.3开头就预料到的。——227，①

们从玩家1那里得到的最大数额是 a。

228 我们还没有对这一博弈的规则做出特殊假设。因此，我们没有必要描述上述数额按照什么步骤——什么样的复杂顺序——来获得。我们也不用说明这些数额如何在玩家之间进行分配，以及玩家是否能够和如何能够影响或改变这一分配等。

我们能够对这一博弈进行充分的讨论。不过，千万不要忘记，一个联盟很有可能联系着玩家之间的补偿，理由如下：

22.2.2 考虑玩家1的处境：他能够进入两个可供选择的联盟：与玩家2结盟或与玩家3结盟。我们假设他试图在各种条件下保有一个最低数额 x。在这种情况下，与玩家1结盟的玩家2得到的数额不会超过 $c-x$。类似，与玩家1结盟的玩家3得到的数额不会超过 $b-x$。现在，如果这两个上界的和——即 $(c-x)+(b-x)$——小于玩家2、3结盟能够得到的数额，那么，我们就可以有把握地说，玩家1将无法找到伙伴。[1] 玩家2和3的结盟能够得到的收益是 a。这样，我们看到：如果玩家1想在任何条件下都至少得到数额 x，那么，当 x 满足

$$(c-x)+(b-x)<a$$

时，他不可能找到结盟伙伴。

也就是说，除非

$$(c-x)+(b-x)\geqq a$$

① 当然，我们假设一个玩家对任何微小利益差异都在乎。这个假设也隐含在我们关于二人零和博弈的讨论之中。——228,①

否则，玩家 1 的想法就是不现实的和愚蠢的。

上述不等式也可以写成

$$x \leqq \frac{-a+b+c}{2}$$

我们将其重述为：

(22:1:a)　　玩家 1 无法无条件地合理要求其收益超过 $\alpha = \frac{-a+b+c}{2}$。

我们也可以就玩家 2、3 重述上面的结果，所以

(22:1:b)　　玩家 2 无法无条件地合理要求其收益超过 $\beta = \frac{a-b+c}{2}$。

(22:1:c)　　玩家 3 无法无条件地合理要求其收益超过 $\gamma = \frac{a+b-c}{2}$。

22.2.3　准则(22:1:a)—(22:1:c)只是必要条件， 229
我们可以想像这样一种情况，其中，进一步的分析能够进一步降低上界值 α, β, γ，或者对玩家所追求的目标做出进一步限制。正如下面的简单分析所表明的那样，事情并非如此。

我们可以立即验证

$$\alpha+\beta=c, \quad \alpha+\gamma=b, \quad \beta+\gamma=a。$$

换句话说：如果玩家 1、2、3 并不想得到比(22:1:a)、(22:1:b)和(22:1:c)允许的数额 α、β、γ 更多的收益，那么，任何两位结成“对”的玩家都能够得到这些数额。因此，这些要求充分得到满足。当然，只有两位玩家——结成联盟的两位玩家——能够真正得到他们的“正当权

益"。被排除在联盟之外的玩家得到的不是 α、β、γ，而是 $-a$、$-b$、$-c$。[①]

22.3 一个不等式

22.3.1 这里，一个明显的问题是：任何一位玩家 1、2、3 都能够成功进入一个联盟并分别得到 α、β、γ。如果他没有成功，那么，他得到的是 $-a$、$-b$、$-c$。只有当 α、β、γ 比相应的 $-a$、$-b$、$-c$ 大时，这才是有意义的，不然的话，一个玩家根本就不愿意进入一个联盟，他会发现进入一个联盟还不如独自行动呢。所以，问题是以下三个差是否都 $\geqq 0$：

$$p=\alpha-(-a)=\alpha+a,$$

$$q=\beta-(-b)=\beta+b,$$

$$r=\gamma-(-c)=\gamma+c。$$

很明显，它们之间是相等的。事实上：

$$p=q=r=\frac{a+b+c}{2}。$$

我们记这个数量为 $\Delta/2$，那么，我们的问题是，是否

$$\Delta=a+b+c\geqq 0。$$

这一不等式能够被证明如下：

22.3.2 玩家 1、2 的联盟能够从玩家 3 那里获得的最大数额是 c。如果玩家 1 独自行动，那么，他也能够阻止玩家 2、3 给自己带来比 $-a$ 更坏的结果，即便玩家 2、3 结

① 这些正是其他玩家联盟能够从玩家 1、2、3 手中掠夺的数额。该联盟无法掠夺更多。——229，①

盟，他们能够从玩家 1 处获得的最大数额也不过是 $+a$；也就是说，玩家 1 能够在没有外来帮助的情况下至少得到数额 $-a$。类似地，玩家 2 能够在没有外来帮助的情况下至少得到数额 $-b$。所以，即使没有成功合作，玩家 1、2 也能够得到数额 $-(a+b)$。由于在任何条件下他们合起来能 230
够得到的最大数额是 c，这意味着 $c \geqq -a-b$，即 $\Delta = a + b + c \geqq 0$。

22.3.3　这一证明暗示着如下说明：

首先：我们是基于玩家 1 进行论述。由于结果 $\Delta = a + b + c \geqq 0$ 关于三位玩家的对称性，如果我们分析玩家 2 和玩家 3 的类似处境，那么，我们会得出相同的不等式。这意味着，三位玩家的角色有着一定的对称性。

第二：$\Delta = 0$ 意味着 $c = -a-b$ 或刚好有 $\alpha = -a$，以及通过轮换三位玩家相应得到的一对方程。所以，在这种情况下，不存在联盟的理由：任何两位玩家，无论是否充分合作，能够得到数额是相同的（例如，对于玩家 1、2 来说，这一数额是 $-a-b=c$）。还有，总的来看，对于每位玩家来说，成功结盟也不比他独自行动得到的收益更多。（例如，对于玩家 1 来说，这一数额是 $\alpha = -a$。）

另一方面，如果 $\Delta > 0$，那么，每位玩家都在结盟中有确定利益。其中包含的利益对于三位玩家来说都是 $\Delta/2$。

这里，这一情形对于所有三位玩家的某些方面的对称性再次表明：$\Delta/2$ 是寻求联盟的诱因。对于所有三位玩家来说，这是相同的。

22.3.4 我们的结果能够用下表表达：

玩家		1	2	3
一局博弈的值	有联盟	α	β	γ
	没有联盟	$-a$	$-b$	$-c$

图 49

如果我们令

$$a' = -a + \frac{1}{3}\Delta = \alpha - \frac{1}{6}\Delta = \frac{-2a+b+c}{3},$$

$$b' = -b + \frac{1}{3}\Delta = \beta - \frac{1}{6}\Delta = \frac{a-2b+c}{3},$$

$$c' = -c + \frac{1}{3}\Delta = \gamma - \frac{1}{6}\Delta = \frac{a+b-2c}{3},$$

那么，我们有

$$a' + b' + c' = 0,$$

而且，我们能够把上面的表等价地表达为

(22:A) 玩家 1、2、3 分别有基本值 a'、b'、c'。
231 （这是一个可能的值，因为这些值的和是零，见上。）然而，这一博弈肯定有着形成一个联盟的倾向。结盟的两位玩家各得到一个（超过其基本值的）大小为 $\Delta/6$ 的奖励，被排除在联盟之外的玩家将损失 $-\Delta/3$。

因此，对于每位玩家来说，联盟的诱惑力是 $\Delta/2$，而且总有 $\Delta/2 \geqq 0$。

23. 一般情况

23.1 详尽讨论:非本质博弈和本质博弈

23.1.1 接下来,我们要去掉所有限制。

令 Γ 是一个完全任意的三人零和博弈。简单的分析就足以将其引入 22.2、22.3 的分析所达到的程度。我们论述如下:

如果两位玩家如 1、2 决定完全合作,暂时推迟分配问题——即这两位玩家之间的补偿问题——的解决,那么,Γ 就变成了一个二人零和博弈。在这个新的博弈中,两位玩家是:玩家 1、2 结成的联盟(它现在是一个复合玩家,由两个"自然人"组成)和玩家 3。这样,Γ 符合第 3 章的二人零和博弈理论。这一博弈的每一局有一个确定的值(我们指 17.4.2 中定义的 v')。用 c 记对于 1、2 联盟(它是新博弈的玩家之一)来说该博弈的一局的值。

类似地,我们能够假设玩家 1、3 之间的一个绝对联盟并视 Γ 为一个二人零和博弈,其两个玩家分别是 1、3 联盟和玩家 2。我们用 b 记对于 1、3 联盟来说这一新的博弈的一局的值。

最后,我们能够假设 2、3 之间的一个绝对联盟,并视 Γ 为一个二人零和博弈,其两个玩家分别是 2、3 联盟和玩家 1。我们用 a 记对于 2、3 联盟来说该博弈的一局的值。

应该理解,我们并没有假设这样的联盟一定要出现。

数量 a,b,c 只不过是算法上的定义。我们将其建立在了 17.6 的主要(数学)定理之上。(a,b,c 的明确表达式见后。)

23.1.2 显然,三人零和博弈 Γ 完全落入了 22.2、22.3 的成立范围之内:玩家 1,2、1,3 或 2,3 的一个联盟最多能够分别从被排斥的玩家 3、2、1 手中得到的收益额是 c、b、a。所以,22.2 和 22.3 的所有结果都成立,尤其是关于每一位玩家在有联盟和没有联盟时的处境描述。

23.1.3 这些结果表明,三人零和博弈分两类,分别对应着 $\Delta=0$ 和 $\Delta>0$。事实上:

$\Delta=0$:我们已经看到,在这种情况下,联盟没有出现的理由,每一位玩家结盟与否得到的收益是相同的。在这
232 种情况下,也只有在这种情况下,我们才能假设对于每一位玩家来说这一博弈的一局有惟一的值,而且这些值的和等于零。这些值正是 22.3 末尾提到的基本值 a',b',c'。在这种情况下,22.3 中的公式表明,$a'=\alpha=-a$,$b'=\beta=-b$,$c'=\gamma=-c$。在这种情况下,联盟不是本质性的。我们称这种情况下的博弈为**非本质博弈**。

$\Delta>0$:在这种情况下,正如我们在 22.3 末尾讨论的那样,建立联盟肯定是有诱惑力的。没有必要重复那里的讨论,我们只需提到,$\alpha>a'>-a$,$\beta>b'>-b$,$\gamma>c'>-c$。在这种情况下,联盟是本质性的。我们称这样一个博弈为**本质博弈**。

目前,上述分类只适用于三人零和博弈。不过,我们将在后面看到,它能够被推广到所有博弈,而且这是一个十分重要的分类。

23.2 完全公式化描述

23.2 在给出进一步的结果之前，让我们就数量 a、b、c 和 α、β、γ、a'、b'、c'、Δ 做几点纯数学说明，我们的解要用这些数量来表达。

假设有 11.2.3 的一个正规型三人零和博弈 Γ。三位玩家 1、2、3 分别选择变量 τ_1、τ_2、τ_3（其中每一位玩家都不知道其他两位玩家的选择）并分别得到数额 $H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$、$H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ 和 $H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$。由于这一博弈是一个零和博弈，故

$$H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\equiv 0。$$

这些变量的值域是：

$$\tau_1=1,2,\cdots,\beta_1,$$
$$\tau_2=1,2,\cdots,\beta_2,$$
$$\tau_3=1,2,\cdots,\beta_3。$$

在玩家 1、2 的绝对联盟与玩家 3 之间的博弈中，我们面对的情况是：

复合玩家 1,2 有变量 τ_1,τ_2；玩家 3 有变量 τ_3。前者得到数额

$$H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\equiv -H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3),$$

后者得到这一数额的负数。

复合玩家(1,2)的一个混合策略是属于 $S_{\beta_1\beta_2}$ 一个向量 $\vec{\xi}$，其分量记为 ξ_{τ_1,τ_2}。[①] 因此，$S_{\beta_1\beta_2}$ 中的向量 $\vec{\xi}$ 由下面的公

---

① 数对 τ_1,τ_2 的个数是 $\beta_1\beta_2$ 。——232,①

式描述

$$\xi_{\tau_1,\tau_2} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_1,\tau_2} \xi_{\tau_1,\tau_2} = 1。$$

233 玩家 3 的一个混合策略是 S_{β_3} 中的一个向量 $\vec{\eta}$,其分量记为 η_{τ_3}。S_{β_3} 中的向量 $\vec{\eta}$ 由下面的公式描述:

$$\eta_{\tau_3} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_3} \eta_{\tau_3} = 1。$$

从而,17.4.1 中(17:2)的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是

$$\begin{aligned} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) &\equiv \sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} \{H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\} \xi_{\tau_1,\tau_2}\eta_{\tau_3} \\ &\equiv -\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_{\tau_1,\tau_2}\eta_{\tau_3}, \end{aligned}$$

并最终有

$$c = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

在上述表达式中,玩家 1、2、3 的置换给出 b 和 a 的表达式。

我们把 α、β、γ、a'、b'、c'和 Δ 的表达式重述如下:

$$\Delta = a + b + c \text{ 必然} \geqq 0,$$

$$\alpha = \frac{-a+b+c}{2}, \quad a' = \frac{-2a+b+c}{3},$$

$$\beta = \frac{a-b+c}{2}, \quad b' = \frac{a-2b+c}{3},$$

$$\gamma = \frac{a+b-c}{2}, \quad c' = \frac{a+b-2c}{3},$$

而且,我们有

$$\Delta \geqq 0,$$

$$a' + b' + c' = 0,$$

$$\alpha = a' + \frac{\Delta}{6}, \quad \beta = b' + \frac{\Delta}{6}, \quad \gamma = c' + \frac{\Delta}{6},$$

$$-a = a' - \frac{\Delta}{3}, \quad -b = b' - \frac{\Delta}{3}, \quad -c = c' - \frac{\Delta}{3}。$$

24. 关于一个反对意见的讨论

24.1　完美信息及其意义

24.1.1　我们已经得到了三人零和博弈的一个解，其中考虑到了各种可能情况，而且为 n 人博弈研究指出了方向：分析所有可能的联盟以及这些联盟之间的竞争关系，这些关系决定着结盟的玩家之间的相互补偿。

我们已经注意到，当玩家个数 $n \geqq 4$ 时，这一问题的困难程度要比 $n=3$ 时大得多（见第 221 页脚注②）。

在向这一问题发起进攻之前，我们要暂时停下来检 234
讨一下我们的实力。在下面的讨论中，我们的重点是联盟的形成和联盟成员之间的补偿，用二人零和博弈理论确定相互对立的最终联盟的值（见 25.1.1，25.2）。但是，问题的这一方面真的如我们提议的那样具有一般性吗？

在关于三人零和博弈的讨论中，我们已经列举了一些有利于它的例证。我们以此为基础建立 n 人零和博弈理论的能力将是一个有力的证据。但是，有一个反对意见很值得考虑，它联系到有完美信息的博弈。

我们将要讨论的这一反对意见仅仅适用于上面提到的特殊类型的博弈。因此，即便它是成立的，它也不能向

我们提供另一种适用于所有博弈的理论。但是，由于我们宣称我们的观点具有一般性，我们就必须反驳所有的反对意见，哪怕是上述仅仅适用于某些特殊情况的反对意见。①

24.1.2 具有完美信息的博弈已经在第15节中得到论述。我们在那里看到，它们有着重要的特性，而且只有在扩展型——不仅仅是我们论述它们时所依赖的正规型——下进行分析，这些性质才能够被充分理解（见14.8）。

第15节的分析是从n人博弈开始的，但是，在其后面的部分中，我们不得不退缩到二人零和博弈范围之内。尤其在最后，我们发现了一个对其进行口头讨论的方法（见15.8），这一方法有如下突出特点：首先，它是值得考虑的，尽管不是无可挑剔的。第二，其中的论述不同于我们解决一般二人零和博弈时的论述。虽然它仅仅适用于这一特殊情况，却比其他论述更直接。第三，对于有着完美信息的二人零和博弈来说，它给出的结果与我们的一般理论结果相同。

你也许试图就$n≥3$的情况使用这一论述方法。事实上，对15.8.2进行粗浅的审查，我们并不能直接说明，为什么它应该被限制于$n=2$的情况（见15.8.3）。但是，这一过程并不涉及联盟或玩家之间的协议等，因此，如果它对$n=3$的情况是有用的，那么，我们目前的方法就很值得

① 换句话说：在声明一个理论的一般性时，我们必须准备给所有反对者提供证明。——234，①

怀疑了。[①] 因此，我们将证明，为什么在玩家个数是三或 235
更多时，15.8 的方法是不全面的。

为此，让我们重述刚刚提到的论述的一些典型步骤（见 15.8.2，并保留那里的符号）。

24.2　详细讨论：三个或更多个玩家之间补偿的必要性

24.2.1　假设博弈 Γ 是一个有着完美信息的博弈。令 $M_1, M_2, \cdots, M_\nu$ 是其动作，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu$ 是与这些动作联系着的选择，$\pi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu)$ 是由这些选择描述的一局博弈，$\mathcal{F}_j[\pi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu)]$ 是对于玩家 $j(j = 1, \cdots, n)$ 来说这一博弈的一局的结果。

假设动作 $M_1, \cdots, M_{\nu-1}$ 已经完成，它们的选择的结果是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1}$。让我们考虑最后一个动作和它的 σ_ν。如果这是一个机会动作，即 $k(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1}) = 0$，那么，各可能值 $\sigma_\nu = 1, 2, \cdots, \alpha_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1})$ 分别具有概率 $p_\nu(1), p_\nu(2), \cdots, p_\nu[\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1})]$。如果这是玩家

① 我们也许把解决这一问题的希望寄托于，证明对于所有具有完美信息的三人零和博弈来说，$\Delta = 0$。这会使联盟成为不必要的东西。见 23.1。

就像具有完美信息的博弈借助严格决定性避开了二人零和博弈理论的困难那样（见 15.6.1），我们将借助博弈的非本质性来避开三人零和博弈的理论困难。

然而，情况并非如此。要明白这一点，只须对简单多数博弈的规则（见 21.1）做如下修改：令玩家 1、2、3 按这一顺序做出他们的个人动作（即选择他们的 τ_1、τ_2、τ_3，见上），每一位玩家被告知上一动作的情况。不难验证，三个联盟 1，2、1，3、2，3 的值 c、b、a 与以前相同

$$c = b = a = 1, \quad \Delta = a + b + c = 3 > 0。$$

尤其考虑到 21.2，这一博弈的详细讨论是有一定意义的，不过我们不想在此深入下去。——234，②

k 的一个个人动作，即 $k(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=k=1,2,\cdots,n$，那么，玩家 k 将选择 σ_ν 使得 $J_k[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 取最大值。记这个 σ_ν 为 $\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$。因此，我们可以认为，对于玩家 $j=1,\cdots,n$ 来说，当动作 $M_1,\cdots,M_{\nu-1}$ 完成之后（且在 M_ν 之前），该博弈的值是已知的。也就是说，它只是 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 的一个函数。事实上，根据上面的分析，当 $k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=0$ 时，

$$J_j'[\pi'(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$$
$$=\sum_{\sigma_\nu=1}^{\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} p_\nu(\sigma_\nu)J_j[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)];$$

当 $k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=k=1,\cdots,n$ 时，

$$J_j'[\pi'(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$$
$$=J_j[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}),\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})],$$

其中，$\sigma_\nu=\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$ 使 $J_k[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 最大化。

所以，我们能够把 Γ 看作仅由动作 $M_1,\cdots,M_{\nu-1}$ 组成，没有动作 M_ν。

借助这一方法，我们消除了最后一个动作 M_ν。重复这一做法，我们能够类似地逐步消除 $M_{\nu-1},M_{\nu-2},\cdots,M_2,M_1$，并最终得到（对于每一玩家 $j=1,\cdots,n$ 来说）这一博弈的一个确定的值。

24.2.2 为了对这一方法进行认真评价，考虑任意两个动作，$M_{\nu-1},M_\nu$，并假设它们是玩家 1 和 2 两个不同玩家
236 的个人动作。在这种情况下，我们已经假设玩家 2 将肯定选择 σ_ν 使 $J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 最大。这给出一个 $\sigma_\nu=\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$。接下来，我们还假设了玩家 1 在选

择 $\sigma_{\nu-1}$ 时能够将其作为依据，即他也许可以安全地把 $J_1(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 替换为 $J_1[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$，并将后者最大化。但是，他能够依据这一假设吗？

首先，$\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$ 可能不是惟一地确定的；对于给定的 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}$，$J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 也许在若干个 σ_ν 值取得其最大值。在 $J_1=-J_2$ 的二人零和博弈中，这是无关紧要的，因此具有相同 J_2 值的两个 σ_ν 值也将给出相同的 J_1 值。[①] 但是，在三人零和博弈中，J_2 甚至不决定 J_1，原因在于存在着第三位玩家及其 J_3！因此，这里第一次出现了这样的事情，对于一位玩家来说无所谓的差异，对于另一位玩家可能有显著意义。在一个二人零和博弈中，这是不可能的，那里一位玩家赢得的数额恰好等于另一玩家输掉的数额。

如果两个 σ_ν 对于玩家 2 来说具有同样的重要性，而对于玩家 1 来说具有不同的重要性，那么，将会发生什么事情呢？你必定会说，他将试图引诱玩家 2 选择有利于自己的 σ_ν。他能够收买玩家 2，支出的数额等于这给他带来的差异。

承认这一点，你必定会想像着玩家 1 甚至会试图引诱玩家 2 选择一个不使 $J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 最大的 σ_ν。只要这一变化给玩家 2 造成的损失小于给玩家 1 带来的

---

① 其实，我们在 15.8.2 中根本不提 J_2：我们不谈最大化 J_2，而只谈 J_1 的最大化。甚至没有必要引人 $\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$，所有的事情都由有关 J_1 的最大值和最小值运算来说明。——236，①

收益[①],那么,玩家 1 就能够补偿玩家 2 的损失,且有可能放弃其一部分利润。

24.2.3 但是,如果玩家 1 能够向玩家 2 提供这些,那么,他也必定会考虑到玩家 3 向玩家 2 提供的类似条件。也就是说,根本无法肯定玩家 2 将选择 σ_ν 使 $J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 最大化。在两个 σ_ν 的比较中,你必须考虑玩家 2 的损失是否被玩家 1 或玩家 3 的收益充分补偿,因为这能够导致协议和补偿。也就是说,你必须分析联盟 1,2 或联盟 2,3 是否因 σ_ν 的改变而受益。

24.2.4 这使得联盟重新成了关注的焦点。较仔细的分析会把我们引向 22.2、22.3 和第 23 节的详细分析和结果。不过,我们似乎没有必要在这里详细给出这些:总
237 之,这是一种特殊情况,22.2、22.3 和第 23 节中的分析(对于三人零和博弈来说)具有绝对的一般性,其条件是允许考虑到协议和补偿,即联盟。

我们想要证明的是,当我们超越二人零和博弈时,在 15.8.3 中得到承认的 15.8.2 中的论证的缺陷变得具有破坏性,而且它恰恰导致本章开始时预见到的联盟机制等。根据上述分析,这应该是清楚的,从而我们能够回到我们最初对付三人零和博弈的方法,即声称 22.2、22.3 和第 23 节的结果的充分一般性。

---

① 即以玩家 3 的损失为代价。——236,②

第 6 章　一般理论的描述:n 人零和博弈

25. 特征函数

25.1　动机和定义

25.1.1　下面,我们讨论一般 n 人零和博弈。第 5 章中关于 $n=3$ 情况的讨论告诉我们,在我们即将建立的理论中,玩家之间结成联盟的可能情况起着重要作用。因此,用一种数学工具定量地描述这些“可能情况”是一件非常重要的事情。 238

关于二人零和博弈,我们有(一次博弈)的“值”的严格概念,而且,如果这一组玩家是所有其他玩家结成的联盟的对手,那么,我们也能够赋予这一组玩家一个“值”。下面,我们将对这些富有启发性的分析进行严格讨论。更重要的是,我们将得到一个数学概念,以这个概念为基础,我们将建立起一个一般理论,并最终证明这种尝试是成功的。

接下来，让我们给出实现上述计划的严格数学定义。

25.1.2 假设我们有一个 n 人博弈，为简单起见，n 位玩家记为 $1,2,\cdots,n$。为了方便，我们引入这些玩家所组成的集合 $I=(1,2,\cdots,n)$。在没有关于该博弈的一局博弈进程的任何猜测或假设的情况下，我们看到的是：如果我们把玩家分为两组，并把每一组看作一个绝对联盟——即我们假设每一组内部充分合作，那么，我们就构造了一个二人零和博弈。[①] 严格说：令 S 是 I 的任意给定的子集，$-S$ 是其在 I 中的补集。我们考虑一个二人零和博弈，其中 k 属于 S 的所有玩家之间充分合作，另一方面，k 属于 $-S$ 的所有玩家之间也充分合作。

如此一来，Γ 落入了第 3 章的二人零和博弈理论。这一博弈的每一局博弈都有一个明确界定的值（指 17.8.1 中的 v'）。用 $v(S)$ 记一局博弈对于 k 属于 S 的玩家结成的联盟（按我们现在的说法，该联盟是一位玩家）来说的值。

239 下面，我们给出 $v(S)$ 的数学表达式。[②]

25.1.3 假设 n 人零和博弈 Γ 有 11.2.3 的正规型。其中，每一位玩家 $k=1,2,\cdots,n$ 选择一个变量 τ_k（每一位玩家都不知道其余 $n-1$ 位玩家的选择）并得到数额

$$H_k(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)。$$

由于该博弈是一个零和博弈，故

$$(25:1)\qquad \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\equiv 0。$$

---

① 这正是 23.1.1 中我们对 $n=3$ 的情况做过的事情。24.1 开头已经预示了这一一般做法。——238，①

② 这是 23.2 的结构的重复，它只适用于 $n=3$ 这一特殊情况。——239，①

这些变量的定义域是：

$$\tau_k = 1, \cdots, \beta_k, \quad k = 1, \cdots, n。$$

在这个二人博弈中，博弈的一方是 k 属于 S 的玩家结成的一个绝对联盟（玩家 1′），另一方是 k 属于 $-S$ 的玩家结成的一个绝对联盟（玩家 2′）。我们面对的情况是：

复合玩家 1′的变量是 τ_k 的综合，其中 k 取遍 S 中的所有元素。我们有必要将这一综合看作一个变量并将其记为 τ^S。复合玩家 2′的变量是 τ_k 的综合，其中 k 取遍 $-S$ 中的所有元素。这个综合也是一个变量，我们将其记为 τ^{-S}。玩家 1′得到的数额是

$$(25:2)\qquad \overline{H}(\tau^S, \tau^{-S}) = \sum_{k\text{属于}S} H_k(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$$

$$= -\sum_{k\text{属于}-S} H_k(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n);$$[1]

玩家 2′得到上述数额的负数。

玩家 1′的一个混合策略是属于 S_β^S 的一个向量 $\vec{\xi}$[2]，我们将其分量记为 ξ_τ^S。因此，S_β^S 中的 $\vec{\xi}$ 的特征是

$$\xi_\tau^S \geqq 0, \quad \sum_{\tau^S} \xi_\tau^S = 1。$$

玩家 2′的一个混合策略是 S_β^{-S}[3]中的一个向量 $\vec{\eta}$，其

---

① 第一个表达式的 τ^S, τ^{-S} 合起来形成另外两个表达式的 $\tau_1, \cdots, \tau_n$ 的综合，因此 τ^S, τ^{-S} 决定那些 $\tau_1, \cdots, \tau_n$。

后两个表达式的相等不过是零和这一性质的重述。——239，②

② β^S 是可能的综合 τ^S 的个数，它等于 k 取遍 S 中的所有元素的所有 β_k 的乘积。——239，③

③ β^{-S} 是可能的综合 τ^{-S} 的个数，它等于 k 取遍 $-S$ 中的所有元素的所有 β_k 的乘积。——239，④

分量记为 η_τ^{-S}。因此，S_β^{-S} 中的 $\vec{\eta}$ 的特征是

$$\eta_\tau^{-S} \geqq 0, \qquad \sum_{\tau^{-S}} \eta_\tau^{-S} = 1。$$

240 所以，17.4.1 中（17:2）的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{\tau^S,\tau^{-S}} \overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})\xi_\tau^S\eta_\tau^{-S},$$

并最终有

$$\mathrm{v}(S) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\ K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\ K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

25.2 v(S)概念的讨论

25.2.1 上述函数 v(S)是对 I 的所有子集定义的，并且取实数值。因此，从 13.1.3 的意义上说，它是一个数值集合函数。我们将其称为博弈 Γ 的特征值函数。正如我们一再指出的那样，我们希望把整个 n 人零和博弈理论建立在这一函数之上。

让我们分析这一说法可能都涉及的内容。我们希望仅仅用特征函数 v(S)来确定与玩家联盟有关的所有事情：每一个联盟内部玩家之间的补偿、联盟之间的合并或斗争等。乍一看，这一计划似乎是行不通的，尤其考虑到如下两个事实：

(a) 用于定义 v(S)是一个纯粹虚构的二人博弈，仅仅通过理论上的结构联系到实际 n 人博弈，因此，v(S)所依据的是理论情况，而不严格是 n 人博弈本身。

(b) v(S)仅仅描述了一个特定的玩家联盟（具体为集合 S）能够从其对手（集合 -S）那里得到什么，而没有描述联盟的成果如何在 k 属于 S 的玩家中间分配。事实上，

这个分配直接取决于个人函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$，其中 k 属于 S，但是，v(S)则较少依赖于这些个人函数。事实上，v(S)只是由它们中的一部分以及 $\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})$ 惟一地决定的，甚至是由更少的东西决定的，因为它是以 $\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})$ 为基础的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的鞍点值(见 25.1.3 的公式)。

25.2.2 尽管如此，我们仍然希望，特征函数 v(S)能够决定一切事情，包括分配[见上面(b)]。第 5 章中关于三人零和博弈的分析表明，通过 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau)$ 进行的直接分配必然被某些"补偿"机制抵消。要使联盟得以形成，玩家之间必须做出这些相互补偿。这些"补偿"基本上取决于存在于联盟 S 的每一成员(即对于属于 S 的每一个 k)离开这一联盟并加入其他联盟 T 的可能性。(我们还必须考虑 S 中若干个成员同时离开的影响。)也就是说，v(S)在 k 属于 S 的玩家中间的分配应取决于 v(T)①而不 241
取决于 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。我们已经在第 5 章中就三人零和博弈证明了这一点。我们要建立的理论的一个主要目标是，就一般 n 人博弈证明相同的事情。

25.3 基本性质

25.3.1 在说明特征函数 v(S)在一般博弈理论中的重要性之前，我们首先把这一函数当作一个数学概念加以研究。我们知道，它是一个数值集合函数，对于 $I=(1,2,\cdots,n)$ 的所有子集 S 都有定义。下面，我们说明其基本

① 所有这些在很大程度上是 4.3.3 中关于"事实上起作用的"存在的说明。——241，①

性质：

(25:3:a) $\qquad v(\ominus)=0,$

(25:3:b) $\qquad v(-S)=-v(S),$

(25:3:c) $\qquad$ 如 $S\cap T=\ominus$，那么，$v(S\cup T)\geqq v(S)+v(T)$。

首先，我们要证明，每个博弈的特征函数 $v(S)$ 都满足 (25:3:a)—(25:3:c)。

25.3.2 最简单的证明是一个概念性的证明，能够不用数学公式加以完成。然而，由于我们在 25.1.3 中给出了 $v(S)$ 的严格数学公式，我们也许希望有一个严格的数学上证明——用运算 Max 和 Min 以及向量表达的形式化证明。所以，我们强调，我们的概念性证明严格等价于形式化的数学证明，而且它们之间的转换没有真正的困难。不过，由于概念性证明的基本思路更加清楚和简单，而形式化证明会包括一定数量的烦琐符号，我们倾向于前者。有兴趣的读者将会发现，把我们的概念性证明转换为形式化的证明是一个很好的练习。

25.3.3 (25:3:a)的证明：[1]联盟$\ominus$没有成员，故它得到的数额总是零，从而 $v(\ominus)=0$。

---

① 注意，我们把空集$\ominus$也当作一个联盟。读者应该对这一点认真思索。尽管这样做看似奇怪，这样做却是无害的，而且符合一般集合理论的精神。事实上，从技术上说，把空集从我们的考虑中去掉是一件相当麻烦的事情。

当然，这一空联盟没有动作，没有变量，没有收益，没有损失。但是，这是无关紧要的。

$\ominus$的补集，所有玩家构成的集合 I，也将被视为一个可能的联盟。从集合论的角度看，这样做也是方便的。这一联盟也有其奇特之处，因为它没有对手。虽然它有很多成员，从而有动作和变量，它却是一个零和博弈，没有什么可影响的，也没有收益和损失。不过，这也无关紧要。——241，②

(25:3:b)的证明：v(S)和v($-S$)源于同一(虚构的)二人零和博弈，其中，一方是联盟S，另一方是联盟$-S$。242
对于这两个复合玩家来说，这一博弈的一次博弈的值分别是v(S)和v($-S$)。所以，v($-S$) = -v(S)。

(25:3:c)的证明：联盟S(借助恰当的混合策略)能够从其对手那里得到的最大数额是v(S)。类似地，联盟T能够从其对手手中得到的最大数额是v(T)。因此，即便子联盟S和T未能相互合作，联盟$S\cup T$能够从其对手手中得到的数额也是v(S) + v(T)。[1] 由于任何条件下联盟$S\cup T$能够从其对手手中得到的最大数额是v($S\cup T$)，这意味着v($S\cup T$)≧v(S) + v(T)。[2]

25.4 直接的数学结果

25.4.1 在进一步深入下去之前，让我们从(25:3:a)—(25:3:c)中得出一些结论。这些结论是在如下意义上得出的，它们对满足(25:3:a)—(25:3:c)的任意数值集合函数v(S)都成立，无论它们是否是一个n人零和博弈Γ的特征函数。

(25:4)　　　　$\mathrm{v}(I)=0$。

---

① 注意，我们正使用条件$S\cap T=\ominus$。假如S和T有一个共同元素，我们就不能够把联盟$S\cup T$拆成两个子联盟S和T。——242，①

② 这一证明近乎是22.3.2中$a+b+c\geqq 0$的证明的重复。你甚至可以从如下关系中推出文明单位(25:3:c)：考虑把I分解为三个不相交的子集S，T，$-(S\cup T)$。把与之对应的三个联盟当作由Γ转变而成的一个三人零和博弈中的三个玩家。那么，v(S)，v(T)，v($S\cup T$)对应着上述$-a$，$-b$，$-c$。所以，$a+b+c\geqq 0$意味着$-\mathrm{v}(S)-\mathrm{v}(T)+\mathrm{v}(S\cup T)\geqq 0$，即$\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$。——242，②

证明：[①]由(25:3:a)，(25:3:b)，$\mathrm{v}(I)=\mathrm{v}(-\ominus)=-\mathrm{v}(\ominus)=0$。

(25:5)　　如果 $S_1,\cdots,S_p$ 是 I 的两两不相交子集，那么

$$\mathrm{v}(S_1\cup\cdots\cup S_p)\geqq\mathrm{v}(S_1)+\cdots+\mathrm{v}(S_p)。$$

证明：这是(25:3:c)的重复运用。

(25:6)　　如果 $S_1,\cdots,S_p$ 是 I 的一个分解，即它们是 I 的两两不相交子集且其和是 I，那么，

$$\mathrm{v}(S_1)+\cdots+\mathrm{v}(S_p)\leqq 0。$$

证明：我们有 $S_1\cup\cdots\cup S_p=I$，由(25:4)，$\mathrm{v}(S_1\cup\cdots\cup S_p)=0$。所以，(25:5)给出(25:6)。

25.4.2　虽然(25:4)—(25:6)是(25:3:a)—(25:3:c)的结果，但它们能够完全等价地取代(25:3:a)—(25:3:c)：

(25:A)　　惟有 $p=1,2,3$ 时，条件(25:3:a)—(25:3:c)等价于结论(25:6)；不过，当 $p=1,2$ 时，(25:6)必定有一个 = 号，当 $p=3$ 时，有一个 ≦ 号。

243　证明：$p=2$ 时，有一个 = 号的(25:6)是说 $\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(-S)=0$（我们把 S 记为 S_1，把 $-S$ 记为 S_2）；即 $\mathrm{v}(-S)=-\mathrm{v}(S)$，这正是(25:3:b)。

对于 $p=1$，有一个 = 号的(25:6)意味着 $\mathrm{v}(I)=0$（在这种情况下，S_1 必定是 I），这正是(25:4)。根据(25:3:b)，这也正是(25:3:a)。［见上面(25:4)的证明。］

$p=3$ 时，有一个 ≦ 号的(25:6)是说，$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)+$

---

① 对于源于一个博弈的一个 $\mathrm{v}(S)$，从概念上说，(25:3:a)和(25:4)都包含在第241页脚注②的说明之中了。——242，③

$v[-(S\cup T)]\leqq 0$［我们把 S,T 记为 S_1,S_2，所以 S_3 是 $-(S\cup T)$］，即

$$-v[-(S\cup T)]\geqq v(S)+v(T)。$$

由(25:3:b)，这成了 $v(S\cup T)\geqq v(S)+v(T)$，这正是(25:3:c)。

故，我们的结论完全等价于(25:3:a)—(25:3:c)的联合。

26. 用一个给定的特征函数构造一个博弈

26.1 博弈的构造

26.1.1 接下来，我们要证明 25.3.1 的逆命题：对于满足(25:3:a)—(25:3:c)的任意数值集合函数 $v(S)$ 来说，存在一个 n 人零和博弈 Γ，$v(S)$ 是 Γ 的特征函数。

为了避免混淆，我们用 $v_0(S)$ 记满足(25:3:a)—(25:3:c)的数值集合函数。我们将用它来定义一个 n 人零和博弈 Γ，并用 $v(S)$ 记 Γ 的特征函数。然后，我们必须证明 $v(S)\equiv v_0(S)$。

给定一个满足(25:3:a)—(25:3:c)的数值集合函数 $v_0(S)$。我们定义一个 n 人零和博弈 Γ 如下：[①]

每一玩家 $k=1,2,\cdots,n$ 通过一个个人动作选择 I 的一个子集 S_k，这里 I 包含着 k。每一个玩家独立于其他玩

① 从本质上来说，博弈 Γ 是 21.1 中定义的三人简单多数博弈的更一般意义上的对应物。下文中我们将给出若干脚注详细说明这一对应物。

家做出自己的选择。[①]

然后，支付按如下方式进行：

对任一给定的玩家集合 S，如果

(26:1) 对每一个属于 S 的 k，总有 $S_k = S$，

我们称 S 是一个环(ring)。[②③] 有一个共同元素的两个环

244 必定相等。[④] 换句话说：在一次博弈中形成的全部环是 I 的一个两两不相交子集系。

没有被包含在这些环之一的每一玩家自己形成一个(一元)集，称单人集。因此，在一个博弈中实际形成的所有的环和单人集是 I 的一个分解，即 I 的一个两两不相交且并集是 I 的子集系。用 $C_1, \cdots, C_p$ 记这些集合，它们的元素个数分别记为 $n_1, \cdots, n_p$。

考虑一个玩家 k，他属于集合 $C_1, \cdots, C_p$ 中的某一个，如 C_q。那么，玩家 k 得到的数额是

---

① n 元集合 I 有 2^{n-1} 个包含 k 的子集 S，记为 $t_k(S) = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$。如果我们让第 k 个玩家选择的不是 S_k，而是其指数 $t_k(S_k) = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$，那么，该博弈就已经是 11.2.3 的正规型了。显然，所有的 $\beta_k = 2^{n-1}$。——243,①

② 这里，环(团伙)是与 21.1 中的对类似的东西。第 222 页脚注③的内容仍适用。尤其是，在该博弈中诱导联盟的建立，从而影响博弈进程的规则中，环是形式上的概念。——243,②

③ 口头上说：一个环是玩家的一个集合，其中每一玩家刚好选择了这个集合。

它与 21.1 中对的定义的相似性是显然的。区别在于形式上的便利：在 21.1 中，我们为每一玩家指定他希望的那个对中的另一个元素。这里，我们期望他指出整个环。对这一区别进行进一步的分析并不困难，不过，这是不必要的。——243,③

④ 证明：令 S 和 T 是两个环，它们有一个共同元素 k。那么，根据(26:1)，$S_k = S$ 且 $S_k = T$，故 $S = T$。——243,④

$$(26:2)\qquad \frac{1}{n_q}\mathrm{v}_0(C_q)-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_r)。\text{①}$$

这就完成了博弈 Γ 的描述。接下来，我们将证明，这个 Γ 是一个 n 人零和博弈，且具有我们希望它有的特征函数 $\mathrm{v}_0(S)$。

26.1.2　零和特征的证明：考虑这些集合之一 C_q。属于它的 n_q 个玩家中的每一个得到(26:2)中的相同数额。因此，C_q 中的所有玩家得到的总额是

$$(26:3)\qquad \mathrm{v}_0(C_q)-\frac{n_q}{n}\sum_{r=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_r)。$$

为了得到全部玩家 $1,\cdots,n$ 得到的总额，我们必须把(26:3)就所有集合 C_q 加总，即就 $q=1,2,\cdots,p$ 加总。显然，这个和是

$$\sum_{q=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_q)-\sum_{r=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_r),$$

即等于零。②

证明：特征函数是 $\mathrm{v}_0(S)$：记 Γ 的特征函数为 $\mathrm{v}(S)$。(25:3:a)—(25:3:c)对 $\mathrm{v}(S)$ 成立，因为它是一个特征函数，而且根据假设它也对 $\mathrm{v}_0(S)$ 成立。

我们首先证明

$$(26:4)\qquad \mathrm{v}(S)\geqq \mathrm{v}_0(S)\qquad 对 I 的所有子集 S 成立。$$

---

① 这一博弈的进程，即选择 $S_1,\cdots,S_n$ 或第243页意义上的选择 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 决定 $C_1,\cdots,C_p$，并进而决定表达式(26:2)。当然，表达式(26:2)正是一般理论中的 $\mathscr{H}_k(t_1,\cdots,t_n)$。——244，①

② 显然，$\sum_{q=1}^{p}n_q=n$。——244，②

如果 S 是一个空集，那么，根据(25:3:a)，上式两边都等于
245 零。因此，我们可以假设 S 不是空集。在这种情况下，k 属于 S 的玩家组成的联盟能够左右其 S_k 选择确保 S 是一个环。这只需 k 属于 S 的每一玩家选择他的 $S_k = S$。无论(属于 $-S$的)其他玩家做什么，S 将因此而成为集合(环或单人集)$C_1, \cdots, C_p$ 之一，如 C_q。因此，$C_q = S$ 中的每一个 k 得到数额(26:2)；所以，整个联盟 S 得到数额(26:3)。这样，我们知道，系

$$C_1, \cdots, C_p$$

是 I 的一个分解；所以，由(25:6)得 $\sum_{r=1}^{p} \mathrm{v}_0(C_r) \leqq 0$。也就是说，表达式(26:3) $\geqq \mathrm{v}_0(C_q) = \mathrm{v}_0(S)$。① 换句话说，无论属于 $-S$ 的玩家做什么，属于联盟 S 的玩家总能够保证自己至少得到数额 $\mathrm{v}_0(S)$。这意味着 $\mathrm{v}(S) \geqq \mathrm{v}_0(S)$，即(26:4)。

接下来，我们能够证明

(26:5) $\quad \mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$。

把(26:4)运用于 $-S$。由于(25:3:b)，这意味着 $-\mathrm{v}(S) \geqq -\mathrm{v}_0(S)$，即

(26:6) $\quad \mathrm{v}(S) \leqq \mathrm{v}_0(S)$。

(26:4)，(26:6)合起来给出(26:5)。②

---

① 注意，表达式(26:3)，即联盟 S 得到的总数额并不完全取决于 S 中的玩家的选择。但是，我们得到了它的一个下界 $\mathrm{v}_0(S)$，它是由 S 中的玩家的选择决定的。——245，①

② 注意，在我们关于联盟 S 和 $-S$ 之间的这一虚拟二人博弈的良策的讨论中，我们仅仅考虑了纯策略，没有混合策略。换句话说，所有这些二人博弈都是严格决定的。

不过，对于我们正在追求的目标而言，这是无所谓的。——245，②

26.2　总结

26.2　总之：在 25.3—26.1 中，我们已经得到了所有可能的 n 人博弈 Γ 的特征函数 $v(S)$ 的数学描述。如果我们 246
在 25.2.1 中给出的猜想的确是对的，即如果我们能够把整个博弈理论建立在 $v(S)$ 所表达的联盟的这些共有性质之上，那么，我们关于 $v(S)$ 的描述就揭示了该理论的严格数学基础。从而，$v(S)$ 的描述和函数关系(25:3:a)—(25:3:c)有着基本的重要性。

因此，我们将首先对这些关系的含义和直接性质进行数学分析。我们称满足这些关系的函数为特征函数，我们甚至把这些函数本身看作特征函数而不联系到任何博弈。

27. 策略等价性：非本质博弈和本质博弈

27.1　策略等价性与简化型

27.1.1　考虑一个以 $v(S)$ 为特征函数的 n 人零和博弈。另外，给定一个由数 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 组成的系。我们构造一个新的博弈 Γ'，它与 Γ 的区别仅仅在于：Γ'与 Γ 的玩法完全相同，但是，当所有这些结束之后，玩家 k 在 Γ'中得到的数额是他在 Γ 中本来能够得到的数额加上 α_k^0。（注意，$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 是绝对常数！）因此，如果 Γ 被转换为 11.2.3 的正规型，有函数

$$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

那么，Γ'也处于正规型，具有函数 $H_k'(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\alpha_k^0$。显然，$\Gamma'$（与 Γ 同）是一个 n 人零和博弈，当且仅当

$$(27:1)\qquad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0。$$

用 $\mathrm{v}'(S)$记 Γ'的特征函数，那么，

$$(27:2)\qquad \mathrm{v}'(S)\equiv \mathrm{v}(S)+\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k^0=0。$$①

显然，Γ 和 Γ'这两个博弈的可能策略也是完全相同的。两者的惟一区别是每次博弈后的固定支付 α_k^0。而且，这些支付是绝对固定不变的。任何玩家都无法更改它们。你也可以说，每一玩家的地位因一个固定的数额而改变了，但是，可能的策略、形成联盟的动机和可能性完全不受影响。换句话说，如果两个特征函数 $\mathrm{v}(S)$和 $\mathrm{v}'(S)$通过(27:2)相互联系着②，那么，从可能有的策略的角度看，有特征函数 $\mathrm{v}(S)$的每一博弈都充分等价于有特征函数 $\mathrm{v}'(S)$的博弈，反之亦然。即 $\mathrm{v}(S)$和 $\mathrm{v}'(S)$刻画了策略上等价的两个博弈族。在这个意义上说，$\mathrm{v}(S)$和 $\mathrm{v}'(S)$本身可以被认为是等价的。

---

① 如果我们回忆一下 $v(S)$，$v'(S)$是如何借助联盟 S 定义的，这一关系的真实性就变得明显了。我们也容易借助 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$，$H_k'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$来证明(27:2)。——246，①

② 在这些条件下，(27:1)成立且不必另作假设。事实上，根据 25.4.1 中的(25:4)，$\mathrm{v}(I)=\mathrm{v}'(I)=0$，从而(27:2)给出

$$\sum_{k\text{属于}I}\alpha_k^0=0;$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0。——246，②$$

注意，这些都独立于我们在 26.2 中的猜测，根据那里的猜测，有相同 v(S) 的博弈都有相同的策略特征。

27.1.2 变换(27:2)［我们要留意(27:2)，见上］用一个策略上充分等价的集合函数 v′(S) 替换集合函数 247
v(S)，所以，我们称这一关系为*策略等价性*。

接下来，我们讨论特征函数的策略等价性这一概念的数学性质。

我们希望从每一族策略等价的特征函数中找出一个特别简单和有代表性的 $\bar{v}(S)$。我们的想法是，给定 v(S)，这个有代表性的 $\bar{v}(S)$ 应该是容易决定的，而且只有在 v(S) 和 v′(S) 的 $\bar{v}(S)$ 和 $\bar{v}'(S)$ 相等时，v(S) 和 v′(S) 才是策略等价的。另外，我们可以试图选择有代表性的 $\bar{v}(S)$，使 v(S) 的分析更加简单。

27.1.3 当我们从特征函数 v(S) 和 v′(S) 开始时，策略等价性概念能够单独建立在(27:2)之上；因而同样也能够单独建立在(27:1)之上（见第 246 页脚注②）。然而，我们计划仅仅从一个特征函数 v(S) 开始，并研究所有可能与 v(S) 策略等价的 v′(S)。这样做是为了从中选一个有代表性的 $\bar{v}(S)$。因此，问题是，我们可以使用哪一个系 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$，即对于这些系中的哪一个，特征函数 v(S) 和特征函数 v′(S) 有着相同的含义。答案是直接的，无论是根据我们已经说过的，还是通过直接验证，条件(27:1)都是充分必要条件。①

① 这里的详细讨论也许显得故弄玄虚。我们这样做只是为了弄明白，当我们从两个特征函数 v(S) 和 v′(S) 开始时，(27:1)是多余的，但当我们从一个特征函数开始时，(27:1)是必需的。——247，①

因此，为了寻找一个有代表性的 $\bar{v}(S)$，我们有 n 个有待确定的量 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$；不过，$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 满足约束条件：(27:1)。所以，我们只有 $n-1$ 个自由参数。

27.1.4 我们希望有代表性的 $\bar{v}(S)$ 满足 $n-1$ 个条件。这样，我们选择方程

(27:3) $\quad \bar{v}[(1)]=\bar{v}[(2)]=\cdots=\bar{v}[(n)]$。①

即，我们要求每个单人联盟应该有相同的值。

我们可以把(27:2)代入(27:3)，将其与(27:1)结合起来陈述，从而给出我们对 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 的所有要求。这样，我们得到：

(27:1*) $$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0,$$

(27:2*) $$v[(1)]+\alpha_1^0=v[(2)]+\alpha_2^0=\cdots=v[(n)]+\alpha_n^0。$$

不难验证，这些方程恰好借助 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 的一个系得以求解：

248 (27:4) $$\alpha_k^0=-v[(k)]+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v[(j)]。②$$

所以，我们能够说：

(27:A) 我们称一个特征函数 $\bar{v}(S)$ 是一个简化的特征函数，当且仅当它满足(27:3)。这样，

---

① 注意，这些方程的个数是 $n-1$，而不是 n。——247，②

② 证明：用 β 记(27:2*)中 n 项的联合值，那么，(27:2*)等于 $\alpha_k^0=-v[(k)]+\beta$，公式 (27:1*)变成了

$$n\beta-\sum_{k=1}^{n}v[(k)]=0;$$

即

$$\beta=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v[(k)]。——248，①$$

在策略等价中,每一个特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 恰好有一个 $\bar{\mathrm{v}}(S)$。这个 $\bar{\mathrm{v}}(S)$ 由(27:2)和(27:4)给定。我们称 $\bar{\mathrm{v}}(S)$ 是 $\mathrm{v}(S)$ 的简化型。

这正是我们要找的有代表性的简化特征函数。

27.2　不等式和数量 γ

27.2　我们考虑一个简化的特征函数 $\bar{\mathrm{v}}(S)$。我们用 $-\gamma$ 记(27:3)中 n 项连结值,即

(27:5)　$-\gamma=\bar{\mathrm{v}}[(1)]=\bar{\mathrm{v}}[(2)]=\cdots=\bar{\mathrm{v}}[(n)]$。

我们能够把(27:5)表述为

(27:5*)　对于每一个一元集 S,$\bar{\mathrm{v}}(S)=-\gamma$。

结合 25.3.1 中的(25:3:b),(27:5*)变成

(27:5**)　对每一($n-1$)一元集 S,$\bar{\mathrm{v}}(S)=\gamma$。

我们再次强调,(27:5)、(27:5*)和(27:5**)当中的任何一个,除了定义 γ 之外,仍是(27:3)的重述,即 $\bar{\mathrm{v}}(S)$ 的简化本质的描述。

接下来,把 25.4.1 中的(25:6)运用于单一元素集 $S_1=(1),\cdots,S_n=(n)$(所以,$p=n$)。那么,(27:5)给出 $-n\gamma\leqq 0$,即

(27:6)　$\gamma\geqq 0$。

然后,考虑 I 的任一子集 S。令 p 是其元素个数:$S=(k_1,\cdots,k_p)$。把 25.4.1 中的(25:5)运用于一元集 $S_1=(k_1),\cdots,S_p=(k_p)$,那么,(27:5)给出

$$\bar{\mathrm{v}}(S)\geqq -p\gamma。$$

将这一结果运用于一个有 $n-p$ 个元素的 $-S$,根据 25.3.1 中的(25:3:b),上述不等式变成 249

$$-\overline{v}(S) \geqq -(n-p)\gamma,\text{即 } \overline{v}(S) \leqq (n-p)\gamma。$$

把这两个不等式结合起来给出：

(27:7) 对于每个 p 元集 S，$-p\gamma \leqq \overline{v}(S) \leqq (n-p)\gamma$。

(27:5*)和 $\overline{v}(\ominus)=0$[即 25.3.1 中的(25:3:a)]还能够表述为：

(27:7*) 对于 $p=0,1$，(27:7)中的第一个关系是一个相等关系。

(27:5**)和 $\overline{v}(I)=0$[即 25.4.1 中的(25:4)]能够表述为：

(27:7**) 对于 $p=n-1,n$，(27:7)中的第二个关系是相等关系。

27.3 非本质性和本质性

27.3.1 在分析这些不等式时，我们最好根据(27:6)区别以下两种情况：

第一种情况：$\gamma=0$。这时，对所有的 S，(27:7)给出 $\overline{v}(S)=0$。这是一个完全无关紧要的情况，在这种情况下，该博弈明显地没有更多可能性。不存在任何联盟策略，没有斗争或竞争因素：因为不存在结盟的好处，每位玩家都独立行动。事实上，无论别人做什么，每位玩家能够得到的数额总是零。在一个联盟中，所有玩家合起来得到的数额也不会超过零。因此，对于每位玩家来说，该博弈一局的值总是零。

如果一个一般的特征函数 $v(S)$ 与这样一个 $\overline{v}(S)$ 策略等价，即如果其简化型是 $\overline{v}(S)\equiv 0$，那么，我们有相同的条件，只不过对于玩家 k 来说它们平移了 α_k^0。对于玩家 k

来说，有着这一特征函数 $v(S)$ 的一个博弈 Γ 的一局的值显然是 α_k^0：无论其他玩家做什么，他总能够独自得到这一数额。联盟也全然不可能做得更好。

如果一个博弈 Γ 的特征函数 $v(S)$ 具有这样一个简化型 $\bar{v}(S) \equiv 0$，那么，我们称这一博弈为**非本质博弈**。[①]

27.3.2　第二种情况：$\gamma > 0$。通过改变度量单位[②]，我们能够做到 $\gamma = 1$。[③] 这显然不影响该博弈中策略的显著方面，而且，在有些情况下，这样做会十分方便。不过，我们现在还不准备这么做。

在当前情况下，玩家毕竟有结盟的理由。被遗弃的玩家损失的数额是 γ[即得到 $-\gamma$，见(27:5*)或(27:7*)]，而进行合作的 $n-1$ 个玩家总共得到的数额是 γ[即他们 250
的联盟得到 γ，见(27:5**)或(27:7**)]。[④]

因此，一个恰当的联盟策略是十分重要的。

当一个博弈 Γ 的特征函数 $v(S)$ 有简化型 $\bar{v}(S) \not\equiv 0$ 时，我们称 Γ 为**本质博弈**。[⑤]

---

① 我们将在 27.4.1 末尾看到，这与 23.1.3(在三人零和博弈)中非本质一词的含义相同。——249，①

② 指货币单位。宽泛地说，它可以是效用的单位。见 2.1.1。——249，②

③ 在 $\gamma = 0$ 的第一种情况下，这本来是不可能的。——249，③

④ 这当然不是全部内容。有可能存在着值得考虑的其他联盟，其成员个数大于 1 小于 $n-1$。(如果这样的事情发生了，那么，$n-1$ 必定大于 1，即 $n \geq 4$。)这依赖于有大于 1 但小于 $n-1$ 个元素的集合 S 的 $\bar{v}(S)$。不过，只有一个完备的和详尽的博弈理论才能正确评价这些联盟的作用。

上述孤立的玩家与 $n-1$ 个玩家联盟(没有敌手的最大联盟!)之间的比较仅仅满足我们当前的目的：证明这种情况下联盟的重要性。——250，①

⑤ 见第 249 页脚注①。——250，②

27.4 各种准则和不可加效用

27.4.1 给定一个特征函数 $\mathrm{v}(S)$，我们希望其简化型 $\overline{\mathrm{v}}(S)$ 的 γ 有一个明确的表达式（见上）。

现在，$-\gamma$ 是 $\overline{\mathrm{v}}[(k)]$ 即 $\mathrm{v}[(k)]+\alpha_k^0$ 的连结值，而且，由(27:4)，这一表达式正是$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]$。① 故

(27:8) $$\gamma=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]。$$

所以，我们有

(27:B) Γ 是非本质博弈的充分必要条件是，

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]=0 \quad (即\ \gamma=0),$$

Γ 是本质博弈的充分必要条件是，

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]<0 \quad (即\ \gamma>0)。$$②

对于一个三人零和博弈，使用 23.1 的符号，我们有 $\mathrm{v}[(1)]=-a$，$\mathrm{v}[(2)]=-b$，$\mathrm{v}[(3)]=-c$，所以 $\gamma=\frac{1}{3}\Delta$。对于三人零和博弈来说，我们的非本质博弈和本质博弈概念具体为 23.1.3 中的那些概念。考虑到这些概念在两种情况下的解释，上述结果是预料之中的事情。

---

① 所以，$-\gamma$ 是第 248 页脚注①中的 β。——250，③

② 我们已经看到，由于 $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]\leq 1$ 和 $\gamma\leq 1$，情况必定是其中之一。——250，④

27.4.2 我们还能够描述其他的非本质性准则： 251

(27:C)　　博弈 Γ 是一个非本质博弈的充分必要条件是，对于某个适当的系 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$，其特征函数 v($S$)能够以如下形式给定：

$$\mathrm{v}(S) \equiv \sum_{k\text{属于}S} \alpha_k^0。$$

证明：事实上，根据(27:2)，这表示，v(S)与 $\overline{\mathrm{v}}(S) \equiv 0$ 策略等价。由于这一 $\overline{\mathrm{v}}(S)$ 是简化的，那么，它正是 v(S)的简化型，这也正是非本质性的含义。

(27:D)　　博弈 Γ 是一个非本质博弈的充分必要条件是，25.3.1 的(25:3:c)中其特征函数 v(S)总有一个等号，即

如果 $S \cap T = \ominus$，那么，$\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T)$。

证明：必要性：上述(27:C)给出的 v(S)显然具有这一性质。

充分性：将这一方程重复运用给出 25.4.1 的(25:5)中的等号，即，如果 $S_1,\cdots,S_p$ 是两两不相交的，那么，

$$\mathrm{v}(S_1 \cup \cdots \cup S_p) = \mathrm{v}(S_1) + \cdots + \mathrm{v}(S_p)。$$

考虑随意一个 S，如 $S = (k_1,\cdots,k_p)$。那么，$S_1 = (k_1),\cdots,S_p = (k_p)$给出

$$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}[(k_1)] + \cdots + \mathrm{v}[(k_p)]。$$

这样，我们有

$$\mathrm{v}(S) = \sum_{k\text{属于}S} \alpha_k^0,$$

其中，$\alpha_1^0 = \mathrm{v}[(1)],\cdots,\mathrm{v}[(n)]$，而且，由(27:C)，Γ 是非本质的。

27.4.3 准则(27:C)和(27:D)都表达了,所有联盟的值都是由组成它们的成分博弈的值相加得到的。[①] 我们必须牢记的是,值是否具有可加性在经济学文献中所起的作用。大多数情况下,值不具有一般可加性,但是,它们给理论研究带来了巨大的困难;而且,我们很难说,这些困难已经真正解决了。这里,我们应该回忆有关互补性、总值、分配诸如此类概念的讨论。我们正在进入我们的理论的相应阶段。有意义的是,
252 我们只是在无意义(非本质博弈)情况中发现了可加性,而真正有意义(本质)的博弈有着不可加的特征函数。[②]

熟悉测度论的读者会进一步注意到:可加的 v(S),即非本质博弈,恰恰是 I 的测度函数,它赋予 I 总测度值零。因此,一般特征函数 v(S) 是测度概念的一个新的推广。从更深层意义上说,这些说明联系着前面有关经济值的说明。然而,继续这个题目就走得太远了。[③]

27.5 本质博弈中的不等式

27.5.1 让我们回到不等式 27.2,尤其是(27:7)、

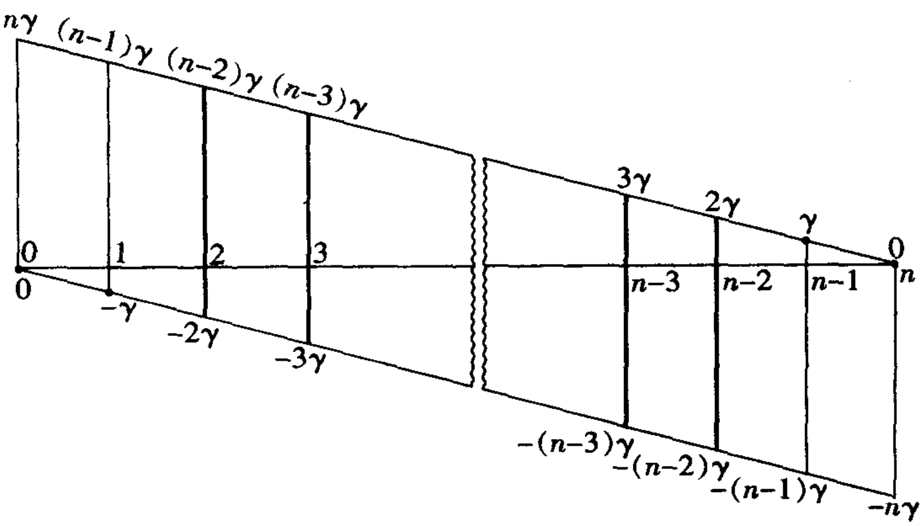
---

① 读者将会明白,我们正在使用(联盟 S 的)"值"一词指数量v(S)。——251,①

② 此刻,我们仅仅关注问题的一个特殊方面:我们正在考虑的是联盟的值,即一致行为的值,而不是经常物品和服务的值。读者将会看到,这一特殊化并不像它看似那么严重:物品和服务事实上代表着它们的交换的经济活动,即代表着一致行为。——252,①

③ 测度论还出现在另一个地方。见41.3.3。——252,②

(27:7*)和(27:7**)。对于 $\gamma=0$(非本质博弈的情况)，一切都是清楚的和不重要的。因此，我们假设 $\gamma>0$(本质博弈的情况)。



横坐标：p，S 的元素个数。$0,-\gamma,\gamma,0$ 或粗线：对于与 p 相应的 S，$\bar{v}(S)$ 的可能取值范围。

图 50

现在，对于 S 中任一元素个数 p，(27:7)、(27:7*)和(27:7**)为 $\bar{v}(S)$ 规定了可能的取值范围。对于 $p=0,1,2,\cdots,n-2,n-1,n$，该取值范围如图 50 所示。

我们能够增加如下说明：

27.5.2 第一：我们将看到，在一个本质博弈中，即当 $\gamma>0$ 时，必然 $n\geqq 3$。不然的话，公式(27:7)、(27:7*)和(27:7**)——或描述其内容的图 50——相互冲突：对于 $n=1$ 或 2，一个 $n-1$ 元集合 S 有 0 个或 1 个元素，这样，一方面，$\bar{v}(S)$ 必须是 γ，另一方面，它必须是 0 或 $-\gamma$，这是 253

不可能的。[①]

第二：当一个本质博弈中参与者个数最小，即 $n=3$ 时，公式(27:7)、(27:7*)和(27:7**)或图 50 决定一切事情：它们说明 $0,1,2,\cdots,n-1,n$ 元集 S 的 $\overline{\mathrm{v}}(S)$ 的值；而且，对于 $n=3$，所有可能的元素个数是 0,1,2,3。(见第 250 页脚注①中的说明。)这与我们在 23.1.3 中发现的事实一致，据此，仅仅存在一个本质三人零和博弈。

第三：对于更大的参与者个数，即对于 $n \geqq 4$，这一问题有新的复杂性。正如公式(27:7)、(27:7*)和(27:**)——或图 50——所表明的那样，集合 S 的元素个数 p 能够取值 $0,1,n-1,n$ 之外的值。也就是说，区间

$$2 \leqq p \leqq n-2 \tag{27:9}$$

成为可能。[②] 正是在这个区间之内，上述公式不再惟一地决定 $\overline{\mathrm{v}}(S)$ 的值。它们只为它规定如下区间

$$-p\gamma \leqq \overline{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma, \tag{27:7}$$

对于每个 p，其长度都是 $n\gamma$(见图 50)。

27.5.3 这里，我们可以问的一个问题是，是否整个区间(27:7)都是可能的？也就是说，我们是否可能通过对 $\overline{\mathrm{v}}(S)$ 做进一步的、更精心的分析来缩小它？答案是：不。对于 $n \geqq 4$ 的情况，我们有可能对于(27:9)中的每一

---

① 当然，在一个一人零和博弈中，什么事情都不发生，而对于一个二人零和博弈，我们有一种理论，其中不出现联盟。故，这些博弈的非本质性是情理之中的事情。——253，①

② 它有 $n-3$ 个元素；而且，只要 $n \geqq 4$，这个数就是正的。——253，②

个 p，定义惟一一个博弈 Γ_p，其中 $\bar{v}(S)$ 对于合适的 p 元集 S 取值 $-p\gamma$ 和 $(n-p)\gamma$。关于这个题目，我们只在这里提一下，无需深入下去。

总之，只有当 $n\geqq 4$ 的时候，博弈理论才真正枝繁叶茂。（见第 250 页脚注①，同样的思想在那里得到了说明。）

27.6　特征函数的向量运算

27.6.1　最后，我们给出一些更为正式的说明。

25.3.1 中的条件（25:3:a）—（25:3:c）描述的是特征函数 $\mathrm{v}(S)$，有着一定的向量特征：它们允许 16.2.1 中定义的类似向量运算，**纯量乘法**和**向量相加**。更确切地说：

纯量乘法：给定一个常数 $t\geqq 0$ 和一个特征函数 $\mathrm{v}(S)$，那么，$t\mathrm{v}(S)\equiv \mathrm{u}(S)$ 也是一个特征函数。向量加法加：给定两个特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$①，那么，$\mathrm{v}(S)+\mathrm{w}(S)\equiv$ 254
$\mathrm{z}(S)$ 也是一个特征函数。与 16.2 中相应定义的惟一区别在于，我们必须要求 $t\geqq 0$。②③

① 这里，所有的事情都指相同的 n 和相同的玩家集合

$$I=(1,2,\cdots,n)。$$ ——253，③

② 事实上，$t<0$ 会推翻 25.3.1 中的（25:3:c）。注意，用一个 $t<0$ 乘最初的 $\mathscr{H}_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 完全是可以的。最简单的情况是考虑用 $t=-1$ 去乘，即符号的改变。但是，$\mathscr{H}_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的符号的变化根本不对应着 $\mathrm{v}(S)$ 的符号的变化。根据常识，这应该是清楚的，因为收益和损失的颠倒会直接改变所有策略考虑。（这一颠倒及其某些后果是国际象棋玩家所熟悉的。）通过研究 25.1.3 中的定义，我们的说法可以得到证实。——254，①

③ 有着这一纯量乘法的向量空间有时被称为正向量空间。我们不必深入其系统理论。——254，②

27.6.2 上面定义的两种运算有直接的意义：

纯量乘法：如果 $t=0$，那么，$\mathrm{u}(S)\equiv 0$，即 27.3.1 中考虑的什么也不发生的博弈。所以，我们可以假设 $t>0$。在这种情况下，我们的运算等于效用单位的改变，即用一个因子 t 与之相乘。

向量加法：这对应着与 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$ 相应的博弈的叠加。你可以设想相同的玩家 $1,2,\cdots,n$ 同时独立地玩这两个博弈。也就是说，规则规定，在一个博弈中做出的动作不影响另一个博弈。在这种情况下，联合博弈的特征函数显然是两个成分博弈的特征函数之和。①

27.6.3 我们不准备深入系统研究这些运算如何博弈的策略局面。然而，对这个题目给出一些简单说明还是有益的。

首先，我们注意，纯量乘法和向量加法的结合也能够得到直接解释。因此，特征函数

$$\mathrm{z}(S)\equiv t\mathrm{v}(S)+s\mathrm{w}(S) \tag{27:10}$$

属于这样一个博弈，这一博弈是博弈 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$ 的叠加，只不过在叠加之前效用单位分别用 t、s 乘之。

如果 $s=1-t$，那么(27:10)对应着 16.2.1 中(16:A:c)意义上重心的形成。

根据 35.3.4 中的讨论（尤其见第 304 页脚注①），这一看似基本的运算甚至也能够对策略产生十分直接的

① 这在直觉上应该是显然的。借助 25.1.3，一个严格证明涉及一些烦琐的符号，但没有困难。——254，③

影响。

其次，在有些情况下，我们的运算对策略没有影响。

第一种情况是，仅仅用 $t>0$ 进行纯量乘法，只不过改变效用单位，不产生上述后果。

第二种情况且较有意义的情况是，27.1 中讨论的策 255
略等价性是一个叠加：我们通过叠加一个非本质博弈①从博弈 $v(S)$ 过渡到一个策略等价博弈 $v'(S)$。[见 27.1.1 中的(27:1)和(27:2)、27.3.1 以及 27.4.2 中有关非本质博弈的(27:C)。]我们也可以将这一点表达为：我们知道，一个非本质博弈是这样一个博弈，其中联盟不起作用。把这样一个博弈叠加到另一个博弈之上并不影响策略等价性，即它保留那一博弈的策略结构不变。

28. 群、对称性和公平

28.1 置换、置换群及其对博弈的影响

28.1.1 接下来，让我们考虑对称性的作用，或更一般地说，在一个 n 人博弈 Γ 中置换玩家 $1,2,\cdots,n$ 的后果。这当然是 17.11 中关于二人零和博弈的相应研究的扩展。

---

① 其特征函数为 $w(S)\equiv\sum_{k属于S}\alpha_k^0$，用我们上面的符号，

$$v'(S)\equiv v(S)+w(S)。\qquad ——255,①$$

这一分析从 $n=2$ 的情况下 17.11 中的主要步骤的重复开始。但是，与 $n=2$ 的情况相比，对于一般的 n，符号 $1,\cdots,n$ 可能的置换的个数要大得多，我们应该更为系统地进行这一工作。

考虑 n 个符号 $1,\cdots,n$。构造这些符号的任一**置换** P。对任一 i，P 将其变成 $i^P(=1,\cdots,n)$。所以，我们写

(28:1) $\quad P: i \to i^P$,

或以枚举的方式表达为：

(28:2) $\quad P:\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n \\ 1^P,2^P,\cdots,n^P \end{pmatrix}$。①

在这些置换中，有一些特别值得注意：

(28:A:a) **恒等置换** I_n 使每一个 $i(=1,2,\cdots,n)$ 都保持不变：

$$i \to i^{I_n} = i。$$

(28:A:b) 给定两个置换 P、Q，它们的乘积 PQ 等于首先进行置换 P，然后进行置换 Q：

$$i \to i^{PQ} = (i^P)^Q。$$

256 所有可能的置换的个数是 n 的阶乘，

$$n! = 1 \cdot \cdots \cdot n,$$

而且，它们合起来形成一个**对称置换群** $\sum_n$。$\sum_n$ 的任一满足如下两个条件的子系 G 称一个置换**群**：

---

① 对于 $n=2$，1、2 两个元素的对换是 $\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,1 \end{pmatrix}$。

恒等置换（见下）是 $I_n=\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n \\ 1,2,\cdots,n \end{pmatrix}$。——255，② (28:A:a*)　　I_n 属于 G,

(28:A:b*)　　如果 P 和 Q 属于 G,那么,PQ 属于 G。[1]

一个置换 P 把 $I=(1,\cdots,n)$ 的每一个子集变成另一个子集 S^P。[2]

28.1.2 在这些一般准备性说明之后,我们将把其中的概念运用于任一 n 人博弈 Γ。

我们对 Γ 的玩家的符号 $1,2,\cdots,n$ 进行置换 P。也就是说,用 k^P 而不用 k 记玩家 $k=1,2,\cdots,n$。这把博弈 Γ 变换为另一个博弈 Γ^P。用 Γ^P 替换 Γ 必定会带来两个方面的影响:一、影响博弈进程中每一位玩家的行为,即每位玩家选择的变量 τ_k 的指数 k;二、影响对于每位玩家来说一局博弈的结果,即表达这一结果的函数 H_k 的指数 k。[3] Γ^P 仍然处于正规型,有函数 $H_k^P(\tau_1,\cdots,\tau_n)$,$k=1,\cdots,n$。在用 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 表达 $H_k^P(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 时,我们必须牢记:Γ 中有 H_k 的玩家 k 现在是 Γ^P 中的玩家 k^P,所以他有 H_k^P。

---

① 关于重要而广泛的群论,请参阅马修森(L. C. Mathewson):有限群基本理论,波士顿,1930;伯恩塞德(W. Burnside):有限序群论,第二版,剑桥,1911;斯贝塞(A. Speiser):有限序群论,第三版,柏林,1937。

我们不需要任何有关群论的特殊结果或概念,而且上面给出的文献也只是为了方便希望深入这个题目的读者。

虽然我们不希望我们的论述与难以理解的群论纠缠一起,鉴于下述理由,我们还是要介绍群论的一些基本知识:不熟悉基本的群论,不可能真正理解对称性的本质和结构。通过正确使用术语,我们希望为有兴趣在这方面深入下去的读者做个准备。

对称性与群论之间关系的较全面阐述见外尔:对称性,《华盛顿科学研究杂志》,第 XXVIII 卷(1938),第 253 页。——256,①

② 如果 $S=(k_1,\cdots,k_p)$,那么,$S^P=(k_1^P,\cdots,k_p^P)$。——256,②

③ 见第 109 页 $n=2$ 时的类似情形。——256,③

如果我们用变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 构筑 $H_k^{P_r}$，那么，当 Γ^P 中指数是 k 的玩家选择 τ_k 时，我们表达博弈 Γ^P 的结果。这样，Γ 中的玩家 k 是 Γ^P 中的玩家 k^P，他选择 $\tau_{k'}$。所以，H_k 中的变量必定是 $\tau_{1'},\cdots,\tau_{n'}$。因此，我们有

(28:3)　　$H_k^{P_r}(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv H_k(\tau_1{}^P,\cdots,\tau_n{}^P)$。①②

257　用 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{v}^P(S)$ 分别记 Γ 和 Γ^P 的特征函数。由于形成 Γ^P 中 S^P 的玩家与形成 Γ 中 S 的玩家是相同的，对任何 S，我们有

(28:4)　　$\mathrm{v}^P(S^P)\equiv \mathrm{v}(S)$。③

28.1.3　对于某一特殊的 P，如果 Γ 与 Γ^P 相同，那么，我们就说 Γ 是就 P 而言*不变的*或*对称的*。按照(28:3)，这表达为

---

① 读者将会看到，函数 H 本身的指标 k 的上标 P 出现在等式左端。这是正确的。而且，(28:3)前面的论述是证明这一点所必需的。

正确无误地得到这一点的重要性在于这样一个事实，不然的话，我们不能够确保上标 P 和 Q 相继应用于 Γ 与把 PQ 作为一个上标运用 Γ 给出相同结果。读者将会发现，这一点的验证是一个很好的置换运算练习。

对于 $n=2$ 和 $P=\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}$，$P$ 运用于两端有相同影响，所以不必对此详加论述。见第 109 页脚注①。——256，④

② 在二人零和博弈中，$H\equiv H_1\equiv -H_2$；类似，$H^P\equiv H_1^P\equiv -H_2^P$。所以，在这种情况下$\left[\text{见上}, n=2\text{ 和 }P=\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}\right]$，(28:3)变成了 $H^P(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_2,\tau_1)$。这与 14.6 和 17.11.2 的公式一致。

不过，这一简化仅仅在二人零和博弈中是可能的；在其他情况下，我们必须依赖一般公式(28:3)。——256，⑤

③ 这一概念性证明较演算式证明清楚且简单。不过，后者能够以 25.1.3 的公式为基础，除了大量符号之外，并无太大困难。——257，①

(28:5)　　$H_k{}^P(\tau_1, \cdots, \tau_n) \equiv H_k(\tau_1{}^P, \cdots, \tau_1{}^P)$。

此种情况下，对任一 S，(28:4)变成了

(28:6)　　$\mathrm{v}(S^P) \equiv \mathrm{v}(S)$。

对任一给定的 Γ，我们能够构筑 P 的系 G_Γ，这里的 P 是这样的 P，就 P 而言 Γ 是对称的。显然，根据(28:A:a)和(28:A:b)，恒等置换 I_n 就属于 G_Γ。而且，如果 P、Q 属于 G_Γ，那么，它们的积 PQ 也属于 G_Γ。这样，根据(28:A:a*)和(28:A:b*)，G_Γ 是一个群。我们称 G_Γ 为 Γ 的*不变群*。

注意，(28:6)现在能够被表达为：

(28:7)　　$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(T)$　如果 G_Γ 中存在一个 P 使 $S^P = T$，即它把 S 变成 T。

G_Γ 的大小，即其元素个数，是 Γ 的“对称程度”的一种度量。如果(除恒等置换 I_n 之外)每一个置换 P 都改变 Γ，那么，G_Γ 仅仅由 I_n 组成，Γ 是*完全不对称的*。如果没有使 Γ 改变的置换 P，那么，G_Γ 包含所有 P，即它是对称群 $\sum_n$，Γ 是*完全对称的*。当然，在两种极端情况中间存在着很多中间情况，Γ 的对称性(或缺乏对称性)的严格结构由群 G_Γ 揭示。

28.1.4(28:7)后面的条件意味着，S 和 T 有相同个数的元素。如果 G_Γ 足够小，即如果它充分不对称，那么，反过来说则未必正确。因此，考虑允许这一逆命题成立的群 258
$G = G_\Gamma$是有意义的。也就是说，在这些群中，下述命题成立：

(28:8)　　如果 S 和 T 有相同个数的元素，那么，G 中存在一个 P 使 $S^P = T$，即它把 S 变成 T。

当 G 是对称群 $\sum_n$ 时，即对于完全对称的 Γ 的 $G = G_\Gamma = \sum_n$，条件(28:8)显然得到满足。对于一些更小的群，即不

完全对称的 Γ，它也得到满足。①

28.2 对称性和公平

28.2.1 无论如何，只要(28:8)就 $G = G_\Gamma$ 成立，那么，我们就能够从(28:7)得到如下结论：

(28:9) v(S)仅仅取决于 S 中元素的个数。

也就是说：

(28:10) $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_p$，

其中 p 是 S 中元素的个数($p = 0, 1, \cdots, n$)。

---

① 对于 $n = 2$，除了恒等置换外，$\sum_n$ 只包含一个置换($p = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,1 \end{pmatrix}$，见前面的说明)。所以，$G = \sum_n$ 任何对称性的惟一可能性。

考虑 $n \geqq 3$ 的情况。如果 G 满足(28:8)，我们称它是集合可递的。哪一个 $G \neq \sum_n$ 是集合可递的?这一问题也是一个有意思的群论问题，但我们不必对其进行研究。

对群论感兴趣的读者，我们给出如下提示：

存在 $\sum_n$ 的一个子群，它包含 $\sum_n$ 的一半元素(即$\frac{1}{2}n!$个)，被称为交错群 $\mathscr{A}_n$。这个群在群论中十分重要，且有着广泛讨论。对于 $n \geqq 3$ 的情况，不难看出，它也是集合可递的。

所以，真正的问题是：对于 $n \geqq 3$，不等于 $\sum_n$ 的集合可递群 G 和 $\mathscr{A}_n$ 真的存在吗?

不难证明，对于 $n = 3,4$，这样的群不存在。对于 $n = 4,5$，这样的群存在。(对于 $n = 5$，一个集合可递群 G 存在，它有 20 个元素，而 $\sum_5$ 和 $\mathscr{A}_5$ 分别有 120 和 60 个元素。当 $n = 6$ 时，存在一个有 120 个元素的集合可递群 G，而 $\sum_6$ 和 $\mathscr{A}_6$ 分别有 720 和 360 个元素。) 对于 $n = 7,8$，较为精妙的群论分析证明，不存在这样的群。对于 $n = 9$，问题尚未解决。对于 $n > 9$，这样的群似乎是不存在的，但这一结论并未得到证明。——258，①

考虑 25.3.1 中条件(25:3:a)—(25:3:c)，这些条件详尽描述了所有特征函数 $v(S)$。当(28:10)成立时，不难将其就 v_p 重写。它们变成：

(28:11:a)　　$v_0 = 0$,

(28:11:b)　　$v_{n-p} = -v_p$,

(28:11:c)　　$v_{p+q} \geqq v_p + v_q$,　　$p + q \leqq n$。

27.1.4 中的(27:3)显然是(28:10)[即(28:9)]的一个结果，所以，这样一个 $v(S)$ 自然是简化的，有 $\gamma = -v_1$。因此，我们尤其有 27.2 中的(27:7)、(27:7*)和(27:7**)，即图 50 中的条件。

通过一个一个与 25.4.2 中的(25:A)类似的过程，我们能够重写(28:11:c)。

令 $r = n - p - q$，那么，(28:11:b)允许我们把(28:11:c)说成： 259

(28:11:c*)　　如果 $p + q + r = n$，则 $v_p + v_q + v_r \leqq 0$。

就 p、q、r 而言，(28:11:c*)是对称的。① 所以，我们可以通过一个恰当的置换使 $p \leqq q \leqq r$。另外，当 $p = 0$（从而 $r = n - q$）时，(28:11:c*)是(28:11:a)、(28:11:b)的结果（且有 =）。因此，我们可以假设 $p \neq 0$。这样，我们只需就 $1 \leqq p \leqq q \leqq r$ 要求(28:11:c*)，从而对(28:11:c)而言，这样做同样正确。注意，当 $r = n - p - q$ 时，不等式 $q \leqq r$ 意味着 $p + 2q \leqq n$。我们将这里的分析重述之如下：

(28:12)　　只有当

---

① 无论是其结论，还是其假设！——259，①

$$1 \leqq p \leqq q, \quad p + 2q \leqq n,$$[1]

条件(28:11:c)才是充分的。

28.2.2 特征函数的性质(28:10)是对称性的一个结果,但这一性质本身也是重要的。当我们在 $n=2$ 这一最简单情况中考虑它时,这一点变得十分清楚。

事实上,对于 $n=2$,(28:10)简单意味着,17.8.1 的 v′ 等于零。[2] 用 17.11.2 的术语说,这意味着,博弈 Γ 是公平的。我们把这一概念推广:当 n 人博弈 Γ 的特征函数 v(S)满足(28:9),即当它是(28:10)的一个 v_p 时,博弈 Γ 是公平的。现在,正如 17.11.2 的情况那样,博弈的公平这一概念包含着对称性这一概念所包含的基本内容。然而,必须牢记的一点是,博弈的公平这个概念——和与之类似的完全对称的概念——未必意味着一局博弈中的所有玩家能够期望有相同的命运(即便假设他们玩得很好)。对于 $n=2$,事情的确如此,但当 $n \geqq 3$ 时,事情就不是这样了。(关于前者,见 17.11.2;关于后者,见第 225 页脚注①和②。)

28.2.3 最后,我们注意到,根据 27.2 中的(27:7)、(27:7*)和(27:7**),或图 50,当 $n=3$ 时,所有简化博弈都是对称的,从而是公平的,而当 $n \geqq 4$ 时,这一说法不成

---

① 这些不等式取代原有的 $p+q \leqq n$。它们显然是更强的要求。因为它们意味着 $3p \leqq p+2q \leqq n$ 且 $1+2q \leqq p+2q \leqq n$,我们有

$$p \leqq \frac{n}{3}, \quad q \leqq \frac{n-1}{2}。$$——259,②

② 根据定义,$\mathrm{v}' = \mathrm{v}[(1)] = -\mathrm{v}[(2)]$。对 $n=2$,与(28:10)等价的(28:9)的惟一基本结论是 $\mathrm{v}[(1)] = \mathrm{v}[(2)]$。根据上面的分析,这恰恰意味 $\mathrm{v}' = -\mathrm{v}'$,即 $\mathrm{v}'=0$。——259,③

立。（见 27.5.2 中的讨论。）接下来，如 27.1 中描述的那样，我们借助玩家 1，…，n 分别得到的固定额外支付 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 把没有约束的 n 人零和博弈变成其简化型。从而，一个三人零和博弈的不公平性，即其不对称性，完全由 α_1、α_2、α_3 描述。（见 22.3.4 的基本值 a'、b'、c'。）在一个 n 260
人零和博弈（$n \geqq 4$）中，这不再总是可能的，因为简化型未必是公平的。也就是说，在这样一个博弈中，玩家的策略地位之间也许存在着根本的差异，这一差异是无法用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表达的，即无法用固定的有限支付来表达。在第 7 章的进程中，这一点将变得十分清楚。这里，回忆一下第 250 页脚注①也是有益的。

29. 三人零和博弈的重新讨论

29.1 定性讨论

29.1.1 现在，我们已经为完成我们的主要任务做好了准备：n 人零和博弈理论原理的阐述。[1] 我们在上一节中定义的特征函数为我们完成这一任务提供了必要的工具。

我们的方法与过去一样：我们必须选择一种特殊情况作为进一步研究的基础。这种情况是一种已经研究清楚

① 一般 n 人博弈仍有待研究，不过，我们可以借助零和博弈来解决它。最重要的一步是当前这一步：向 n 人零和博弈的过渡。——260，①

的情况，而且我们充分相信它具有一般情况的特征。通过分析这一特殊情况中已经发现的（局部）解，我们试着建立支配一般情况的原理。在 4.3.3 和 25.2.2 中的讨论告诉我们，三人零和博弈正是我们这里所说的那种特殊情况。

29.1.2 所以，让我们重新思考我们据以得到三人零和博弈的解的方法。显然，本质博弈的情况将是一种有意义的情况。我们知道，我们也可以用其简化型进行分析，而且我们还可以选择 $\gamma=1$。[①] 正如 27.5.2 的第二种情况中讨论的那样，在这种情况下，特征函数是完全确定的：

$$(29:1)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{个元素时，} v(S)=\begin{cases}0\\-1\\1\\0\end{cases}\text{。}^{②}$$

我们知道，在这一博弈中，一切事情都由（两个人）结成的联盟决定，而且我们的讨论[③]给出了如下主要结论：

可能的联盟有三个，且相应地这三位玩家将以如下结论结束该博弈：

---

① 见 27.1.4 和 27.3.2。——260，②

② 用 23.1.1 的符号，这意味着 $a=b=c=1$。我们提到的具有一般性的讨论是 22.2、22.3 和 23 中的讨论。这样，在三人零和博弈中，我们在 27.1 中（关于策略等价性和简化型）的分析实际上有着这一后果：如上所述，它们把一般情况变回上述特殊情况。——260，③

③ 见 22.2.2 和 22.2.3；但这些讨论事实上只是 22.1.2 和 22.1.3 中的讨论的详述。——260，④

联盟＼玩家	1	2	3
(1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
(1,3)	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
(2,3)	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

图 51

这个“解”需要一些解释，我们尤其容易想到如下说明：① 261

29.1.3

(29:A:a)　上述三个分配对应着该博弈的所有可能策略。

(29:A:b)　其中的任何一个自身都不能被当作一个解；解由三者组成的系及其相互关系组成。

(29:A:c)　这三个分配合起来尤其具有一种“稳定性”，它只是我们迄今为止十分粗略地提到的一种稳定性。事实上，在这三个分配之外，不可能找到其他均衡状态；因此，可以预料，玩家之间的任何类型的谈判必定最终导致这三个分配之一。

(29:A:d)　同样明显的是，这一“稳定性”只是全部三个分配合在一起时所具有的一个特

① 这些说明是对 4.3.3 中的分析的继续。关于(29:A:d)，可回忆 4.6.2 后半部分的相关内容。——261，①

征。其中任何一个并不单独具有这一特征;其中每一个,就其本身而言,是能够被推翻的,假如一种新的联盟模式传播给了必要多数玩家的话。

29.1.4 关于引导我们得出图51的解的基本原理,我们寻求其严格的严格阐述,并时刻牢记上面的说明(29:A:a)—(29:A:d)。

图51应该是第260页脚注中提到的那些论述的简明总结。对图51中三个分配所具有的直觉上的“稳定性”进行更加严格的阐述,将引导我们回到我们在较早时候的定性分析中采取的观点。[①]

这些观点能够被陈述为:

(29:B:a) 如果任何其他分配方案供这三位玩家考虑,那么,它将因如下理由而遭到拒绝:充分多的玩家[②]出于自己的利益至少倾向于这个解(即图51)中的分配之一,而且这些玩家相信或被说服相信[③]这一分配是有利的。

262

(29:B:b) 然而,如果这个解中的分配之一供考虑,那么,无法找到上面所说的那样一组玩家。

下面,我们更为严格地讨论这一具有启发性的原理的优点。

---

① 这些观点遍布4.4—4.6,但它们更具体地出现在4.4.1和4.6.2中。——261,②

② 在这种情况中,当然是两个。——262,①

③ 这里“相信”指4.4.3中讨论的意思。我们下面的讨论将使其更为清楚。——262,②

29.2 定量讨论

29.2.1 假设 β_1、β_2、β_3 是玩家 1、2、3 中间的一个可能的分配方法，即

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0。$$

由于按照定义 $v[(i)](=-1)$ 是玩家 i 能够独自（无论其他玩家做什么）得到的数额，他肯定会阻止 $\beta_i<v[(i)]$ 的分配。因此，我们假设

$$\beta_i \geqq v[(i)]=-1。$$

我们可以置换玩家 1、2、3，使

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \beta_3。$$

假设 $\beta_2<\frac{1}{2}$，从而 $\beta_3<\frac{1}{2}$。所以，玩家 2、3 都会倾向于图 51 中[①]最后一种分配，其中，它们两人都得到 $\frac{1}{2}$ 这一较大数额。[②] 除此之外，他们显然能够得到这一分配的好处（无论第三位玩家做什么），因为这一分配赋予他们的数额 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 并不超过 $v[(2,3)]=1$。

---

① 由于我们为指定玩家 1、2、3 的排列，图 51 的最后一种分配实际上代表所有三者。——262，③

② 注意，这两位玩家中的每一位各自和个别地从这一变化中受益。然而，只有这两个人的总收益是不够的。例如，见图 51 中第一种分配与第二种分配的比较；作为一个整体，玩家 1、3 能够从前者向后者的变化中受益。

在这一特殊变化中，玩家 3 真正从中收益（得到 $\frac{1}{2}$ 而不是 -1），玩家 2 则无所谓（两种情况中都得到 $\frac{1}{2}$）。不过，除非玩家 1 得到进一步补偿，他是不会采取行动的。关于这一点的较详细讨论，见本节最后一部分。——262，④

另一方面,如果$\beta_2 \geqq \frac{1}{2}$,那么,$\beta_1 \geqq \frac{1}{2}$。由于$\beta_3 \geqq -1$,只有当$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$,$\beta_3 = -1$,即我们有图51中第一种分配的情况下,这才是可能的(见上面脚注③)。

263 这证明了29.1.4末尾的(29:B:a)。(29:B:b)是中间情况:图51的三种分配的每一个之中,都肯定存在一个渴望改善自身状况的玩家[①],但是,由于只存在一个这样的玩家,他无法这么做。已经结盟的两位玩家中的任何一位都不会从放弃现在的联盟并加入这个不满的玩家而得到任何好处:他们每人已经得到$\frac{1}{2}$,而且他们不可能从图51中的其他分配中得到更多。[②]

29.2.2 通过富有启发性的精心论述,这一点可以得到进一步澄清。

我们看到,那位不满的玩家会发现,没有人愿意成为他的伙伴,而且他无法激励别人与他结盟。肯定没有人愿意在未来的联盟中做出超过$\frac{1}{2}$的让步。我们能够以两种方式说明这一要约无效的理由:从纯粹形式上说,这一要约是被排除了的,因为他对应着不属于图51的一种分配;任何一位未来伙伴会认为,接受此类条件下的联

---

① 得到-1的那位玩家。——263,①

② 读者会发现,用一个(没有简化的)一般$v(S)$——即用一般的a、b、c和22.3.4中的数量——重复这里的讨论是一个很好的练习。结果是相同的。它不可能是其他结果,因为我们的策略等价和简化理论是正确的(见第260页脚注③)。——263,②

盟是不明智的[①]，这种想法背后的真正主观动机大多是担心以后的不利。一个联盟成立之前会有进一步的谈判，其中，他也许会处于特别容易受伤害的地位（见 22.1.2 和 22.1.3）。

所以，第三位玩家无法克服的困难是，对于两位可能的伙伴来说，改变是无所谓的。我们强调：在两位可能的伙伴方面，没有理由反对向图 51 中另一个分配变化，存在着的只是并不重要的某种类型的稳定性。[②]

30. 一般定义的严格形式

30.1 定义

30.1.1 我们回到一般 n 人零和博弈 Γ 的情况。令 $\mathrm{v}(S)$ 是 Γ 的特征函数。

下面，我们给出一些关键的定义。

根据前面的讨论，一个分配指 n 个数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 组成的一个集合，它们具有如下性质：

(30:1)　　$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], \quad i = 1, \cdots, n,$

(30:2)　　$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$。

---

① 不健康的或不道德的。——263，③

② 在从图 51 的一种分配向另一种分配的变化中，肯定有一位玩家反对，有一位玩家支持。所以，剩下的那位玩家利用他的影响力阻止这一变化。——263，④

264 为了方便，我们把 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 看作 16.1.2 中 n 维线性空间 L_n 中的一个向量：

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$$

对于分配 $\vec{\alpha}$，如果

(30:3) $\qquad \sum_{i\text{属于}S}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(S)$。

那么，我们称集合 S（即 $I=1,\cdots,n$ 的一个子集）是这个分配的有效集。如果存在一个集合 S 满足如下条件，那么，称分配 $\vec{\alpha}$ 占优分配 $\vec{\beta}$，记为

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta},$$

(30:4:a) S 不是一个空集，

(30:4:b) 对于 $\vec{\alpha}$ 而言，S 是有效集，

(30:4:c) 对于属于 S 的 i，$\alpha_i>\beta_i$。

如果分配集 V 有如下性质，那么，我们称 V 是一个解：

(30:5:a) V 中不存在被 V 中 $\vec{\alpha}$ 占优的 $\vec{\beta}$，

(30:5:b) 每一个不属于 V 的 $\vec{\beta}$ 都被 V 中某一个 $\vec{\alpha}$ 占优。

(30:5:a)和(30:5:b)能够被合并为一个条件：

(30:5:c) V 中的元素严格地是这样一些分配，它们不被 V 中任何元素占优。

（见第 40 页脚注①。）

30.1.2 当然，回顾上面的讨论以及 4.4.3 中的讨论，这些定义的含义是能够理解的。

首先，我们的分配对应着上述两处同样名称的较符合直觉的概念。我们所谓的有效集不过是这样一些玩家，他

们“相信或能够使其相信”获得由 $\vec{\alpha}$ 提供的损益；见 4.4.3 和 29.1.4 中的(29:B:a)。上述占优的定义中的条件(30:4:c)表达的是，所有这些玩家都认为 $\vec{\alpha}$ 优于 $\vec{\beta}$。所以，我们完全按照 4.4.1 和 29.1.4 中(29:B:a)所描述的偏好的精神定义占优。

一个解的定义与 4.5.3 和 29.1.4 中(29:B:a)和(29:B:b)给出的定义完全一致。

30.2 讨论和简要重述

30.2.1 我们已经在前面详细说明了给出这些定义的动机。不过，我们将重新强调它们的一些主要特点，尤其关于解的概念。 265

我们已经在 4.6 中看到，我们关于一个博弈的解的概念完全对应着人们常说的“行为标准”的概念。我们的定义(30:5:a)和(30:5:b)对应着条件 4.5.3 中的(4:A:a)和(4:A:b)，表达的是“内部稳定性”，这是切实可行的行为标准应该具备的条件。4.6 中对此进行了进一步的定性阐述。现在，考虑到已有的讨论的严格性，我们能够重新严格描述这些概念。下面，我们给出几点说明：[①]

30.2.2

(30:A:a)　　考虑一个解 V。对于 V 中一个分配 $\vec{\beta}$，我们尚未排除 V 之外满足 $\vec{\alpha'} \succ \vec{\beta}$ 的一

① 下面的说明(30:A:a)—(30:A:d)是 4.6.2 中的概念的较为详细和严格的表达。(30:A:e)则是 4.6.3 中的概念的重述。——265，①

个$\overrightarrow{\alpha'}$的存在性。[①] 如果这样一个$\overrightarrow{\alpha'}$存在，这些玩家的态度必定是这样的：如果解 V（即这一分配体系）被玩家 $1,\cdots,n$ 接受，那么，这必定会给它们造成这样的印象，即 V 中惟有分配 $\vec{\beta}$ 是“可靠的”分配方式。不属于 V 的满足$\overrightarrow{\alpha'}\succ\vec{\beta}$ 的$\overrightarrow{\alpha'}$，纵然是一个有效集的玩家所倾向的，也不足以吸引他们，因为它是“不可靠的”。（见我们关于三人零和博弈的详细讨论，尤其是每一玩家回避接受超过一个联盟中确定的数额的理由。见 29.2 末尾。）$\overrightarrow{\alpha'}$“不可靠”的另一个理由是，V 中存在着一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha}\succ\overrightarrow{\alpha'}$［见(30:A:b)］。从某种意义上说，所有这些论证是兜圈子，并且重新回到作为一个“行为标准”，即作为一个“可靠的”准则的 V 的选择。但是，在涉及“可靠性”的日常考虑中，此类兜圈子却是司空见惯的事情。

266 (30:A:b) 如果玩家 $1,\cdots,n$ 已经接受解 V 作为一个“行为标准”，那么，为了巩固他们对 V 的忠诚，有必要借助于 V 使 V 之外的分配变得不可信。事实上，对于 V 之外的任一分配$\overrightarrow{\alpha'}$，V 中必定存在一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha}\succ\overrightarrow{\alpha'}$。

---

① 事实上，我们将在 31.2.3 的(31:M)中看到，永远不满足$\overrightarrow{\alpha'}\succ\vec{\beta}$ 的一个分配 $\vec{\beta}$ 只能存在于非本质博弈之中。——265，②

［这是我们的假设(30:5:b)。］

(30:A:c)　　最后，V中必须没有内部矛盾，即对V中$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，永远不会$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。［这是我们的另一个假设(30:5:a)。］

(30:A:d)　　注意，如果占优即关系$\succ$具有可递性，那么，条件(30:A:b)和(30:A:c)［即我们的假设(30:5:a)和(30:5:b)］就会排除(30:A:a)中较为棘手的情况。尤其是：在(30:A:a)的情况下，$\vec{\beta}$属于V，$\vec{\alpha'}$不属于V，且$\vec{\alpha'}\succ\vec{\beta}$。由(30:A:b)，V中存在一个$\vec{\alpha}$，使得$\vec{\alpha'}\succ\vec{\alpha}$。现在，如果占优关系具有可递性，我们就能够得出$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$的结论，这与(30:A:c)矛盾，因为$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$都属于V。

(30:A:e)　　上述分析进一步明确了，只有整个V才是一个解，并且具有某种稳定性，即V的个别元素不配是一个解。(30:A:a)中强调的兜圈子也使得同一博弈可以有若干个解变得明显了。也就是说，对于同一现实情况，可能存在着多个稳定的行为标准。它们中的每一个自然是稳定的且具有自身一致性，但它们之间是相互冲突的。(见4.6.3末尾和4.7末尾。)

在后面很多讨论中，我们将看到，解的这一多样性的确是一个十分一般的现象。

30.3 饱和的概念

30.3.1 我们借机在这里插入一些更加形式化的说明。迄今为止，我们主要关注的是我们已经引入的一些概念的含义以及我们引入这些概念的动机，但是，正如上面定义的那样，解的概念却具有一些值得注意的形式特征。

下面给出的形式——逻辑——上的分析并没有直接的用途，我们不准备在此耗费大量篇幅，只是沿着前面的思路给出进一步介绍。不过，我们认为，这些说明有助于更全面理解我们的理论框架。另外，这里的方法将在51.1—51.4中全然不同的联系中有一个重要技术应用。

267 **30.3.2** 考虑元素 x、y 的一个值域（集合）D，x 与 y 之间存在着关系 $x\mathscr{R}y$。D 的这两个元素 x、y 之间的关系 $\mathscr{R}$ 成立表达为公式 $x\mathscr{R}y$。① $\mathscr{R}$ 的定义是，明确指明使 $x\mathscr{R}y$ 成立的 x、y 和使 $x\mathscr{R}y$ 不成立的 x、y。如果 $x\mathscr{R}y$ 等价于 $y\mathscr{R}x$，那么，我们称 $x\mathscr{R}y$ 是对称的。对任一关系 $\mathscr{R}$，我们总能够定义一个新的关系 $\mathscr{R}^s$，$x\mathscr{R}^s y$ 意味着 $x\mathscr{R}y$ 与 $y\mathscr{R}x$ 的合取。显然，$\mathscr{R}^s$ 是 $\mathscr{R}$ 的对称型。②

我们定义：

(30:B:a) D 的一个子集 A 是 $\mathscr{R}$ 满足的，当且仅当，对于 A 中所有 x、y，$x\mathscr{R}y$ 成立。

---

① 有时，一个更方便的表达方式是 $\mathscr{R}(x,y)$，但出于我们的需要，我们倾向于 $x\mathscr{R}y$。——267，①

② 例子：令 D 由实数组成。关系 $x=y$ 和 $x\neq y$ 是对称的。关系 $x\leqq y$，$x\geqq y$，$x<y$，$x>y$ 都不对称。前两者的对称型是 $x=y$（$x\leqq y$，$x\geqq y$ 的合取），后两者的对称型是一个谬论（$x<y$ 和 $x>y$ 的合取）。——267，②

(30:B:b)　D 的一个子集 A 与 D 的一个元素 y 是 $\mathscr{R}$ 相容的，当且仅当，对 A 中所有 x，$x\mathscr{R}y$ 成立。

这两个定义的直接结果是：

(30:C:a)　D 的一个子集 A 是 $\mathscr{R}$ 满足的，当且仅当，与 A $\mathscr{R}$ 相容的 y 组成 A 的一个子集。

接下来，我们定义：

(30:C:b)　D 的一个子集是 $\mathscr{R}$ 饱和的，当且仅当，与 A $\mathscr{R}$ 相容的 y 恰好组成集合 A。

因此，为了保证(30:C:b)成立，必须对(30:C:a)增加的条件是：

(30:D)　如果 y 不属于 A，那么，它不与 A $\mathscr{R}$ 相容，即 A 中存在一个 x，使得 $x\mathscr{R}y$ 不成立。

故，$\mathscr{R}$ 饱和可以等价地用(30:B:a)和(30:D)来定义。

30.3.3　在对这些概念做进一步研究之前，我们给出一些例子。这些例子中的一些结论的验证是容易的，留给读者。

例1：令 D 是任意一个集合，且 $x\mathscr{R}y$ 是关系 $x=y$，那么，A 的 $\mathscr{R}$ 满足性意味着，A 要么是一个空集，要么是一个一元集；A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性意味着，A 是一个一元集。

例2：令 D 是一个实数集，关系 $x\mathscr{R}y$ 是关系 $x\leq y$。[①] A 的 $\mathscr{R}$ 满足性意味着上述相同事情；[②]A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性则意味着，A 是一个一元集，由 D 的最大元素组成。因此，如果 D 没有最大元素（如所有实数组成的实数集），那么，也就

---

① 在这一关系的定义中，D 可以是任何其他集合，见65.4.1。——267，③

② 见第268页脚注①。——267，④

不存在这样的 A；如果 D 有一个最大元素（如 D 是有限集时），那么，A 是惟一的。

例 3：令 D 是平面，$x\mathscr{R}y$ 表达的是，点 x,y 有着同一高度（或纵坐标）。那么，A 的 $\mathscr{R}$ 满足性意味着，A 中所有的
268 点有同一高度，即位于平行于横轴的直线上。A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性意味着，A 恰好是一条平行于横轴的直线。

例 4：令 D 是所有分配组成的集合，$x\mathscr{R}y$ 是占优关系 $x \succ y$ 的否定。那么，我们的（30:B:a）、（30:D）与 30.1.1 中（30:5:a）、（30:5:b）的比较，或（30:C:b）与（30:5:c）的比较表明：A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性意味着，A 是一个解。

30.3.4 只需看（30:B:a）就知道，关系 $x\mathscr{R}y$ 满足与关系 $y\mathscr{R}x$ 满足以及它们的合取 $x\mathscr{R}^S y$ 满足全都是一回事。换句话说：$\mathscr{R}$ 满足与 $\mathscr{R}^S$ 饱和是一回事。

所以，满足是一个只有以对称关系为基础才能进行研究的概念。

这是由定义（30:B:a）中 x 和 y 的对称决定的。与之等价的条件（30:C:b）则没有表现出这一对称性，不过这不会推翻证明。

现在，$\mathscr{R}$ 饱和的定义（30:C:b）十分类似于（30:C:a）的结构。它也不对称。然而，（30:C:a）有一等价的对称形式（30:B:a），但（30:C:b）就不是这样。如我们所知，与（30:C:b）相应的等价形式是（30:B:a）和（30:D）的合取，而（30:D）根本不对称。即，如用 $y\mathscr{R}x$ 替换 $x\mathscr{R}y$，那么，（30:D）会发生根本变化。所以，我们看到：

（30:E） 用 $\mathscr{R}^S$ 替换 $\mathscr{R}$，$\mathscr{R}$ 满足不受影响，但 $\mathscr{R}$ 饱和可能受到影响。

条件(30:B:a)(等于$\mathscr{R}$满足)对于$\mathscr{R}$和$\mathscr{R}^S$来说是一样的。由于$\mathscr{R}^S$意味着$\mathscr{R}$,就$\mathscr{R}$而言的条件(30:D)意味着就$\mathscr{R}^S$而言的(30:D)。所以,我们看到:

(30:F)　　$\mathscr{R}$饱和意味着$\mathscr{R}^S$饱和。

上面提到的这两类饱和的确不同:我们不难找到一个集合,它是$\mathscr{R}^S$饱和,但不是$\mathscr{R}$饱和的。①

因此,有关饱和的研究就不能限于对称关系。

30.3.5 对于对称关系$\mathscr{R}$而言,饱和的本质是十分简单的。为了避免不必要的复杂性,我们暂时假设$x\mathscr{R}x$总是成立的。②

接下来,我们证明: 269

(30:G)　　令$\mathscr{R}$是对称的。那么,A的$\mathscr{R}$饱和性等价于它是$\mathscr{R}$满足的最大集合。也就是说,它等价于:A是$\mathscr{R}$满足的,但A的任何真超集不是$\mathscr{R}$满足的。

证明:$\mathscr{R}$饱和性意味着$\mathscr{R}$满足性[即条件(30:B:a)]且条件(30:D)。所以,我们只需证明:如果A是$\mathscr{R}$满足的,那么,(30:D)等价于A的所有真超集都不是$\mathscr{R}$满足的。

(30:D)的充分性:如果$B\supset A$是$\mathscr{R}$满足的,那么,B中不属于A的任意一个y违背条件(30:D)。③

---

① 例:30.3.3的例子中的前两个互为$\mathscr{R}^S$和$\mathscr{R}$(见第267页脚注②)。它们的满足是完全相同的,但它们的饱和则不同。——268,①

② 在30.3.3的例子中,这是显然的事情:$x\mathscr{R}y$是$x\succ y$的否定,而$x\succ x$永远不会成立。——268,②

③ 注意,至今为止,没有对$\mathscr{R}$做出额外限制。——269,①

(30:D)的必要性:考虑违背(30:D)的 y。那么,

$$B = A \cup (y) \supset A。$$

现在,B 是 $\mathscr{R}$ 满足的,即对于 B 中 x'、y',总有 $x'\mathscr{R}y'$。事实上,当 x'、y'都属于 A 时,这是 A 的 $\mathscr{R}$ 满足性的结果。如果 x'、y'之一属于 A,且另一个 $=y$,那么,$\mathscr{R}$ 的对称性允许我们假设 x'属于 A,$y'=y$。这样,我们的结论与(30:D)的否定一致。

如果 $\mathscr{R}$ 不对称,我们只能说:

(30:H) A 的 $\mathscr{R}$ 饱和意味着它是 $\mathscr{R}$ 满足的最大集合。

证明:根据(30:E),$\mathscr{R}$ 满足的最大集合等于 $\mathscr{R}^S$ 满足的最大集合。由于 $\mathscr{R}^S$ 是对称的,由(30:G),这等于 $\mathscr{R}^S$ 满足。而且,由(30:F),这是 $\mathscr{R}$ 饱和的一个结果。

有关一个对称的 $\mathscr{R}$ 的这一结果的含义是:从任一 $\mathscr{R}$ 满足集合开始,只要有可能,这一集合必定会越来越大,直至再增加就会失去 $\mathscr{R}$ 满足性。如此,最终得到一个 $\mathscr{R}$ 满足的最大集合,即按照(30:G)一个 $\mathscr{R}$ 饱和的集合。① 这一方法不仅保证了 $\mathscr{R}$ 饱和集的存在性,而且还允许我们推断,每一 $\mathscr{R}$ 满足集合都能够被扩大到一个 $\mathscr{R}$ 饱和集。

---

① 当 D 是一个有限集时,这一穷举过程是一个基本过程,即在有限步之后就结束了。

然而,由于所有分配组成的集合通常是无穷集,无穷集 D 的情况是重要的。当 D 是无穷集时,具有启发意义的是,上述穷举过程能够无穷进行下去的情况。被称为超限归纳法的这一过程曾经是大量集合论研究的对象。它能够以一种严格的方程进行,依赖于所谓的选择公理。

有兴趣的读者将会在第 61 页脚注①中提到的奥斯多夫的著作中找到参考文献。也可参见 E. Zermelo, Beweis dass jede menge wohlgeordnet werden kann,《数学年刊》第 59 卷(1904),第 514 页和《数学年刊》第 65 卷(1908),第 107 页。

这些问题大大远离了我们的主题,且不是我们必需的。我们进一步深入下去。——269,②

应该注意的是,一个$\mathscr{R}$饱和集的每一子集必然是$\mathscr{R}$满足的。[①] 从而,上述说法意味着,逆命题也是成立的。 270

30.3.6 如果我们能够以这种方式证明解的存在性,那将是十分方便的。猛然看来,这是行不通的:我们使用的关系$x\mathscr{R}y$——是占优关系$x\succ y$的否定,见30.3.3——显然是不对称的。因此,我们无法应用(30:G),而只能应用(30:H):最大满足性只是饱和即成为一个解的必要条件,而非充分条件。

我们能够以如下方式看这一困难的深层原因:如果能够用一对称的关系替换上面的$\mathscr{R}$,这不仅能够用于证明解的存在性,而且在这一过程中还能够把任一$\mathscr{R}$满足分配集拓展为一个解(见上)。有可能,每一个博弈都有一个解,但我们将会看到,在有些博弈中,一定的$\mathscr{R}$满足集合不是任何解的子集。[②] 从而,用某种对称的东西替换$\mathscr{R}$这个方式是行不通的,因为在大概是正确的第一个结论和肯定不正确的第二个结论的证明中,这同样是工具性的。[③]

读者会感到,这里的讨论是无用的,因为我们必须使用的关系$x\mathscr{R}y$("非$x\succ y$")事实上是不对称的。然而,从技术角度看,能够想像的是,我们可以找到具有下述性质的另一个关系$x\mathscr{S}y$:$x\mathscr{S}y$不等价于$x\mathscr{R}y$;事实上,$\mathscr{S}$是对称的,而$\mathscr{R}$不对称,但$\mathscr{S}$饱和等价于$\mathscr{R}$饱和。在这种情况

---

① 显然,性质(30:B:a)并未因过渡到一个子集而丢失。——270,①

② 见第285页脚注②。——270,②

③ 这是一个有关数学的技术方面的一个相当有用的原理。一种方法的不适用性能够从这样一个事实中推断出来,即如果它是完全行得通的,那么,它就会给出过度证明。——270,③

下，$\mathscr{R}$ 饱和集必须存在，因为它们是 $\mathscr{S}$ 饱和集，且未必是 $\mathscr{R}$ 满足集的 $\mathscr{S}$ 满足集总能够被拓展为 $\mathscr{S}$ 饱和集，即 $\mathscr{R}$ 饱和集。[①] 用这一方案对付解的存在性问题并非来自突发的灵感。事实上，我们将在后面看到以完全相同方式解决的一个类似问题（见 51.4.3）。然而，所有这些暂时地还只是希望和可能性。

30.3.7 在上一节中，我们考虑了是否每一个 $\mathscr{R}$ 满足集都是一个 $\mathscr{R}$ 饱和集的一个子集的问题。我们注意到，对于我们必须使用的关系 $x\mathscr{R}y$（"非 $x \succ y$"）来说，这一问题的回答是否定的。我们要对这一事实做一些简要说明。

如果回答是肯定的，那么，这意味着，满足（30:B:a）的任一集合都能够被拓展为一个同时满足（30:B:a）和（30:D）的集合；或用 30.1.1 的符号，满足（30:5:a）的任一分配集都能够被拓展为同时满足（30:5:a）和（30:D）的分配集。

271 用 4.6.2 的术语重述上述说法是十分重要的。如此，上述说法成了：不存在内部矛盾的任一行为标准总能够被拓展为一个稳定的行为标准——即不仅不存在内部矛盾，且能够推翻它之外的所有分配。

根据 30.3.6 中的考察，一般来说，上述说法是不正确的。这些考察有一定显著意义：要使一个行为准则集成为一个稳定的行为标准的核（子集），它必须有更多结构性

---

① 这里的要点是，$\mathscr{R}$ 饱和与 $\mathscr{S}$ 饱和集被认为是相互等价的，但 $\mathscr{R}$ 满足性与 $\mathscr{S}$ 满足性不被认为是等价的。——270，④

质，而非仅仅不存在内部矛盾。[1]

30.4 三个直接目标

30.4.1 我们已经描述了一个不受任何约束的 n 人博弈的一个解的特征，从而，我们能够系统研究这一概念的性质。结合这一研究的早期阶段，我们首先研究三种特殊情况。这三种特殊情况是：

第一：在第 4 节的讨论中，一个不复杂的解的概念是一个分配的概念，即用我们目前的术语说，一个一元集 V。在 4.4.2 中，我们尤其看到，这等于找出一个对于占优关系而言的“第一”元素。我们在第 4 节的随后部分以及 30.2 的讨论中看到，主要是我们的占优概念的非可递性阻止了这一努力，并迫使我们引入分配集作为解。

因此，下述问题的回答是有意义的：对于什么样的博弈来说，一元解 V 存在？关于这样的博弈，我们还能够说些什么？

第二：30.1.1 的假设是从我们关于本质三人零和博弈的经验中提炼出来的。因此，从目前的严格理论的视角重新考虑这一情况是有意义的。当然，我们知道——事实上，这是贯穿我们的讨论的一个指导原则，我们用第 22 和 23 节的最初方法得到的解也是我们目前的假设意义上的解。不过，明确验证这一点还是必要的。然而，关键是断定目前的假设是否给那些博弈带来其他解。（我们已经看

① 如果 30.3.6 末尾提到的关系 $\mathscr{S}$ 能够被找到，那么，这个 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{R}$ 的否定就会揭示那些行为标准是这样的核（即子集）：$\mathscr{S}$ 满足集。

见 51.4 中的类似情形，那里，相应运算得到成功运用。——271，①

到，对于同一博弈，存在多个解的情况是难以想像的。）

因此，我们将研究本质三人零和博弈的所有解，并给出令人吃惊的结果。不过，正如我们将会看到的那样，这些结果不是没有道理的。

272 **30.4.2** 事实上，这两种情况包括了 $n \leqq 3$ 的所有零和博弈。我们在27.5.2的第一点说明中看到，对于 $n=1$，2，这些博弈是非本质博弈；这与 $n=3$ 的非本质博弈和本质博弈情况结合起来包括了 $n \leqq 3$ 的所有情况。

当这一计划完成时，留给我们的是 $n \geqq 4$ 的博弈，而且，我们已经知道，一个新的困难伴随着它们产生了（见第250页脚注①和27.5.3末尾）。

30.4.3 第三：在27.1中，我们引入了策略等价的概念。看似显然的是，顾名思义，这一关系意味着：有这种关系的两个博弈有相同的策略可能性和结成联盟的动机等。现在，我们已经把解的概念建立在了一个严格的基础之上，这一具有试探性的预期需要一个严格证明。

这些问题将分别在31.2.3的(31:P)、32.2和31.3.3的(31:Q)中得到回答。

31. 结　　果

31.1 凸集、平集和占优关系准则

31.1.1 这一节将致力于证明有关解以及围绕着解的其他概念——如非本质性、本质性、占优和有效性——

的各种辅助结果。由于我们已经把这些概念建立在了严格基础之上，绝对严格地证明它们的性质不仅是应该的事情，也是可能的事情。后面的有些演绎也许有点故弄玄虚，有时，口头解释本可以取代数学证明。然而，这样一种方法仅就本节中的部分结果是可能的，把所有事情考虑进去，最好的方案是以充分的数学严格性系统地研究整个问题。

在寻找解的过程中，一些起重要作用的原理是(31:A)、(31:B)、(31:C)、(31:F)、(31:G)和(31:H)。对于特定的联盟来说，这些原理要么总是被考虑进去，要么永远不予考虑。恰当的做法是，把这些原理与其形式证明的(上述意义上的)口头解释结合起来。

另外，一些结果就其自身而言有着不同方面的重要意义。它们合起来界定我们最新得到的概念背景。30.4 中第一和第三个问题的回答将在(31:P)和(31:Q)中给出。另外一个问题将在(31:M)中解决。

31.1.2　考虑两个分配 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$。假设我们必须确定是否有 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。这等于说，我们必须决定是否存在一个具有 30.1.1 中的性质(30:4:a)—(30:4:c)集合 S。作为这些性质之一的(30:4:c)是：对于所有属于 S 的 i，

$$\alpha_i > \beta_i。$$

我们将其称为主要条件(main condition)。另外两个条件，273
(30:4:a)和(30:4:b)是起始条件(preliminary condition)。

现在，对付占优这一概念——即找出 30.1.1 意义上的解 V——的一个主要技术困难是这些起始条件的出现。我们十分希望将其简化，即找到一些准则，在这些准则之

下，它们肯定得到满足，并找到另一些准则，在这些准则下，它们肯定得不到满足。在寻找后一类准则时，不必对于所有分配 $\vec{\alpha}$ 来说它们都涉及起始条件的不满足——只要对于某些分配 $\vec{\alpha}$ 来说它们涉及起始条件的不满足也就足够了，这些 $\vec{\alpha}$ 是这样一些分配，对于某个 $\vec{\beta}$，它们满足主要条件。[见(31:A)或(31:F)的证明，其中恰恰用到了这一点。]

我们感兴趣的是这种性质的准则，这联系着判定一个给定的分配集合 V 是否是一个解的问题。也就是说，确定它是否满足 30.1.1 中的条件(30:5:a)、(30:5:b)——条件(30:5:c)。这等于要确定什么样的 $\vec{\beta}$ 被 V 的元素占优。

在上述情况下，我们最渴望的准则是不论及 $\vec{\alpha}$[①][②]，即只论及 S，总体上消除了起始条件的准则[见(31:F)和(31:H)]。但是，我们甚至考虑这样一个准则，它因论及另一个分配 $\vec{\alpha'}$ 的表现而涉及 S 和 $\vec{\alpha}$。[当然，两者都属于 V。见(31:B)。]

为了包括所有这些可能情况，我们引入下面的术语：

我们的证明将尽力确定所有分配 $\vec{\beta}$，这些分配被一个给定的分配集 V 中的元素占优。因此，我们只关注关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$（$\vec{\alpha}$ 属于 V）以及一个特定的集合 S 是否满足我们对

---

① 这里的关键是，在我们最初的 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 定义中，起始条件论及 S 和 $\vec{\alpha}$（不论及 $\vec{\beta}$）。(30:4:b)尤其如此。——273，①

② 假设中的 V 的元素，它应该占优 $\vec{\beta}$。——273，②

于这一关系而言的起始条件。如果我们知道，（由于 S 满足某一适宜的准则）S 和 $\vec{\alpha}$ 总是满足起始条件，那么，我们称 S 为**肯定必要集**。如果我们知道，（同样由于 S 满足某一适宜的准则，但也许还涉及其他事情，见上）S 和 $\vec{\alpha}$ 满足起始条件的可能性能够被忽略（因为这永远不会发生，或 274
因为其他理由。见上面的论证），我们称 S 为**肯定不必要集**。

这些考虑看似十分复杂，但它们表达着一个相当自然的技术观点。①

接下来，我们将给出特定的肯定必要性准则和肯定不必要性准则。在每一准则之后，我们将给出其内容的口头解释，希望这将使我们的技术对于读者来说更为清楚。

31.1.3　第一和第三基本准则：

(31:A)　　如果 S 中存在一个 i 使 $\alpha_i = \mathrm{v}[(i)]$，那

---

① 对于熟悉形式逻辑的读者来说，我们给出如下结果：

属性"肯定必要性"和"肯定不必要性"是逻辑性质。它们被描述为我们是否能够（借助任意方法）证明特定逻辑省略不会破坏（某种类型的）证明。具体来说：设有一个有关一个 $\vec{\beta}$ 被 V 的某一元素 $\vec{\alpha}$ 的占优的证明。假设借助集合 S（$\vec{\alpha}$ 属于 V）出现的关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 受到考虑，那么，如果我们这样对待 S 和 $\vec{\alpha}$（当它们具有问题中的属性的时候），它们总是（或永不）满足起始条件，不用实际验证这些条件，这一证明也保持成立。我们下面给出的数学证明中，这一方法将常常出现。

也许会发生这样的事情，由于两个不同准则的运用，相同集合 S 对于相同 $\vec{\alpha}$——如它们中的全部——来说既是肯定必要的，又是肯定不必要的。这只不过意味着，上面提到的两个省略都不破坏任何证明。例如，当 $\vec{\alpha}$ 不对任何分配满足主要条件时，这样的事情能够发生。［在(31:E:b)描述的情况中，(31:F)和(31:G)的结合将给出一个例子。另一个例子将在第 310 页脚注①和第 431 页脚注①中指出。］——274，①

么，对于 V 中一个给定的 $\vec{\alpha}$ 来说，S 是肯定不必要的。

解释：如果一个联盟不向每一参与者许诺大于他独自行动能够得到的数额，这一联盟永远不必考虑。

证明：如果 $\vec{\alpha}$ 就某些分配来说满足主要条件，那么，$\alpha_i > \beta_i$。由于 $\vec{\beta}$ 是一个分配，所以 $\beta_i \geqq \mathrm{v}[(i)]$。从而，$\alpha_i > \mathrm{v}[(i)]$。这与 $\alpha_i = \mathrm{v}[(i)]$ 矛盾。

(31:B) 对于 V 中一个给定 $\vec{\alpha}$ 来说，如果对于 V 中另一个 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说集合 S 是肯定必要的（且受到考虑），使得

(31:1) $\alpha'_i \geqq \alpha_i$, i 属于 S,

那么，对于 $\vec{\alpha}$ 来说，S 肯定是不必要的。

解释：对于一个给定的联盟来说，如果存在另一个由相同参与者组成的联盟向每一参与者许诺至少不小于前者许诺的数额，那么，这一联盟不必考虑。

证明：令 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ 满足主要条件：对于 S 中任意 i, $\alpha_i > \beta_i$。那么，$\overrightarrow{\alpha'}$、$\vec{\beta}$ 也满足它，由(31:1)，对于 S 中任意 i, $\alpha'_i > \beta_i$。

275 由于 S 和 $\overrightarrow{\alpha'}$ 受到考虑，说明 $\vec{\beta}$ 被 V 的一个元素占优，且没有必要考虑 S 和 $\vec{\alpha}$。

(31:C) 如果集合 $T \subseteq S$ 是肯定必要的（且受到考虑），那么，S 是肯定不必要的。

解释：如果一个联盟的一部分已经受到考虑，那么，没有必要考虑这个联盟。

证明：令 $\vec{\alpha}$（属于 V）和 $\vec{\beta}$ 就 S 来说满足主要条件，那么，就 $T \subseteq S$ 来说，它们显然更满足它。由于 T 和 $\vec{\alpha}$ 正受到

考虑，从而表明 $\vec{\beta}$ 被 V 的一个元素占优且不必考虑 S 和 $\vec{\alpha}$。

31.1.4　接下来，我们引入更多准则，而且，这些准则有着更加广泛的基础。出于这一目的，我们从下述分析开始：

对于任意的集合 $S=(k_1,\cdots,k_p)$ 运用 25.4.1 中的 (25:5)，结合 $S_1=(k_1),\cdots,S_p=(k_p)$。那么，

$$\mathrm{v}(S)\geqq \mathrm{v}[(k_1)]+\cdots+\mathrm{v}[(k_p)]。$$

即

$$(31:2)\qquad \mathrm{v}(S)\geqq\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)]。$$

(31:2)的左边大于其右边的部分是联盟 S 形成（对全体参与者而言）的总潜在利益。我们称此为 S 的凸性。如果这一利益等于零，即如果

$$(31:3)\qquad \mathrm{v}(S)=\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)],$$

那么，我们称 S 是一个平集。

我们有如下直接结果：

(31:D)　　下列集合总是平的：

(31:D:a)　　空集；

(31:D:b)　　每个一元集；

(31:D:c)　　一个平集的每一个子集。

(31:E)　　下述每一种说法都等价于博弈的非本质性：

(31:E:a)　　$I=(1,\cdots,n)$ 是平的；

(31:E:b)　　存在一个 S，使得 S 和 $-S$ 都是平集；

(31:E:c)　　每个 S 都是平集。

证明：(31:D:a)和(31:D:b)的证明：对于这些集合，(31:3)

显然成立。

276 (31:D:c)的证明:假设 $S\subseteq T$,T 是平的。令 $R=T-S$,那么,由(31:2),

(31:4) $$\mathrm{v}(S)\geqq\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)],$$

(31:5) $$\mathrm{v}(R)\geqq\sum_{k\text{属于}R}\mathrm{v}[(k)]。$$

由于 T 是平的,由(30:3),我们有

(31:6) $$\mathrm{v}(T)=\sum_{k\text{属于}T}\mathrm{v}[(k)]。$$

因为 $S\cap R=\ominus$,$S\cup R=T$,故

$$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(R)\leqq\mathrm{v}(T),$$

$$\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)]+\sum_{k\text{属于}R}\mathrm{v}[(k)]=\sum_{k\text{属于}T}\mathrm{v}[(k)]。$$

从而,(31:6)意味着

(31:7) $$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(R)\leqq\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)]+\sum_{k\text{属于}R}\mathrm{v}[(k)]。$$

比较(31:4)、(31:5)和(31:7)表明,它们都必须是等式。但(31:4)中的等号恰恰说明 S 是平的。

(31:E:a)的证明:这一说法与 27.4.1 中的(27:B)一致;

(31:E:c)的证明:这一说法与 27.4.2 中的(27:C)一致;

(31:E:b)的证明:对于一个非本质博弈来说,根据(31:E:c),对于任何 S 这一说法都是正确的。相反,如果至少就某一个 S 来说这是正确的,那么,

$$\mathrm{v}(S)=\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)],\mathrm{v}(-S)=\sum_{k\text{不属于}S}\mathrm{v}[(k)],$$

由[用 25.3.1 中的(25:3:b)]得

$$0=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)],$$

即，根据(31:E:A)或根据 27.4.1 的(27:B)，该博弈是非本质博弈。

31.1.5 接下来，我们要证明的是

(31:F)　　如果 S 是平的，那么，它也是肯定不必要的。

解释：如果一个博弈不允许一个联盟中的所有成员取得超过他们各自独立行动能够得到的数额的总利益，那么，这个联盟不必受到考虑。[①]

证明：如果借助于这个 S 有 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，那么，我们有：必然 $S\neq\ominus$。对于 S 中所有 i，$\alpha_i>\beta_i$，且 $\beta_i\geqq\mathrm{v}[(i)]$，所以，$\alpha_i>\mathrm{v}[(i)]$。故，$\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i>\sum_{i\text{属于}S}\mathrm{v}[(i)]$。因为 S 是平的，这意味着 $\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i>\mathrm{v}(S)$。但是，$S$ 必定是有效的，$\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i\leqq\mathrm{v}(S)$，这是一个矛盾。 277

(31:G)　　如果 $-S$ 是平的且 $S\neq\ominus$，那么，S 是肯定必要集。

解释：如果一个联盟（不是空的且）是(31:F)中描述的那个联盟的对手，那么，该联盟必须受到考虑。

证明：对于所有分配 $\vec{\alpha}$ 来说，起始条件都得到了满足。(30:4:a)的证明：$S\neq\ominus$是假设中的事情。

---

① 注意，这联系到(31:A)，但并不等同于它！事实上：(31:A)涉及 α_i，即涉及给予每位参与者的许诺。(31:F)涉及 $\mathrm{v}(S)$（它决定着 S 是否是平集），即涉及对于所有参与者来说该博弈的可能结果。但是，两个准则都将这些与 $\mathrm{v}[(i)]$联系起来，即与每位玩家独自行动能够得到的数额联系着。——276，①

(30:4:b)的证明:由于总有 $\alpha_i \geqq v[(i)]$,所以 $\sum_{i不属于S} \alpha_i \geqq \sum_{i不属于S} v[(i)]$。因为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$,上述不等式的左边等于 $-\sum_{i属于S} \alpha_i$。由于 $-S$ 是平的,右边等于 $v(-S)$,即[应用25.3.1中的(25:3:b)]等于 $-v(S)$。所以,$-\sum_{i属于S} \alpha_i \geqq -v(S)$,$\sum_{i属于S} \alpha_i \leqq v(S)$,即 S 是有效的。

通过特殊化,我们从(31:F)、(31:G)得

(31:H) 一个 p 元集,如果 $p = n-1$,那么,它是肯定必要的;如果 $p = 0,1,n$,那么,它是肯定不必要的。

解释:如果一个联盟有一个对手,那么,它必须受到考虑;如果一个联盟是空的或只有一个玩家(!),或它没有对手,那么,没有必要考虑它。

证明:$p = n-1$:$-S$ 只有一个元素,从而,根据(31:D),它是平的。那么,该命题是(31:F)的结果。

$p = 0,1$:(31:D)和(31:F)直接给出结果。

$p = n$:在这种情况下,$S = I = (1,\cdots,n)$ 使得主要条件不可能得到满足。事实上,这要求 $\alpha_i > \beta_i$ 对所有 $i = 1,\cdots,n$ 成立,从而 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。但是,$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都是分配,上述不等式两边都等于零,这是矛盾的。

因此,有可能使 S 成为必要集的 p 被限制到了 $p \neq 0,1,n-1,n$,即区间

(31:8) $2 \leqq p \leqq n-2$。

这个区间只有在 $n \geqq 4$ 时才发挥作用。这里讨论的情况类

似于 27.5.2 末尾和 27.5.3 中的情况，而且，$n=3$ 的情况再次成为特别简单的情况。

31.2　全部解的系和一元解

31.2.1　接下来，我们研究全部解的系的结构。

(31:I)　对于一个非本质博弈来说，恰好存在一个分配：

(31:9)　$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\alpha_i=\mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n$。 278

对于一个本质博弈来说，存在无穷多个分配——一个 $(n-1)$ 维连续统——但 (31:9) 却不是其中之一。

证明：考虑一个分配

$$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}。$$

令

$$\beta_i=\mathrm{v}[(i)]+\varepsilon_i,\quad i=1,\cdots,n。$$

那么，30.1.1 的特征条件 (30:1) 和 (30:2) 变成

(30:10)　$\varepsilon_i\geqq 0,\quad i=1,\cdots,n$。

(30:11)　$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]$。

如果 Γ 是一个非本质博弈，那么，27.4.1 中的 (27:B) 给出 $-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]=0$；这样，(31:10)、(31:11) 等于 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=0$，即 (31:9) 是惟一的分配。

如果 Γ 是一个本质博弈，27.4.1 中的 (27:B) 给出 $-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]>0$，那么，(31:10)、(31:11) 有无穷多个

解，它们形成一个$(n-1)$维的连续统；[1]对于分配$\vec{\beta}$来说，有同样的结果。但是，(31:9)的$\vec{\alpha}$不是它们之中的一个，因为$\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=0$违背了(31:11)。

一个直接结果：

(31:J)　　一个解V不会是一个空集。

证明：也就是说，空集⊖不是一个解。事实上，考虑任一分配$\vec{\beta}$，根据(31:I)——至少存在着一个$\vec{\beta}$。$\vec{\beta}$不属于⊖且⊖中没有$\vec{\alpha}$使$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。故⊖不满足30.1.1中的(30:5:b)。[2]

31.2.2 我们曾经在前面指出过，

(31:12)　　$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta},\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$

根本不可能同时成立。[3] 然而：

(31:K)　　$\vec{\alpha}\succ\vec{\alpha}$永远不会发生。

279 证明：对于$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$，30.1.1中的(30:4:a)和(30:4:c)冲突。

(31:L)　　给定一个本质博弈和一个分配$\vec{\alpha}$，存在一个分配$\vec{\beta}$使得$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$，但没有$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。[4]

---

① 仅有一个方程：(31:11)。——278，①

② 这里的论证有卖弄学问之嫌。不过，如果对于分配来说条件是冲突的[即没有(31:I)]，那么，V=⊖就会是一个解。——278，②

③ 这两个占优的集合S就不得不相交。由(31:H)，这些S至少要有两个元素。所以，(31:12)只有在$n\geq 4$的情况中才可能发生。

经过认真分析，$n=4$的情况能够被排除。不过，对于$n\geq 5$的情况，(31:12)的确可能发生。——278，③

④ 从而，$\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$。——279，①

证明：令

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}。$$

考虑方程

(31:13)　　$\alpha_i = v[(i)]$。

由于该博弈是本质博弈，(31:I) 排除了 (31:13) 对所有 $i = 1, \cdots, n$ 都成立。假设 (31:13) 不成立，如它在 $i = i_0$ 时不成立。由于 $\vec{\alpha}$ 是一个分配，所以 $\alpha_{i_0} \geqq v[(i_0)]$，从而，(31:13) 的不成立意味着 $\alpha_{i_0} > v[(i_0)]$，即

(31:14)　　$\alpha_{i_0} = v[(i_0)] + \varepsilon$，　$\varepsilon > 0$。

定义一个向量

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\},$$

其中，

$$\beta_{i_0} = \alpha_{i_0} - \varepsilon = v[(i_0)],$$

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{n-1}, \quad i \neq i_0。$$

这些方程明确了 $\beta_i \geqq v[(i)]$①和 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$。② 所以，$\vec{\beta}$ 是一个与 $\vec{\alpha}$ 相近的分配。

接下来，我们证明有关 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的两个结论。

$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$：对于所有 $i \neq i_0$，即对于属于集合 $S = -(i_0)$ 的

---

① 对于 $i = i_0$，我们实际上有 β_{i_0}。对于 $i \neq i_0$，我们有 $\beta_i > \alpha_i \geqq v[(i)]$。——279，②

② $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ 是因为，当 $i = i_0$ 时，β_i 与 α_i 之差是 ε，而对于其他 $n-1$ 个 i 值，其差是 $-\frac{\varepsilon}{n-1}$。——279，③

所有 i,我们有 $\beta_i > \alpha_i$。这个集合有 $n-1$ 个元素且(对于 $\vec{\beta}$、$\vec{\alpha}$)满足主要条件,所以,(31:H)给出 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。

$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 不成立:假设 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。那么,满足主要条件的集合 S 必定存在,它没有被(31:H)排除。由 $\vec{\beta}$ 的结构,前者
280 意味着 $\beta_i > \alpha_i$;根据主要条件,后者意味着 $\alpha_i > \beta_i$。这是一个矛盾。

31.2.3 我们能够得出我们最初感兴趣的结论:

(31:M) 当且仅当一个博弈是非本质博弈时,存在一个分配 $\vec{\alpha}$,$\vec{\alpha'} \succ \vec{\alpha}$ 永远不会发生。[1]

证明:充分性:如果该博弈是一个非本质博弈,那么,根据(31:I),它恰好有一个分配 $\vec{\alpha}$,且这个分配有要求的性质(31:I)

必要性:如果该博弈是本质博弈,且 $\vec{\alpha}$ 是一个分配,那么,(31:L)的 $\vec{\alpha'} = \vec{\beta}$ 给出 $\vec{\alpha'} = \vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。

(31:N) 有一个一元解[2]的博弈必然是一个非本质博弈。

证明:把上面所说一元解记为 $V = (\vec{\alpha})$。V 必定满足 30.1.1 中的(30:5:b)。在我们目前的条件下,这意味着:每一不同于 $\vec{\alpha}$ 的 $\vec{\beta}$ 都被 $\vec{\alpha}$ 占优。即:

---

① 见 30.2.2 中(30:A:a)的分析,尤其见第 265 页脚注②。——280,①

② 我们并没有排除这样的可能性,即这一博弈可以有其他解,它们可能是,也可能不是一元解。事实上,在我们目前的假设下,这样的事情永远不会发生,这是(31:N)的结果与(31:O)的结果——或(31:P)的结果——所表明的。不过,目前的分析与此无关。——280,②

$$\vec{\beta} \neq \vec{\alpha} \text{ 意味着 } \vec{\alpha} \succ \vec{\beta}。$$

现在，如果该博弈是一个本质博弈，那么，(31:L) 给出一个违背这一条件的 $\vec{\beta}$。

(31:O)　一个非本质博弈恰好有一个解 V。这个解正是一元集 $V = (\vec{\alpha})$，其中，$\vec{\alpha}$ 是(31:I)的 $\vec{\alpha}$。

证明：由(31:I)，恰好存在一个分配，即(31:I)的 $\vec{\alpha}$。根据(31:J)，一个解 V 不可能是空集，所以惟有 $V = (\vec{\alpha})$。$V = (\vec{\alpha})$ 的确是一个解，即它满足 30.1.1 中的(30:5:a)、(30:5:b)：前者得自(31:K)，根据(31:I)，后者的理由是，$\vec{\alpha}$ 是惟一一个分配。

现在，我们能够完美地回答 30.4.1 中的第一个问题了：

(31:P)　一个博弈有一个一元解（见上面脚注②）的充分必要条件是，它是一个非本质博弈；而且，该博弈没有其他的解。

证明：这是(31:N)和(31:O)的结果的结合。

31.3　与策略等价性相对应的同构

31.3.1　考虑分别有特征函数 $v(S)$ 和 $v'(S)$ 的两个 281
博弈 Γ 和 Γ'，它们是 27.1 意义上的策略等价博弈。我们要证明的是，从 30.1.1 的定义的角度看，它们是真正等价的。为完成这个任务，我们要证明，构成 30.1.1 中的定义的基础的分配之间同构。也就是说，我们希望建立 Γ 的一个分配与 Γ' 的一个分配之间的一个一一对应，就这些概念而言，它是同构的，即它把 Γ 中的有效集、占优关系和解

变成 Γ′中相应的东西。

这一分析只不过是 27.1.1 的试探性说明的严格化和细节化,因此读者可以认为没有必要这么做。然而,它们给出了"同构证明"的一个有指导意义的例子;再有,我们前面关于口头证明与严格证明之间关系的说明再次适用。

31.3.2 在 27.1.1 中的(27:1)和(27:2)意义上,策略等价性由 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 给出。考虑 Γ 的所有分配 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, 2_n\}$,Γ′的所有分配$\overrightarrow{\alpha'} = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_n'\}$。我们要寻找一个具有指定性质的一一对应:

$$(31:15) \qquad \vec{\alpha} \leftrightarrows \overrightarrow{\alpha'}。$$

从 27.1.1 开头的动机中不难猜到(31:15)应该是什么。在那里,我们描述了通过给玩家 k 一个固定支付 α_k^0 实现从 Γ 到 Γ′的过渡。把这一原理运用于分配则意味着

$$(31:16) \qquad \alpha_k' = \alpha_k + \alpha_k^0, \quad k = 1, \cdots, n。$$①

相应地,我们用方程(31:16)来定义对应(31:15)。

31.3.3 接下来,我们验证(31:15)和(31:16)的性质。

Γ 的分配映射到 Γ′的分配:由 30.1.1 中的(30:1)和(30:2),这是说,

$$(31:17) \qquad \alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], \quad i = 1, \cdots, n。$$

$$(31:18) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0,$$

变为

$$(31:17^*) \qquad \alpha_i' \geqq \mathrm{v}'[(i)], \quad i = 1, \cdots, n。$$

---

① 如果我们引入固定向量 $\overrightarrow{\alpha^0} = \{\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0\}$,那么,(31:16)可以被写成 $\overrightarrow{\alpha'} = \vec{\alpha} + \overrightarrow{\alpha^0}$,即它是分配向量空间中 $\vec{\alpha}$ 的一个平移。——281,①

(31:18*)　　$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' = 0$。

对于(31:17)，(31:17*)来说，这是因为，根据 27.1.1 中的(27:2)，$v'[(i)] = v[(i)] + \alpha_i^0$；对于(31:18)和(31:18*)来说，这是因为，由(27:1)，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 = 0$。 282

对于 Γ 而言的有效性变成了对于 Γ′而言的有效性：根据 30.1.1 中的(30:3)，这意味着，

$$\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i \leqq v(S)$$

变为

$$\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i' \leqq v'(S)。$$

这一点由(31:16)与(27:2)之间的比较得到验证。

对于 Γ 而言的占优变为对于 Γ′而言的占优：对于 30.1.1 中的(30:4:a)—(30:4:c)来说，这意味着同样的事情。(30:4:a)无关紧要；(30:4:b)是有效性，这是我们已经证明了的；(30:4:c)是说，$\alpha_i > \beta_i$ 变为 $\alpha_i' > \beta_i'$，这是显然的。Γ 的解被映射为 Γ′的解：对于 30.1.1 中的(30:5:a)和(30:5:b)[或(30:5:c)]来说，这意味着不相同的事情。这些条件仅仅涉及占优，这一问题已解决。

我们把这些结果重述为：

(31:Q)　　如果两个零和博弈 Γ 和 Γ′是策略等价的，那么，它们的分配之间存在着一个同构，即从 Γ 的东西到 Γ′的东西的一个一一映射，使 30.1.1 中定义的概念保持不变。

32. 本质三人零和博弈的全部解的确定

32.1 数学描述和几何方法

32.1.1 让我们回到 30.4.1 中描述的第二个问题：本质三人零和博弈的全部解的决定。

我们知道，我们可以按照其简化型分析这一博弈，而且我们能够选择 $\gamma=1$。[1] 在这种情况下，正如我们在前面讨论过的那样[2]，特征函数是完全确定的：

$$(32:1)\qquad 当 S 有 \begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases} 个元素时，\quad \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\1\\0\end{cases}。$$

一个分配是一个向量

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$

283 它的三个分量都必须满足 30.1.1 中的(30:1)和(30:2)。这些条件现在变成了

$$(32:2)\qquad \alpha_1\geqq-1,\alpha_2\geqq-1,\alpha_3\geqq-1,$$

$$(32:3)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0。$$

我们从 31.2.1 中的(31:I)知道，α_1、α_2、α_3 仅仅形成一个

① 见 29.1 开头的讨论或那里给出的参考文献：27.1 和 27.3 中的第二点说明。——282，①

② 见 29.1 开头或 27.5 的第二种情况。——282，②

二维连续统，即它们能够在一个平面中得到描述。事实上，(32:3)使得一个十分简单的平面描述成为可能。

32.1.2 为此，我们在这个平面中取三个轴，它们之间形成 60°角。对于该平面上的任意一点，我们定义 α_1、α_2、α_3 为该点到三个轴的垂直距离。这整个安排，尤其是给予 α_1、α_2、α_3 的符号如图 52 所示。不难验证，对于任意一点来说，这三个垂直距离之和都等于零；而且，反过来，任意一个和为零的三维数组 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 也都对应着一个点。 284

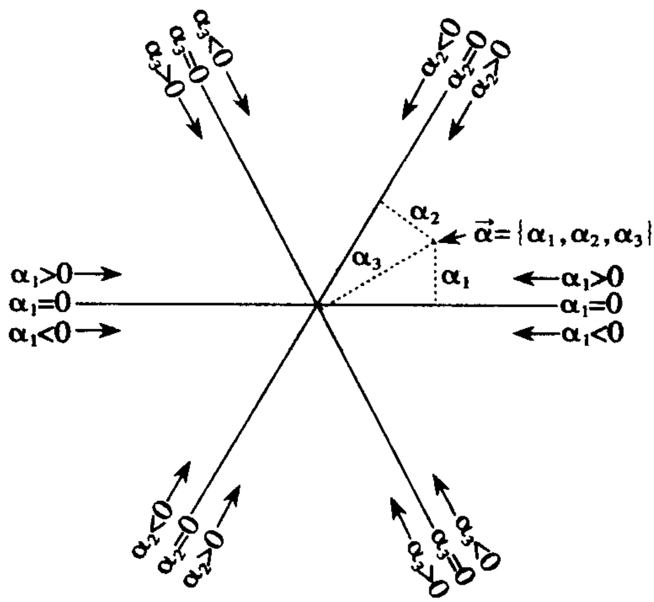


图 52

因此，图 52 中的平面恰好表达了条件(32:3)。从而，条件(32:2)等于对图 52 中的平面之内的 $\vec{\alpha}$ 施加一个限制。这个限制显然是，它必须位于 $\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-1$，$\alpha_3=-1$ 三

条线形成的三角形之内或其边上。图 53 说明了这一点。

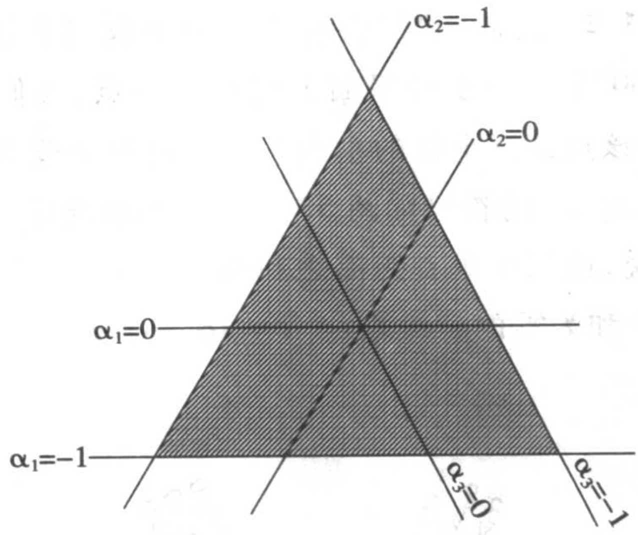


图 53

因此,我们称之为基本三角形内的阴影区域代表着满足(32:2)和(32:3)的 $\vec{\alpha}$,即全部分配。

32.1.3 接下来,我们表达这一几何表示中的占优关系。因为 $n=3$,(31:H)[或 31.1.5 末尾的(31:8)的讨论]告诉我们,$I=(1,2,3)$的子集中,有两个元素的那些子集是肯定必要的,其他的则是肯定不必要的。也就是说,在全部解 V 的决定中,我们必须考虑的集合刚好是:

$$(1,2);\quad (1,3);\quad (2,3)。$$

因此,对于

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},\vec{\beta}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

来说,占优关系

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$$

意味着

(32:4)　　$\alpha_1>\beta_1,\alpha_2>\beta_2;\alpha_1>\beta_1,\alpha_3>\beta_3;\alpha_2>\beta_2,\alpha_3>\beta_3$。

图形描述：图 54 中，$\vec{\alpha}$ 占优阴影区域之内的点，不占优其他点。[①]

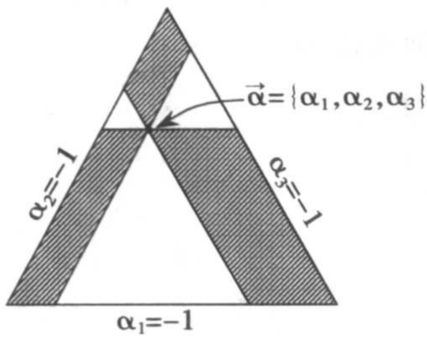


图 54

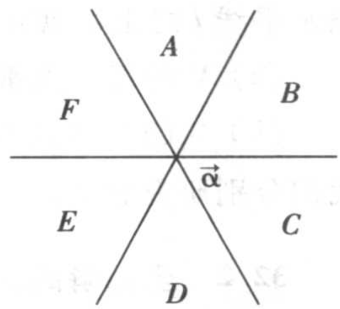


图 55

因此，点 $\vec{\alpha}$ 占优图 55 中六分周中的三个（即 A、C 和 E）。由此，我们不难得出结论：$\vec{\alpha}$ 被另外三个六分周（即 B、D 和 F）占优。所以，不占优 $\vec{\alpha}$ 也不被 $\vec{\alpha}$ 占优的点是落在划分六分周的三条线（即六条半直线）上的点。也就是说， 285

(32:5)　　如果 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 不相互占优，那么，从 $\vec{\alpha}$ 到 $\vec{\beta}$ 的方向平行于基本三角形一条边。

32.1.4　现在，我们能够系统地寻找全部解了。

考虑一个解 V，即基本三角形中的一个集合，而基本三角形满足 30.1.1 中的条件（30:5:a）和（30:5:b）。在下面的研究中，我们将利用这些条件且不再每次都明确指

① 尤其不包括边界线上的点。——284，①

出它们。

由于该博弈是一个本质博弈，V 至少包含两个点①，如 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$。由(32:5)，从 $\vec{\alpha}$ 到 $\vec{\beta}$ 的方向平行于基本三角形的一个边；而且通过玩家号码 1、2、3 的置换，我们能够使这条边是 $\alpha_1 = -1$，即水平的那条边。这样，$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 就落在一条水平线 l 之上。现在，有两种可能性：

(a) V 的每一点都落在 l 上；

(b) V 的有些点不落在 l 上。

我们分别研究它们。

32.2 全部解的决定

32.2.1 我们首先考虑(b)。不落在 l 上的任何点必定同时就 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 满足(32:5)，即它必定是 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 为基的两个等边三角形之一的第三个顶点：图 56 中 $\vec{\alpha'}$、$\vec{\alpha''}$ 中的一个。所以，$\vec{\alpha'}$ 或 $\vec{\alpha''}$ 属于 V。V 的不同于 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的任一点以及 $\vec{\alpha'}$ 或 $\vec{\alpha''}$ 必定满足(32:5)，但现在要对所有三个点 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 和 $\vec{\alpha'}$(或 $\vec{\alpha''}$)满足。看一下图 56 就会发现，这是不可能的。这样，V 恰好由这三个点组成，即图 57 中位于三角形 I 或三角形 II 的一个三角形的三个顶点。将图 57 与图 54 或图 55 比较表明，三角形 I 的顶点留下这一三角形内部的点不被占优。这就排除了 I。②

---

① 图 54 中，这是能够直接看到的事情。——285，①

② 这提供了 30.3.6 中提到的例子：三角形 I 的三个顶点不相互占优，即它们形成上述意义上的一个令人满意的集合。不过，它们却不适合作为一个解的一个子集。——285，②

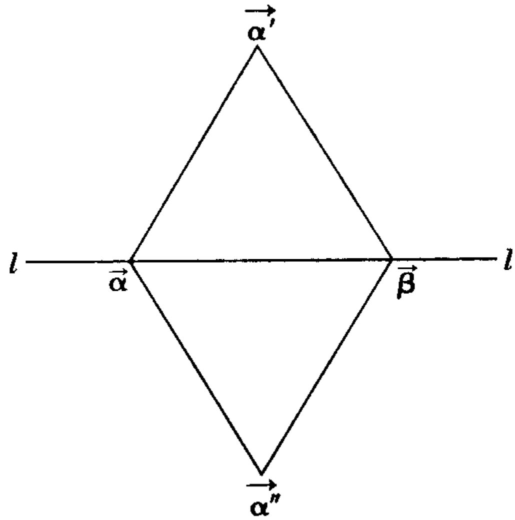


图 56

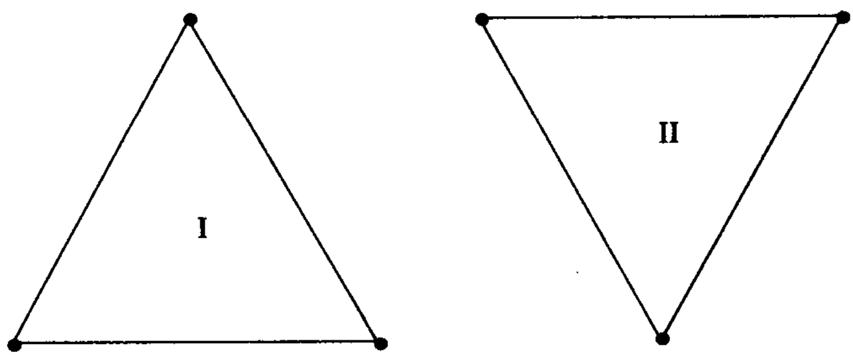


图 57

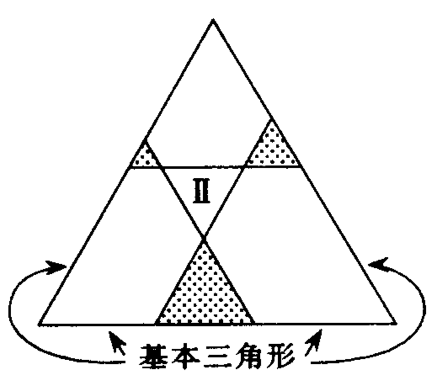


图 58

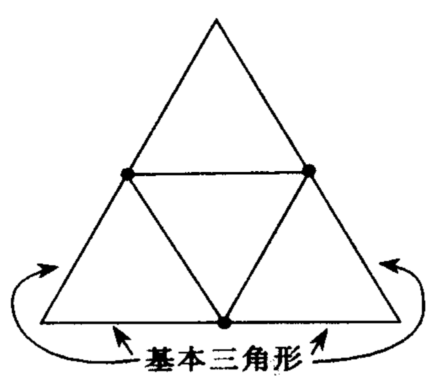


图 59

287 相同的比较表明，三角形 II 的顶点使图 58 中阴影区域内的点不被占优。因此，三角形 II 必须以这样的方式在基本三角形中放置，使得这些阴影区域全部落在基本三角形的外面。如图 59 所示，这意味着，II 的三个顶点必须落在基本三角形的三个边上。因此，这三个顶点是基本三角形的三条边的中点。

图 59 与图 54 或图 55 的比较表明，这个集合 V 的确是一个解。不难验证，这三个中点是

$$(32:6)\qquad \{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\},\{\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\},\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\},$$

即解 V 是图 51 中的集合。

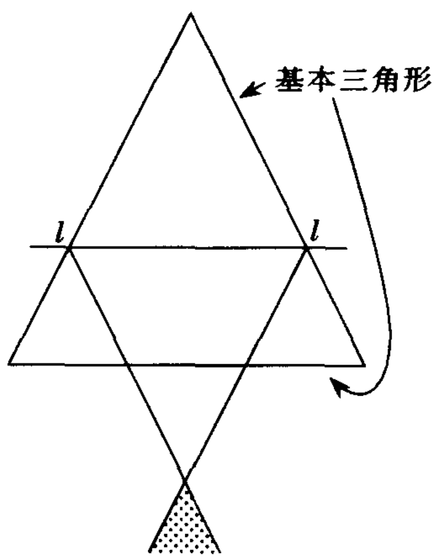


图 60

32.2.2 下面，我们考虑 32.1.4 中的(a)。在这种情况下，V 的全部落在水平线 l 上。由(32:5)，l 上

任何两点都不会相互占优，所以 l 上的每一点都不被 V 占优。从而，l 上的（在基本三角形之内的）每一点必定属于 V。也就是说，V 恰好是直线 l 的属于基本三角形的那一部分。因此，V 的元素 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 由下述方程描述

(32:7)　　$$\alpha_1=c。$$

见图 60。

图 60 与图 54 或图 55 的比较表明，直线 l 使图 60 中点点的区域不被占优。因此，直线 l 必定以这样的方式位于基本三角形之中，使得阴影区域全部落在基本三角形的外面。这意味着，l 必须落在基本三角形与其相交的两条边的中点的下方。① 用(32:7)的术语说：$c<\frac{1}{2}$。另一方面，$c\geqq -1$ 288

是 l 与基本三角形相交的必要条件。所以，我们有：

(32:8)　　$$-1\leqq c<\frac{1}{2}。$$

图 60 与图 54 或图 55 的比较表明，在这些条件下②，集合 V——即 l——的确是一个解。

但是，这个解的形式(32:7)得自玩家号码 1、2、3 的一

---

① l 的极限位置，穿过中点本身，必须被排除。理由是，在这个位置，点点的区域的顶点就会落在基本三角形上，这是不允许的，因为这个点也不被 V 即 l 占优。

要看到，在情况(b)中，不存在相应的禁止，即不存在图 58 中点点的区域。它们的顶点也不被 V 占优，但它们属于 V。在 V 目前的位置，受到考虑中的顶点却不属于 V，即不属于 l。

排除这一极限位置的结果是接下来的不等式中的 ≦ 变成 <。——288，①

② (32:8)，即 l 与基本三角形相交，但不相交于其边的中点。——288，②

个恰当排列。因此,我们还有另外两个解,它们由

(32:7*)　　$\alpha_2 = c$

和

(32:7**)　　$\alpha_3 = c$

描述,并总是满足(32:8)。

32.2.3 总结:

下面是解的全部列举:

(32:A)　　对于每个满足(32:8)的 c:三个集合(32:7)、(32:7*)和(32:7**)。

(32:B)　　集合(32:6)。

33. 结　　论

33.1 解的多样性、歧视及其含义

33.1.1 我们要对第32节的结果进行认真分析。我们已经决定了本质三人零和博弈的全部解。在30.1的严格定义被给出之前,我们已经在29.1中决定了我们希望的解;而且,这个解重新表现为(32:B)。但是,我们又发现了其他的解:(32:A),它是一个无穷集,其中每一个是一个无穷分配集。这些解代表着什么呢?

以(32:A)中的(32:7)为例。对于(32:8)的每个 c,这给出一个解,它由满足(32:7)即 $\alpha_1 = c$ 的分配 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1,$
289 $\alpha_2, \alpha_3\}$ 组成。除此之外,它们还满足30.1.1的(30:1)和(30:2),即32.1.1的(32:2)和(32:3)。换句话说:我们

的解由全部

$$(33:1)\qquad \vec{\alpha}=\{c,a,-c-a\},\quad -1\leqq a\leqq 1-c$$

组成。

显然，这个解的解释是：玩家之一（此时的玩家 1）受到另外两位玩家（此时的玩家 2、3）的歧视。他得到的数额 c 是由他们指定的。对于解中的所有分配来说，即对于所有"公认的行为标准"来说，这个数额是相同的。玩家 1 在这个社会中的地位是由另外两位玩家指定的，他被排除在所有可能导致联盟的谈判之外。这样的谈判是在另外两位玩家之间进行的：他们之间如何分配 $-c$ 完全取决于他们的谈判能力。解——公认的行为标准——绝对不限制他们之间的、由 a 和 $-c-a$ 表达的份额分配方式。[①] 这并不令人吃惊。因为被排斥的那位玩家是绝对"禁忌"的，联盟中不存在伙伴退出的威胁。也不存在确定的分赃方式。[②③]

33.1.2　关于一位玩家受到的"歧视"，我们有更多值得说明的东西。

首先，一位玩家受到的歧视并非完全不受约束。表达歧视程度的数量 c 受到 32.2.2 中(32:8)的限制。(32:8)的一部分，$c\geqq -1$ 的含义充分明确，但其另一部分 $c<\frac{1}{2}$ 的意义则

---

① 两者都必须 $\geqq -1$，即每位玩家独自能够得到的数额。

$a,-c-a\geqq -1$ 就是(33:1)的 $-1\leqq a\leqq 1-c$。——289，①

② 见 25.2 末尾的讨论。要看到，我们在那里为了说明 $v(S)$ 而罗列的理由在这一特殊情况下不再有效，不过 $v(S)$ 仍然决定着解！——289，②

③ 要看到，由于 32.2.2 中的(32:8)，"赃物"，即数额 $-c$，可以是正的，也可以是负的。——289，③

相当玄妙。[1] 这全部归结为：尽管一个随意的歧视机制能够与一个稳定的行为标准——即社会秩序——相容，但它必须满足一定的数量条件，以使其不会损害稳定性。

第二，对于受歧视的那位玩家来说，歧视未必明显不利。但也不会是明显有利，即他的固定值 c 不能够等于或优于他人期望的最好结果。这意味着，由(33:1)，$c \geqq 1-c$，即 $c \geqq \frac{1}{2}$。这正是(32:8)禁止的事情。但是，当 $c=-1$ 时，歧视就成了明显不利的事情了；而且，根据(32:8)，这是可能的，但不是惟一的。$c=-1$ 意味着，这位玩家不但被排斥了，而且被百分之百剥夺了。(32:8)中其余的 c，
290 $-1<c<\frac{1}{2}$，对应着逐渐减轻的不利隔离方式。

33.1.3 引人注目的是，我们的解的概念能够表达无歧视的(32:B)的所有这些细微差别，也能表达有歧视的行为标准(32:A)——$c=-1$ 的百分之百的伤害形式，以及伤害逐渐减轻的一个连续族，$-1<c<\frac{1}{2}$。尤其显著的是，我们本无意寻找这些事情——29.1 的试探性讨论肯定也没有这种精神，但严格的理论本身却迫使我们得出了这些结论。而且，这些情况甚至出现在极其简单的三人零和博弈的结构之中！

对于 $n \geqq 4$，可以预料，将会有更多种类的歧视、特殊待遇。除此之外，我们还必须准备着寻找与(32:B)相似

① 在 $c<\frac{1}{2}$ 中，$=$ 被排除了，但在 $c \geqq -1$ 中，$=$ 则没有被排除。——289，④

的东西，即无歧视的“公正”解。不过，我们将会看到，情况远非如此简单。而且，我们还将看到，正是关于有歧视的解的研究带来了对一般非零和博弈的正确理解及其在经济学中的应用。

33.2 静态与动态

33.2 这里，回忆一下4.8.2关于静态和动态的讨论也许是有益的。我们在那里的讨论是有用的。事实上，其真正意义是我们的理论现已达到的阶段。

在29.2和那里提到的其他地方，我们讨论了联盟形成之前、决定着联盟的谈判、预期和担心。这些事情都是4.8.2的准动态型。这同样适用于4.6和30.2中的讨论，即各种分配之间是否相互占优如何依赖于它们与一个解的关系；也就是说，已经建立起来的行为标准所允许的行为如何既不相互冲突，又能够被用于使没有得到认可的行为变得不可信。

在一个静态理论中使用这样的分析，其理由和必要性是前面说明过的，这里不再重复。

第 7 章　四人零和博弈

34. 准备性研究

34.1　概要

291 **34.1**　我们已经有了 n 人零和博弈的一般理论，但是，我们的信息状况还远远不能令人满意。除了定义的形式化描述之外，我们并没有取得很多结果，而且这些结果是肤浅的。我们已经给出的应用——即我们成功地决定了特殊情况的解——只能说提供了一个初步的方向。正如我们在 30.4.2 中指出的那样，这些应用囊括了 $n \leqq 3$ 的情况。过去的讨论告诉我们，与一般问题相比，我们已经取得的结果微不足道。因此，我们必须转向 $n \geqq 4$ 的情况，只有在这类情况下，联盟之间的相互影响才会表现出充分的复杂性。只有掌握了主导这些现象的机理，我们才能够进一步深入理解我们的问题的本质。

这一章要讨论的是四人零和博弈。我们关于这些博弈的信息相当贫乏。因此，我们只能给出一个不详尽和概

原书缺页

序列中每个 S 总有这同一个序列中的另一个集合作为其补集。具体说：第一个与最后一个，第二个与第五个，第三个与第四个互为补集。从而，它们的 $v(S)$ 互为负数。还要牢记的一点是，根据 27.2 中的不等式（27:7）（$n=4$，$p=2$），所有这些 $v(S)$ 都 $\leqq 2$，$\geqq -2$。所以，如果我们令

$$(34:2)\qquad \begin{cases} v[(1,4)] = 2x_1, \\ v[(2,4)] = 2x_2, \\ v[(3,4)] = 2x_3, \end{cases}$$

那么，我们有

$$(34:3)\qquad \begin{cases} v[(2,3)] = -2x_1, \\ v[(1,3)] = -2x_2, \\ v[(1,2)] = -2x_3, \end{cases}$$

而且，

$$(34:4)\qquad -1 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1。$$

反之，如果任意给定满足（34:4）的三个数 x_1、x_2、x_3，那么，我们能够按照（34:1）—（34:3）就 $I=(1,2,3,4)$ 的全部子集 S 定义一个函数 $v(S)$，但是，我们必须证明，这个 $v(S)$ 是一个博弈的特征函数。根据 26.1，这意味着，我们当前的 $v(S)$ 满足 25.3.1 的条件（25:3:a）—（25:3:c）。其中，（25:3:a）和（25:3:b）显然是满足的，只剩下（25:3:c）有待证明。根据 25.4.2，这意味着，要证明的是，如果 S_1、S_2、S_3 是 I 的分解，那么，

$$v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) \leqq 0。$$

[见 25.4.1 中的（25:6）。] 如果 S_1、S_2、S_3 中的任何一个是空集，那么，另外两个互补，而且根据 25.3.1 中的（25:3:a）和（25:3:b），我们甚至会有等式。这样，我们

可以假设 S_1、S_2、S_3 中的任何一个都不会是空集。由于总共有四个元素，这些集合中必定有一个，如 $S_1 = S$，是一个二元集，而其余两个是一元集。因此，我们的不等式变成

$$\mathrm{v}(S) - 2 \leqq 0, \text{即 } \mathrm{v}(S) \leqq 2。$$

如果我们就全部二元集表达这一关系，那么，(34:2) 和 (34:3) 将该不等式转变为

$$2x_1 \leqq 2, \quad 2x_2 \leqq 2, \quad 2x_3 \leqq 2,$$
$$-2x_1 \leqq 2, \quad -2x_2 \leqq 2, \quad -2x_3 \leqq 2,$$

这等价于 (34:4)。这样，我们已经证明了：

(34:A)　本质四人零和博弈（在其 $\gamma = 1$ 的简化型中）严格对应着满足不等式 (34:4) 的三个数 x_1、x_2、x_3 组成的三维数组。这样一个博弈，即其特征函数，与其 x_1、x_2、x_3 之间的对应由方程 (34:1)—(34:3) 给出。①　*293*

34.2.2　上面的三个数 x_1、x_2、x_3 组成的数组表明，一个本质四人零和博弈能够借助一个简单的图形来讨论。我们能够把数 x_1、x_2、x_3 看作笛卡尔坐标系中一个点的坐标。② 在这种情况下，不等式 (34:4) 描述了空间的一个部分，它正好填满一个立方体 Q。这个立方体以坐标原点为中心，如图 61 所示，由于其六个面是如下六个平面，

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = \pm 1, \quad x_3 = \pm 1,$$

---

① 读者可以将我们的结果与 29.1.2 关于三人零和博弈的结果进行比较。从中可以看出，可能结果如何增加了。——293，①

② 我们还能够把这些数看作 16.1.2 意义上的 L_3 中的一个向量的分量。正如第 304 页脚注①中那样，这样做有时更方便。——293，②

其棱的长度是 2。

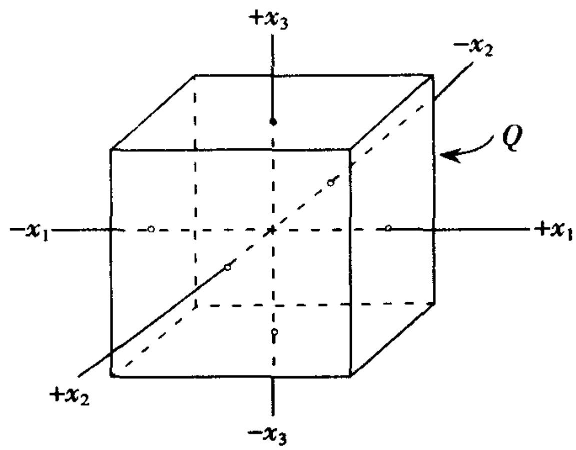


图 61

因此，每个本质四人零和博弈 Γ 恰好由这个正方形内或其表面上的一个点代表，反之亦然。以这种方式看待这些博弈并试图将其奇妙之处与 Q 中的几何条件联系起来是十分有益的。尤其有指导意义的是，这些博弈与 Q 的特定显著点等同起来了。

294 但是，在实施这一计划之前，我们要考虑一下特定的对称性问题。我们想揭示玩家 1、2、3、4 的排列与 Q 的几何变换（运动）之间的关系。事实上，根据 28.1，前者对应着博弈 Γ 的对称性，而后者显然表达的是几何体的对称性。

34.3 玩家的置换

34.3.1 在继续对本质四人零和博弈进行几何描述时，我们不得不进行一个带有随意性的运算，即一个会破坏最初情况的、带有部分对称性的运算。事实上，在描述二元集 S 的

v(*S*)时，我们不得不从六个集合中单独拿出三个，以引入坐标 x_1、x_2、x_3。为此，我们将在(34:2)和(34:3)中指定玩家 4 的特殊作用，并建立玩家 1、2、3 与数量 x_1、x_2、x_3 的对应关系[见(34:2)]。因此，玩家 1、2、3 的一个排列将导致相同的坐标排列 x_1、x_2、x_3，并且到目前为止，排列是对称的。但是，这只是玩家 1、2、3、4 的 24 种置换中的 6 个。[①] 这样，玩家 4 被另一个玩家替换的排列没有以这种方式考虑进去。

34.3.2 下面，我们就考虑这样一个置换。由于即将说明的理由，我们考虑置换 *A*，它对换了玩家 1 和玩家 4 以及玩家 2 和玩家 3。[②] 看一下(34:2)和(34:3)，不难发现，这一置换使 x_1 保持不变，而它用 $-x_2$、$-x_3$ 替换了 x_2、x_3。类似地，可以验证：置换 *B*，对换玩家 2 和 4，1 和 3，x_2 保持不变，用 x_1、$-x_3$ 替换 x_1、x_2。置换 *C*，对换玩家 3 和 4，1 和 2，x_3 保持不变，用 $-x_1$、$-x_2$ 替换 x_1、x_2。

因此，只是在 x_1、x_2、x_3 的正负号受到关注时，*A*、*B*、*C* 这三个置换中的每一个才影响到这三个变量，每一置换改变两个变量的正负号，另一个的正负号不变。

由于它们也被玩家 4 分别变成玩家 1、2、3，如果与玩家 1、2、3 的 6 种置换结合起来，它们产生玩家 1、2、3、4 的所有置换。现在，我们已经看到，后者对应着 x_1、x_2、x_3 的 6 种置换(不改变符号)。所以，1、2，3、4 的 24 种置换对应着 x_1、x_2、x_3 的 6 种置换，其每一个连带着没有正负号变化

---

① 见 28.1.1，(28:A:a)和(28:A:b)定义之后。——294，①

② 用 29.1 中的符号：

$$A=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}。\text{——294，②}$$

或两个正负号变化。[1]

295 **34.3.3** 我们也可以这样说:如果考虑空间中所有把立方体 Q 变成它自己的运动,不难验证,它们正是坐标轴 x_1、x_2、x_3 的置换与坐标平面(即平面 $x_2,x_3;x_1,x_3;x_1,x_2$)的翻转结合。数学上,这些是 x_1、x_2、x_3 的置换与 x_1、x_2、x_3 中正负号的任意变化的结合。这有 48 种可能结果。[2] 在这 48 种可能结果中,偶数个(即 0 或 2)符号变化的 24 对应着玩家的置换。

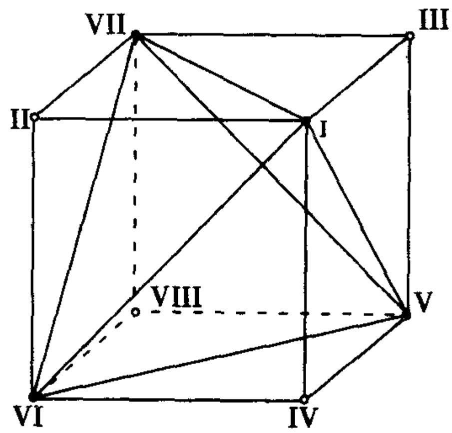


图 62

不难验证,这 24 个运算,不仅把 Q 变成它自己,而且还把图 62 中的四面体 I、V、VI、VII 变成它自己。你也可以这样描述这一运动,即它把图中 Q 的一个顶点●变成一个顶点●;且把一个顶点○变成一个顶点○,一个顶点

---

① 每种情况中,这些正负号变化共有 $1+3=4$ 种可能性,这样,我们有 $6\times4=24$ 种对 x_1、x_2、x_3 的运算以表示 1、2、3、4 的 24 种置换。——294,③

② 对于每一个变量 x_1、x_2、x_3 来说,存在两种可能性:变或不变。这给出 $2^3=8$ 种可能性。结合 x_1、x_2、x_3 的 6 种置换,产生 8×6 种运算。——295,①

●永远不可能被变成一个顶点○。[1]

通过直接描述与立方体 Q 的特定点相对应的博弈，我们即将得到这些说法的更为直接的解释：这些点分别是 Q 的顶点●和顶点○，Q 的中心（即图 61 中的原点）和 Q 的主对角线。

35. 立方体 Q 的一些特殊点的讨论

35.1　隅角 I（和 V、VI、VII）

35.1.1　我们首先研究与四个隅角（corner）●：I、V、VI、VII 相应的博弈。我们已经看到，通过适当置换玩家 1、2、3、4，这些点中的一个可以得自另一个。因此，研究其中的一个，如 I，就足够了。

点 I 对应着坐标 x_1、x_2、x_3 的取值 1、1、1。因此，这一 296
博弈的特征函数是：

$$\text{(35:1)}\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\ 1\\ 2 & (\text{且 } 4 \text{ 属于 } S)\\ 2 & (\text{且 } 4 \text{ 不属于 } S)\\ 3\\ 4\end{cases}\text{个元素时}, \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\ -1\\ 2\\ -2\\ 1\\ 0\end{cases}$$

① 在群论中，尤其在晶体学中，这组运动十分注明，我们不做进一步讨论。——295，②

[借助 34. 2. 1 中的(34:1)、(34:2)、(34:3),可直接验证。]我们不用第 6 章中的数学理论,让我们首先看一下它是否允许一个符合直觉的解释。

首先要看到的是,被独自撇下的一位玩家将损失数额 -1。这显然是能够发生在他身上的最糟糕的事情,因为不用别人帮助他也能够防止自己遭受更大损失。[①] 因此,我们可以视得到这一数额的一位玩家彻底失败了。如果两位玩家的一个联盟得到了数额 -2,那么,可以视其为彻底失败了,因为其中的每位玩家必定得到数额 -1。[②③] 在这一博弈中,从这个意义上说,任何两位玩家的联盟如果没有包括玩家 4 都是失败的。

让我们转向补集。如果一个联盟在上述意义上是失败的,我们有理由认为其补集是一个胜利联盟。因此,包括玩家 4 的二元集必定是一个胜利联盟。再有,由于任何孤立的玩家都必定被视为失败的,三人联盟总是胜利的。对于包括玩家 4 的三人联盟来说,这是无关紧要的,因为在这些联盟中,包括玩家 4 的二人就能够取胜。但是,基本的一点是,1,2,3 是一个胜利联盟,因为其真子集都是

---

① 这一观点由我们在 23 和 32.2 中关于三人博弈的结果,更基本地由我们在 30.1.1 中给出的分配的定义,尤其是条件(30:1)详细说明。——296,①

② 因为他和他的同伙都不可能得到少于 -1 的数额,当它们总共得到数额 -2 时,每人 -1 是惟一的分配方式。——296,②

③ 用 31.1.4 的术语:这一联盟是平的。当然,不存在联盟收益,从而,两位玩家不可能有建立这样一个联盟的动机。但是,如果两位玩家恰巧结合起来了,且无吸收第三个同伙的愿望,那么,我们可以把剩下的两位玩家看作一个联盟。——296,③

失败的。[①]

35.1.2 显然，这是争取加入下面的任何一个联盟的争斗： 297

(35:2)　　(1,4),(2,4),(3,4),(1,2,3),

这些联盟能够得到的数额分别是

(35:3)　$v[(1,4)]=v[(2,4)]=v[(3,4)]=2, v[(1,2,3)]=1$。

要看到，这十分类似于我们在本质三人零和博弈中看到的情况，其中胜利联盟是：

(35:2*)　　(1,2),(1,3),(2,3),

且这些联盟能够得到的数额分别是：

(35:3*)　　$v[(1,2)]=v[(1,3)]=v[(2,3)]=1$。

在三人博弈中，我们借助如下假设确定(35:3*)中成果在赢家中间的分配：一个胜利联盟中的一位玩家应该得到相同数额，无所谓他进入哪一个胜利联盟。对于玩家1、2、3来说，记这些数额为α、β、γ，(35:3*)给出

(35:4*)　　$\alpha+\beta=\alpha+\gamma=\beta+\gamma=1$,

由此得，

---

① 我们要敬告读者的是，我们把"失败"和"胜利"当作专门术语使用。这并非我们的意图。这些概念事实上十分适合严格处理。"失败"和"胜利"联盟实际上与31.1.5中的(31:F)和(31:G)中考虑的集合S一致，分别对应于S是平集的和$-S$是平集。但是，我们将在第10章中以这种方式考虑这一问题。

暂时地，我们的分析完全是启发性的，应该采取第21和22节中关于三人零和博弈分析的精神。惟一的差别是，我们接下来的讨论将更为简要，因为我们在过去的讨论中积累了大量经验和传统做法。

由于我们已经有了严格的有关博弈的解的理论，我们应该通过机遇数学理论的严格分析进行这一初步的启发性分析。（见上，以及36.2.3开头。）——296，④

$$(35:5^*)\qquad \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}。$$

这些的确是那些分析得出的值。

在我们目前的四人博弈中，让我们假设有同样的原理。用 α、β、γ、δ 分别记玩家 1、2、3、4 加入一个胜利联盟时得到的数额。那么，(35:3)给出

$$(35:4)\quad \alpha+\delta=\beta+\delta=\gamma+\delta=2,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=1,$$

由此得

$$(35:5)\qquad \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3},\quad \delta=\frac{5}{3}。$$

第 21 节和 22 节中就三人博弈使用的这一富有启发性的方法完全可以照搬过来。①

35.1.3 总结：

(35:A) 这是这样一个博弈，其中玩家 4 处于特别有利于取胜的地位：对于他来说，任何联盟都是胜利联盟。没有他的合作，三位玩家联合起来才能取胜。在他是赢家之一时，他的这一优势在玩家 1、2、3、4 应该得到的数额中也有所表现。如果我们的上述演绎可靠的话，这些数额分别是 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{5}{3}$。需要指出的是，玩家 4 的优势特指胜利情况下的优势；失败时，所有玩家地位相同(即得到 -1)。

298

当然，最后提到的情形归于我们通过简化而实现的正

① 当然，这并不意味着是以 30.1 为基础的严格讨论。——297，①

规化。然而，与任何正规化无关，这一博弈表现出如下特点：同是赢家的一位玩家超过另一位玩家的数量优势可以不同于同是输家时这位玩家较另一位玩家的数量优势。

22.3.4 的总结表明，在三人博弈中，这不可能发生。因此，我们得到了参与者个数达到 4 时出现的新的因素的第一个迹象。

35.1.4　最后，在这一博弈中，玩家 4 的策略优势是这样一个事实，即他只需一个盟友就能够取得胜利，但是没有他的参与，三位玩家联盟起来才能取得胜利。你也许试图过渡到一个更为极端的情况，即构造这样一个博弈，其中不包含玩家 4 的任何联盟都是失败联盟。必须看到，事情并非如此，或者说这样一个优势不再是策略优势。事实上，在这样一个博弈中，

$$\text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{个元素且 4 不属于 } S \text{ 时，} \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\-2\\-3\end{cases}。$$

由此，

$$\text{如果 } S \text{ 有}\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}\text{个元素且 4 属于 } S\text{，那么，} \mathrm{v}(S)=\begin{cases}3\\2\\1\\0\end{cases}。$$

这不是简化型，因为

$$\mathrm{v}[(1)]=\mathrm{v}[(2)]=\mathrm{v}[(3)]=-1,\mathrm{v}[(4)]=3。$$

如果我们把 27.1.4 的简化程序应用于这个 $\mathrm{v}(S)$，那么，我们发现，其简化型是

$$\overline{\mathrm{v}}(S)\equiv 0,$$

即该博弈是非本质博弈。[这不可以由 27.4 中的(27:B)直接证明。]因此，对于玩家 1、2、3、4 中的每一位来说，这个都有惟一确定的值，这些值分别是 -1、-1、-1、3。

换句话说，在这个博弈中，玩家 4 的优势是一个固定数额(现金)支付，而不是一个策略优势。前者自然较后者确定且是可见的，但其在理论上却不那么有意义，因为它可以通过我们的简化过程被消除。

299 **35.1.5** 我们在本节的开头看到，隅角 V、VI 和 VII 与隅角 I 的不同仅仅在于玩家排列的不同。不难证明，I 中玩家 4 的特殊地位分别由 V、VI、VII 中的玩家 1、2、3 享有。

35.2 隅角 VIII(和 II、III、IV)

35.2.1 我们接下来考虑的博弈对应着四个隅角①：II、III、IV、VIII。由于它们相互得自玩家 1、2、3、4 的适当置换，只需考虑其中之一，如 VIII。

点 VIII 对应着坐标 x_1、x_2、x_3 的取值 -1、-1、-1。因此，这个博弈的特征函数是：

$$(35{:}6)\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2 & (\text{且 } 4 \text{ 属于 } S)\\2 & (\text{且 } 4 \text{ 不属于 } S)\\3\\4\end{cases}\text{个元素时}, \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\-2\\2\\1\\0\end{cases}。$$

[这可借助 34.2.1 中的(34:1)、(34:2)和(34:3)直接得

到验证。]

让我们再次首先看一看它是否允许一个符合直觉的解释，而不应用第 6 章中的数学理论。

这一博弈的一个重要特点是，25.3 中的不等式(25:3:c)变成了等式，即当 $T=(4)$ 时，

(35:7)　　如 $S\cap T=\ominus$，那么，$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$。

也就是说：如果 S 代表一个不包含玩家 4 的联盟，那么，玩家 4 加入这个联盟并不带来优势，它既不影响这个联盟的策略局面，也不影响其对手的策略局面。这显然是(35:7)所表达的可加性的含义。①

35.2.2　这种情况暗示着下面的结论。当然，这纯粹是试探性的。② 由于玩家 4 加入任何联盟对双方来说都是完全无所谓的事情，显然，我们可以假设玩家 4 在组成该博弈的策略的交易中并不起作用。他被与其他玩家隔离开了，他独自能够得到数额 $\mathrm{v}(S)=-1$ 正是对于他来说该博弈的值。另一方面，其他玩家 1、2、3 严格地在他们中间进行这一博弈。因此，他们是在进行一个三人博弈。描 300

---

① 注意，取得玩家 4 的合作是无所谓的，这表达为(35:7)，而不表达为

$$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)。$$

也就是说，我们说一个玩家是一个"无所谓的"同伙，不是说他的加入不改变联盟的值，而是说他给这个联盟增加的数额恰好等于他在这个联盟之外的所值数额。

这一说明看似无足轻重，但存在着误解的危险，尤其在没有被简化的博弈中，其中 $\mathrm{v}[(4)]>0$，即玩家 4 的加入(尽管其在策略上无所谓！)的确增加联盟的值。

还要看到，S 与 $T=(4)$ 之间相互无所谓是一个严格的交互关系。——299，①

② 我们将在后面给出以 30.1 为基础的严格讨论。到那时，你还会发现，所有这些博弈都是有一定重要性的较一般博弈的特例。(见第 9 章，特别是 41.2。)——299，②

述最初三人博弈的特征函数 v(S)的值是：

$$
(35:6^*)\qquad \left.\begin{aligned} &\mathrm{v}(\ominus)=0,\\ &\mathrm{v}[(1)]=\mathrm{v}[(2)]=\mathrm{v}[(3)]=-1,\\ &\mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{v}[(1,3)]=\mathrm{v}[(2,3)]=2,\\ &\mathrm{v}[(1,2,3)]=1,\end{aligned}\right\} I'=(1,2,3)
$$

是当前全体玩家集。

[从(35:6)出发验证之。]

乍一看，这个三人博弈代表着一件怪事，即 v(I')（I'是当前全体玩家集！）不等于零。然而，这是完全合理的：通过消除玩家 4，我们把该博弈变成了一个非零和博弈。由于我们给予玩家 4 的值是 −1，其他玩家合起来的值是 1。我们不准备系统研究这一情况（见第 299 页脚注②）。显然，这一条件能够借助 27.1 中使用的变换的略微推广来修改。我们修改玩家 1、2、3 的博弈，假设其每人以现金的方式事先得到$\frac{1}{3}$，然后，从(35:6*)中 v(S)的值中减去同样一个数额以抵消这一做法。正如 27.1 中表明的那样，这不会影响该博弈的策略，即它生产一个策略等价的博弈。①

① 用 27.1.1 的术语：$\alpha_1^0=\alpha_2^0=\alpha_3^0=-\frac{1}{3}$。我们已经违背那里的条件(27:1)：$\sum_i \alpha_i^0=0$。这是必要的，因为我们是从一个非零和博弈开始的。

如果我们把玩家 4 考虑进去，令 $\alpha_4^0=1$，我们甚至能够保证 $\sum_i \alpha_i^0=0$。这使他像过去一样孤立，但必要的补偿会使 v[(4)]=0，其结果是显然的。

你能够将此概括为：在当前情况下，在所有策略等价型中，提供最好讨论基础的不是博弈的简化型。——300，①

考虑了上述补偿之后①,我们得到了下述新的特征函数:

$$
(35:6^{**})\quad
\begin{aligned}
&v'(\ominus)=0,\\
&v'[(1)]=v'[(2)]=v'[(3)]=-\frac{4}{3},\\
&v'[(1,2)]=v'[(1,3)]=v'[(2,3)]=\frac{4}{3},\\
&v'[(1,2,3)]=0。
\end{aligned}
$$

这是第 32 节中讨论的本质三人零和博弈的简化型,只不过单位有所不同:我们现在有 $\gamma=\frac{4}{3}$,而非 32.1.1 中(32:1)的 $\gamma=1$。因此,我们能够运用 23.1.3 的试探性结果或 301
第 32 节的严格结果。② 无论如何,让我们把自己限制于这样的解,它在两种情况中都出现且是最简单的:32.2.3 的(32:B)。这是 32.2.1 中的分配集(32:6),我们必须用当前的 $\gamma=\frac{4}{3}$ 去乘它,即

$$\left\{-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\},\left\{\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right\},\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right\}。$$

(玩家当然是 1、2、3。)换句话说:玩家 1、2、3 的策略目的是形成任一二人联盟;这方面成功的玩家,即胜利者,将得到 $\frac{2}{3}$,失败的玩家将得到 $-\frac{4}{3}$。现在,我们的最初博弈中

---

① 即 S 有几个元素,就从 $v(S)$ 中减去 $\frac{1}{3}$ 的几倍。——300,②

② 当然,目前的讨论毕竟也是试探性的。关于严格处理,见第 299 页脚注②。——301,①

的玩家1、2、3中的每一位得到的数额超过这一数额$\frac{1}{3}$。所以，上述数额$\frac{2}{3}$、$-\frac{4}{3}$必须被分别换成1、-1。

35.2.3 总结：

(35:B) 在这一博弈中，玩家4被排除在所有联盟之外。玩家1、2、3的策略目的是结成任何一个二人联盟。玩家4总是得到-1。玩家1、2、3中的每一位，当他处于胜利者之列时，得到数额1；当他失败时，得到数额-1。所有这些的基础是试探性分析。

我们也可以更准确地说，这个四人博弈只不过是一个"膨胀了的"三人博弈：玩家1、2、3的一个本质三人博弈因为"哑的"玩家4的加入而膨胀了。我们将在后面看到，这一概念有更一般的意义。(见第299页脚注②。)

35.2.4 正如33.1.2讨论的那样，我们可以将这一博弈中玩家4的哑角色与32.2.3中有歧视的解(32:A)中一位玩家遭受的排斥比较。然而，这两个现象之间存在着一个重要区别。在我们当前的结构中，玩家4的确不给任何联盟做出贡献；按照特征函数v(S)的性质，玩家4是孤立的。我们的试探性分析表明，在所有可接受的解中，他应该被所有联盟排斥在外。我们将在46.9中看到，严格理论将证明这一点。从33.1.2的意义上说，一个有歧视的解中被排斥的玩家只是在受到考虑的特殊情况中被排斥。一旦考虑这一博弈的特征函数，他

的角色与其他玩家相同。换句话说:在我们当前的博弈中,“哑”玩家是被这一情况的客观事实[特征函数 v(S)]的性质排除的。[①] 在一个有歧视的解中,被排斥的玩家只是被特殊行为标准(解)所表达的人为(虽然有一定的稳定性)“偏见”排斥了。

我们在这一节的开头看到,隅角 II、III、IV 不同于 VIII,仅仅因为玩家的置换。不难验证,玩家 4 在 VIII 中的特殊角色分别由玩家 1、2、3 享有。 302

35.3　关于 Q 内部的点及其说明

35.3.1　让我们考虑这样一个博弈,它对应着 Q 的中心,即坐标 x_1、x_2、x_3 取值 0、0、0。该博弈显然不受玩家 1、2、3、4 的任何置换的影响,即它是对称的。要看到,它是 Q 中惟一一个这样的博弈,因为完全对称性意味着 x_1、x_2、x_3 的所有置换以及其中任何两个的正负号变化(见 34.3)下它都是不变性的。所以,$x_1=x_2=x_3=0$。

这一博弈的特征函数是:

$$(35:8)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\\4\end{cases}\text{个元素时},\ \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\0\\1\\0\end{cases}。$$

[这可借助 34.2.1 中的(34:1)、(34:2)和(34:3)直接得到验证。]该博弈的严格解为数众多。事实上,我们必

① 这是 4.6.3 意义上的“物质背景”。——301,②

须说，它们千奇百怪。通过严格理论的一致运用对其进行令人满意的排序并将其系统化尚不可能。不过，已有的材料提供了一些对该理论的一些分支的真知灼见。我们将在第37节和第38节中较详细地考虑它们。

这里，我们仅仅做出如下（试探性）的说明：这一（完全）对称博弈的概念显然是，玩家的多数结成的联盟（即三人联盟）将胜利，和局的情况下（即形成两个联盟，每个联盟中有两位玩家），不存在支付。

35.3.2 Q 的中心代表着我们这一结构中惟一一个对玩家1、2、3、4的所有置换（完全）对称的博弈。几何图式还暗示着另一种对称性：即对坐标 x_1、x_2、x_3 的所有置换的对称性。以这种方式，我们选择 Q 中满足如下条件的点：

(35:9) $$x_1 = x_2 = x_3,$$

它们形成 Q 的一个*主对角线*，直线

(35:10) I—中心—VIII。

我们在34.3.1的开头看到，这一对称性恰恰意味着，该博弈是对玩家1、2、3的置换来说保持不变的。换句话说：

303 主对角线(35:9)和(35:10)代表着所有这样的博弈，这些博弈对于玩家1、2、3来说是对称的，即只有玩家4的角色特殊。

Q 还有另外三条主对角线（II—中心—V，III—中心—VI，IV—中心—VII），它们显然对应着这样的博弈，其中，另外一位玩家（玩家1、2、3）有一个特殊角色。

让我们回到主对角线(35:9)和(35:10)。我们在前

面考虑过的三个博弈(I、VIII 和中心)在这条线上。事实上,在所有这些博弈中,只有玩家4有一个特殊角色。[①] 要看到,全部这类博弈是一个单参数族。根据(35:9),这样一个博弈由值 x_1 描述,x_1 满足

(35:11)　　$-1 \leqq x_1 \leqq 1$。

上面提到的三个博弈对应着极端值 $x_1 = 1$、$x = -1$ 和中点值 $x_1 = 0$。为了深入理解严格理论的作用,我们要确定 x_1 的这些值的严格解,然后弄明白这些解如何随 x_1 沿着直线(35:10)连续变化而变化。尤其具有指导意义的是找出就特殊值 $x_1 = -1, 0, 1$ 识别的、性质上不同种类的解之间,一个如何变成另一个。我们将在 36.3.2 中给出有关现在能够得到的这方面的信息的说明。

35.3.3 另一个有意思的问题是:考虑这样一个博弈,即 Q 中的一个点,其中我们能够就预期会有什么解建立某种符合直觉的图形,如隅角 VIII。然后,我们考虑一个位于 VIII 的邻近的一个博弈,即对 x_1、x_2、x_3 略作改动。现在,我们希望找出这些邻近的博弈的严格解,并发现它们与最初的博弈有什么样的细节上的不同,即 x_1、x_2、x_3 的小的变动如何改变解。[②] 这一问题的特殊情况将在 36.1.2、37.1.1 末尾和 38.2.7 中考虑。

35.3.4 至此,我们已经考虑了 Q 的具有一定特殊位置的点所代表的博弈。[③] 当点 X 是 Q 内的某个地方,具有

---

① 在中心点,他也没有特殊角色。——303,①

② 这是数学物理中熟知的方法,其中它被用于解决一时无法直接一般地解决的问题:它是扰动分析。——303,②

③ 隅角、中心和整个主对角线。——303,③

“一般性”的位置——即在一个没有突出性质的点——时，更一般的典型问题就会产生。

现在，你也许会想到如下富有启发性的分析思路。我们对隅角 I—VIII 有了一些试探性的认识（见 35.1 和 35.2）。Q 的任何一点 X 以某种方式被这些隅角“包围”着。更确切地说，如果使用适当的权重，它是它们的重心。
304 因此，你可以猜到，由 X 代表的这些博弈的策略是由 I—VIII 代表的（较熟悉的）博弈的策略的某种组合。你甚至可以希望，这个“组合”从某种意义上说类似于将 X 与 I—VIII 联系在一起的重心的形成。①

我们将在 36.3.2 和 38.2.5 中看到，这只对 Q 的有限部分是正确，肯定不是对整个 Q 正确。实际上，在 Q 的特定内部区域发生的事情定性地不同于 I—VIII 的表现。所有这些都趋于表明，在研究涉及策略的概念或做出有关它

---

① 考虑 Q 中的两个点 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$。我们可以把两个点看作 L_3 中的两个向量。事实上我们正是在这个意义上理解重心的形成 $tX+(1-t)Y=\{tx_1+(1-t)y_1,tx_2+(1-t)y_2,tx_3+(1-t)y_3\}$。［见 16.2.1 中的（16:A:c）。］

那么，如果 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ 定义 34.2.1 中(34:1)—(34:3)意义上的特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$，那么，$tX+(1-t)Y$ 将以相同算法给出一个特征函数

$$\mathrm{u}(S)\equiv t\mathrm{v}(S)+(1-t)\mathrm{w}(S)。$$

（通过研究上面提到的公式，这一关系不难得到验证。）而且，同一个 $\mathrm{u}(S)$ 已经在 27.6.3 中的(27:10)中作为 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$ 的重心被引入了。

因此，这里的分析与 27.6 的分析是一致的。我们现在要对付的是两个以上点（8 个：I—VIII）的重心，而不是两个点的重心。这并非本质的东西：前一种运算能够通过后者的重复来得到。

根据这些说明，后面提到的困难与 27.6.3 有一个直接的关系，这是我们在那里指出过的。——304，①

们的猜想时，我们要极为小心。数学方法目前还很不成熟，我们要在这方面获得自信，尚需更多经验。

36. 主对角线讨论

36.1　隅角 VIII 的邻近：试探性讨论

36.1.1　四人博弈的系统理论尚未发展到对 Q 的任意点所代表的博弈给出全部解。我们甚至不能为每一个这样的博弈指定一个解。我们的研究只成功确定了 Q 的某些特定部分的解（有时一个，有时多个）。仅仅就 I—VIII 这 8 个点，我们完成了解的完全列举。目前，在 Q 中，解完全知道的部分形成一组具有偶然性的直线的、平面的和空间的区域。它们分布于 Q 的各个地方，但又没有完全填满它。

借助第 9 章和第 10 章的结果，对于隅角 I—VIII 来说，解的穷举很容易完成，在那里，这些博弈将被归入一般博弈的一个更大的分类。目前，我们将把自己限制于决疑法（casuistic），这一方法描述的是已知情况中 305
的特殊解。详细描述这些研究的现状[①]基本上无助于我们这里的讨论，而且会占用很大篇幅。我们将仅仅给出某些例子。我们希望这些例子有助于我们的讨论。

① 我们两人之一将在随后的数学刊物中完成这一工作。——305，①

36.1.2 我们首先考虑 Q 中主对角线 I—中心—VIII 上邻近其末端 VIII，$x_1=x_2=x_3=-1$（见 35.3.3）的条件，而且，我们将力图推广到 $x_1=x_2=x_3>-1$（见图 63）。

在这条对角线上，

$$(36:1)\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2 & (\text{且 } 4 \text{ 属于 } S)\\2 & (\text{且 } 4 \text{ 不属于 } S)\\3\\4\end{cases}\text{个元素时，}\mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\2x_1\\-2x_1\\1\\0\end{cases}。$$

[要看到，对于 $x_1=1$，这给出 35.1.1 中的(35:1)；对于 $x_1=-1$，这给出 35.2.1 中的(35:6)。]我们假设 $x_1>-1$，但大得不太多，具体大多少才合适将在后面说明。让我们首先试探性地分析这种情况。

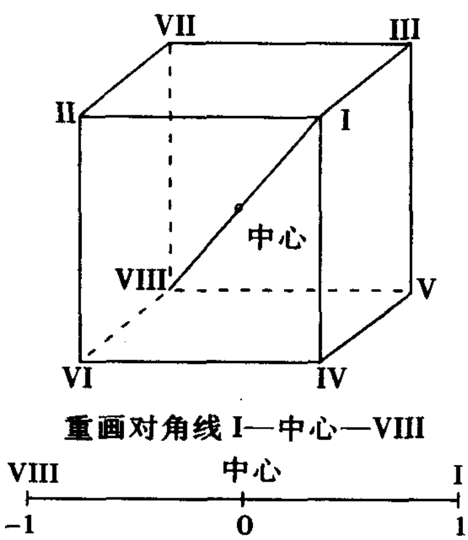


图 63

由于我们假设 x_1 离开 -1 不太远，35.2 的讨论仍然有一些指导意义。1、2、3 中两位玩家结成一个联盟也许是最重要的策略目的，但它不再是惟一的目的：当 $T=(4)$ 时①，35.2.1 的公式(35:7)是不正确的，而是 306

(36:2)　　当 $S\cap T=\ominus$ 时，　$v(S\cup T)>v(S)+v(S)$。

事实上，不难从(36:1)验证，这一额外数额总是 $2(1+x_1)$。② 对于 $x_1=-1$，它等于零，但我们有 x_1 略微 >-1，所以该表达式略微 >0。要看到，对于原先的两位玩家的联盟来说，而不是都与玩家 4 的来说，根据(36:1)、(36:2)中的额外数额③总是等于 $2(1-x_1)$。对于 $x_1=-1$，它等于 4；由于我们有 x_1 略微 >-1，它只是略微 <4。

因此，(不包含玩家 4 的两个玩家的)第一联盟较(包含玩家 4)其他联盟更牢固。不过，后者也是不容忽视的。由于第一联盟是一个牢固的联盟，我们可以猜想，它将首先形成，而且它一旦形成，它将作为一个玩家与其他玩家打交道。然后，作为最终结果，某些类型的三人联盟的形成也是预料之中的事情。

36.1.3　例如，以(1,2)作为“第一”联盟，猜测中的三人博弈是玩家(1,2)、3、4 之间的博弈。④ 在这一博弈中，23.1 的 a、b、c 是 $a=v[(3,4)]=2x_1$、$b=v[(1,2,4)]=$

---

① 除非 $S=\ominus$ 或 $-T$，在这种情况下，(36:2)中总有一个 =。即，在当前情况中，S 必定有一个或两个元素。——306,①

② 根据上面脚注①，S 有一个或两个元素，且它不包含 4。——306,②

③ 即，现在的 S、T 是两个一元集，不包含玩家 4。——306,③

④ 你可以说，(1,2)是一个虚构的人，而 3、4 是自然人。——306,④

1、$c = v[(1,2,3)] = 1$。[①] 因此，如果我们可以应用 23.1 中的结果（所有这些都是极为富有启发性的！），玩家(1,2)如果成功（加入最后联盟），那么，它得到的数额是 $\alpha = \frac{-a+b+c}{2} = 1 - x_1$；如果失败了，那么它得到数额 $-a = -2x_1$。如果成功了，玩家 3 得到的数额是 $\beta = \frac{a-b+c}{2} = x_1$；如果失败了，那么，它得到数额 $-a = -2x_1$。成功时，玩家 4 得到数额 $\gamma = \frac{a+b-c}{2} = x_1$；失败时，$-c = -1$。

与(1,2)一样，由于"第一"联盟(1,3)、(2,3)也可以形成，所以像（第 21—22 节中）关于三人博弈的讨论那样，我们有同样的理由期望这些联盟的合伙人将平分收益。因此，当这样一个联盟取得成功时，其成员预计会每人得到$\frac{1-x_1}{2}$，失败时，每人得到 x_1。

36.1.4 总结：如果这些猜想得到证明，那么，将会出现的局面是：

307 如果"第一"联盟是(1,2)，而且它成功找到一位盟友，如果与其形成最终联盟的是玩家 3，那么，玩家 1、2、3、4 分别得到数额$\frac{1-x_1}{2}$、$\frac{1-x_1}{2}$、x_1、-1。如果加入最终联盟的是玩家 4，那么，这些数额分别是$\frac{1-x_1}{2}$、$\frac{1-x_1}{2}$、

① 请牢记，在下面的所有公式中，x_1 接近于 -1，即它是负，因此 $-x_1$ 是收益，而 x_1 是损失。——306，⑤

-1、x_1。如果“第一”联盟(1,2)是不成功的，即玩家 3、4 与其作对，那么，这些玩家分别得到数额 $-x_1$、$-x_1$、x_1、x_1。

如果“第一”联盟是(1,3)或(2,3)，那么，我们必须对上述结果做相应玩家置换。

36.2　隅角 VII 的邻近：严格讨论

36.2.1　下面，我们要严格审查上面的试探性讨论。上述试探性讨论明显对应着如下猜测：

令 V 是如下分配集：

(36:3)
$$\overrightarrow{\alpha'} = \left\{\frac{1-x_1}{2}, \frac{1-x_1}{2}, x_1, -1\right\}$$
$$\overrightarrow{\alpha''} = \left\{\frac{1-x_1}{2}, \frac{1-x_1}{2}, -1, x_1\right\}$$
$$\overrightarrow{\alpha'''} = \{-x_1, -x_1, x_1, x_1\}$$

和通过玩家(即分量)1、2、3 的置换得到的分配。

(见 306 页脚注⑤。)我们预料，如果 x_1 近似等于 -1，那么，这个 V 是 30.1 的严格意义上的一个解，而且我们必须确定这是否成立，以及在 x_1 的什么区间内成立。

这得到了确认并给出如下结果：

(36:A)　　(36:3)的集合 V 是一个解，充分必要条件是

$$-1 \leqq x_1 \leqq -\frac{1}{5}。$$

那么，这就回答了这样一个问题，即($x_1 = -1$ 即隅角 VIII 的)什么范围内，上述试探性讨论导致了一个正确

的结果。[①]

36.2.2 (36:A)的证明没有任何明显的技术困难。

308 它由一系列特殊情况的机械解决组成,且不增加我们对原理性问题的进一步理解。[②] 觉得已经弄明白了的读者可以不阅读这一部分,不会失去这一论述的主线。应该牢记的是(36:A)中的结果陈述。

不过,出于如下理由,我们还是给出全部证明:(36:3)的集合 V 是通过试探性讨论发现的,即没有使用 30.1 的严格理论。有待给出的严格证明仅仅以 30.1为基础,从而使我们回到惟一令人满意的立足点,严格理论的立足点。对于更好的技术要求来说,试探性讨论只是猜测答案的工具。而且,严格理论的一个幸运之处是,其答案偶然能够以这种方式被猜到。但

---

① 我们想强调的一点是,(36:A)并不断定 V 是问题中这一博弈(x_1 的特定范围内)的惟一解。然而,有着大量类似地建立起来的集合的努力未能发现 $x \leqq -\frac{1}{5}$[即(36:A)的范围]的解。对于略微 $> -\frac{1}{5}$ 的 x_1[即(36:A)范围稍微外边一点],(36:A)的 V 不再是一个解,对于取代它的解来说也是如此。见 36.3.1 中的(36:B)。

当然,正如我们一再讨论过的那样,我们并不怀疑"有歧视"的解总是存在的。但是,它们根本不同于目前考虑的有限解 V。

这些论述似乎证明了,解的性质的某种定性变化发生在

对角线 I—中心—VIII 上的 $x_1 = -\frac{1}{5}$ 处。——307,①

② 读者可以将这一证明与有关二人零和博弈理论中的某些证明进行比较,如 16.4 与 17.6 的结合。这样一个证明更清楚,它通常覆盖更多内容,并给出有关这个题目的一些定性阐述以及它与其他数学领域的联系。在这一理论稍后一些的部分中,这样的证明被发现了,如在第 46 节中。但是,它的大部分仍然处于初级阶段,技术上的不令人满意也是典型的。——308,①

是，这样的猜测必须用严格方法加以验证，或者用严格方法确定在（其中涉及的参数的）什么范围内这一猜测是允许的。

为了使读者能够明确对比这两个过程——启发性的过程和严格过程，我们给出严格证明。

36.2.3 证明如下：

如果 $x_1=-1$，那么，我们位于隅角 VIII，且（36:3）的解与我们在 35.2.3 中（作为一个解）启发性地引入的集合一致。这能够轻易得到严格证明（见第 299 页脚注②）。所以，我们忽略这种情况并假设

（36:4）　　$x_1>-1$。

我们首先证明什么样的集合 $S\subseteq I=(1,2,3,4)$，从 31.1.2 的意义上说，是肯定必要的或肯定不必要的。这是因为，我们要给出的证明正是那里考虑的那种类型的证明。

如下结果是直接的：

（36:5）　　根据 31.1.5 中的（31:H），三元集 S 是肯定必要的，二元集值得怀疑，其他集合则是肯定不必要的。[1]

（36:6）　　每当一个二元集是一个肯定必要集，根据 31.1.3 中的（31:C），我们就可以忽略所有包含它的三元集。

所以，我们接着研究这些二元集。这当然要对（36:3）的集合 V 中的所有 $\vec{\alpha}$ 这么做。

---

① 这归因于 $n=4$。——308，②

309 首先,考虑与$\overrightarrow{\alpha'}$联系着的二元集 S。① 因为 $\alpha_4' = -1$,我们可以根据 31.1.3 中的(31:A)排除 S 包含 4 的可能性。如果 $\alpha_1' + \alpha_2' \leqq \mathrm{v}[(1,2)]$,那么,$S=(1,2)$是有效集,即 $1-x_1 \leqq -2x_1$,$x_1 \leqq -1$,根据(36:4),情况并非如此。如果 $\alpha_1' + \alpha_3' \leqq \mathrm{v}[(1,3)]$,即$\frac{1+x_1}{2} \leqq -2x_1$,$x_1 \leqq -\frac{1}{5}$,那么,$S=(1,3)$是有效集。所以,我们假定要满足的条件

(36:7) $$x_1 \leqq -\frac{1}{5}$$

第一次出现。我们不需要 $S=(2,3)$,因为 1 和 2 在$\overrightarrow{\alpha'}$中起着相同作用(见上面脚注①)。

我们接着转向$\overrightarrow{\alpha''}$。因为 $\alpha_3'' = -1$,我们排除包含 3 的 S(见上)。$S=(1,2)$如前面那样得到解决,因为$\overrightarrow{\alpha'}$,$\overrightarrow{\alpha''}$的这些分量一致。$\alpha_1'' + \alpha_4'' \leqq \mathrm{v}[(1,4)]$,即$\frac{1+x_1}{2} \leqq \mathrm{v}[(1,4)]$,$x_1$,$\geqq \frac{1}{3}$,那么,$S=(1,4)$是有效集,但根据(36:7),事情并非如此。以相同方式,$S=(2,4)$被丢弃。

最后,我们考虑$\overrightarrow{\alpha'''}$。$S=(1,2)$是有效集:$\alpha'''_1 + \alpha_2''' = \mathrm{v}[(1,2)]$,即 $-2x_1 = -2x_1$。$S=(1,3)$不必考虑,理由是:我们正在就$\overrightarrow{\alpha'''}$考虑 $S=(1,2)$,如果我们对换玩家 2 和 3

---

① 这里,以及在随后的讨论中,我们将如(36:3)中说明的那样自由使用玩家 1、2、3 的置换,以缩短篇幅。因此,读者必须把 1、2、3 的这些置换运用于我们的结果。——309,①

（见上面脚注①），这种情况就变成了（1,3），其分量分别是 $-x_1$、$-x_1$。关于有分量 $-x_1$、x_1 的 $\overrightarrow{\alpha'''}$，31.1.3 中的（31:B）使得我们最初的 $S=(1,3)$ 是不必要的，因为 $-x_1 \geqq x_1$。同样，$S=(2,3)$ 被忽略。如果 $\alpha_1''' + \alpha_4''' \leqq \mathrm{v}[(1,4)]$，即 $0 \leqq 2x_1$，$x_1 \geqq 0$，那么，$S=(1,4)$ 是有效集，但根据（36:7），情况并非如此。同样，$S=(2,4)$ 被丢弃。$S=(3,4)$ 是有效集：$\alpha_3''' + \alpha_4''' = \mathrm{v}[(3,4)]$，即 $2x_1 = 2x_1$。

总之：

（36:8）　下述三个二元集是肯定必要集，且其他的都是肯定不必要集：

对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的（1,3），对于 $\overrightarrow{\alpha'''}$ 来说的（1,2）和（3,4）。

考虑三元集 S：由 31.1.3 中的（31:A），我们可以排除对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的包含 4 和对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 来说的包含 3 的那些三元集。因此，只剩下对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的（1,2,3）和对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 来说的（1,2,4）。其中，前者被（36:6）排除了，因为它包含（36:8）的集合（1,3）。对于 $\overrightarrow{\alpha'''}$ 来说，每个三元集都包含（36:8）的集合 310
（1,2）或集合（3,4）。因此，我们可以根据（36:6）排除之。

总之：

（36:9）　下述三元集是肯定必要集，且所有其他三元集都是肯定不必要集：①

关于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 的（1,2,4）。

---

① 根据（36:5），每个三元集都是肯定必要集，这是第 274 页脚注①末尾提到的现象的另一个例子。——310,①

36.2.4 下面,我们验证 30.1.1 中的(30:5:a),即 V 中不存在一个 $\vec{\alpha}$ 占优 V 中的任何 $\vec{\beta}$。

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{\alpha'}$:由(36:8)和(36:9),我们必须用集合 $S=(1,3)$。$\overrightarrow{\alpha'}$能够用这个 S 占优$\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$或$\overrightarrow{\alpha'''}$的任意 1、2、3 置换吗?这首先要求受到考虑的分配的 1、2、3 分量中有一个 $<x_1$(这是$\overrightarrow{\alpha'}$的分量 3)。因此,$\overrightarrow{\alpha'}$和$\overrightarrow{\alpha'''}$被排除了。[①] 甚至在$\overrightarrow{\alpha''}$中,1、2 分量也被排除了(见脚注②),但第 3 个分量将满足这一要求。但是,分配$\overrightarrow{\alpha''}$的 1、2、3 分量中的另一个必须 $<\frac{1-x_1}{2}$(这是$\overrightarrow{\alpha'}$的第一个分量),情况并非如此。$\overrightarrow{\alpha''}$的 1、2 分量都 $=\frac{1-x_1}{2}$。

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{\alpha''}$:由(36:8)和(36:9),我们必须用集合 $S=(1,2,4)$。$\overrightarrow{\alpha''}$能够用这个 S 占优$\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$或$\overrightarrow{\alpha'''}$的任意 1、2、3 置换吗?这首先要求,考虑中的分配的第 4 个分量 $<x_1$(这是$\overrightarrow{\alpha''}$的第 4 个分量)。因此,$\overrightarrow{\alpha''}$、$\overrightarrow{\alpha'''}$被排除了。对于$\overrightarrow{\alpha'}$,我们还必须要求其 1、2、3 分量中的两个 $<\frac{1-x_1}{2}$(这是$\overrightarrow{\alpha''}$的 1、2 分量),情况并非如此,这些分量中只有一个 $\neq\frac{1-x_1}{2}$。

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{\alpha'''}$:由(36:8)和(36:9),我们必须用集合 $S=(1,2)$,然后是 $S=(3,4)$。$S=(1,2)$:$\overrightarrow{\alpha'''}$能够像上面描述的那样用这个 S 占优吗?这要求,这一分配的 1、2、3 分量中

---

① 事实上,$\frac{1-x_1}{2}\geq x_1$,即 $x_1\leq\frac{1}{3}$ 且 $-x_1\geq x_1$,即 $x_1\leq 0$——两者都得自(36:7)。——310,②

存在两个分量 $< -x_1$（这是$\overrightarrow{\alpha'''}$的第 1 和第 2 个分量）。情况并非如此，因为这些分量中只有一个 $\neq -x_1$。对于$\overrightarrow{\alpha'}$或 311
$\overrightarrow{\alpha''}$来说，情况也并非如此，因为这些分量中只有一个 $\neq \frac{1-x_1}{2}$。① $S=(3,4)$：$\overrightarrow{\alpha'''}$能够用这个 S 像上面描述的那样占优吗？这首先要求，这个分配的第 4 个分量 $<x_1$（这是$\overrightarrow{\alpha'''}$的第 4 个分量）。因此，$\overrightarrow{\alpha''}$和$\overrightarrow{\alpha'''}$被排除了。对于$\overrightarrow{\alpha'}$，我们还必须进一步要求其 1、2、3 分量中存在一个分量 $<x_1$（这是$\overrightarrow{\alpha'''}$的第 3 个分量），情况并非如此。所有这些分量都 $\geqq x_1$（见第 310 页脚注②）。

(30:5:a)的证明完成。

36.2.5 接下来，我们证明 30.1.1 中的(30:5:b)，即不被 V 中元素占优的 $\vec{\beta}$ 必定属于 V。

考虑不被 V 中元素占优的一个 $\vec{\beta}$。首先，假设 $\beta_4 < x_1$。如果 β_1、β_2、β_3 中任一个都 $<x_1$，我们就能够通过置换 1、2、3 做到 $\beta_3<x_1$。这给出，用(36:8)中的 $S=(3,4)$，$\overrightarrow{\alpha'''} \succ \vec{\beta}$。因此，

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geqq x_1。$$

如果 β_1、β_2、β_3 中任意两个 $<\frac{1-x_1}{2}$，我们就能够通过置换 1、2、3 做到 $\beta_1, \beta_2 < \frac{1-x_1}{2}$。这给出，用(36:9)的 $S=(1,2,$ 312

---

① 且 $\frac{1-x_1}{2} \geqq -x_1$，即 $x_1 \geqq -1$。——311，① 4)，$\overrightarrow{\alpha'''} \succ \overrightarrow{\beta}$。所以，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$ 中至多有一个 $<\frac{1-x_1}{2}$，即其中两个 $\geqq \frac{1-x_1}{2}$。通过置换 1、2、3，我们能够做到

$$\beta_1, \beta_2 \geqq \frac{1-x_1}{2}。$$

显然，$\beta_4 \geqq -1$。因此，$\overrightarrow{\beta}$ 的每个分量都 $\geqq \overrightarrow{\alpha'}$ 相应分量，加之两者都是分配①，所以它们是一致的，并属于 V。

接下来，假设 $\beta_4 \geqq x_1$。如果 β_1、β_2、β_3 中任意两个 $< -x_1$，我们就能够通过置换 1、2、3 使 β_1、$\beta_2 < -x_1$。这给出，用(36:8)的 $S=(1,2)$，$\overrightarrow{\alpha'''} \succ \overrightarrow{\beta}$。因此，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$ 中至多有一个 $< -x_1$，即其中两个 $\geqq -x_1$。通过置换 1、2、3，我们能够做到：

$$\beta_1, \beta_2 \geqq -x_1。$$

如果 $\beta_3 \geqq -x_1$，那么，所有这些意味着，$\overrightarrow{\beta}$ 的每个分量都 $\geqq \overrightarrow{\alpha'''}$ 的相应分量，加之它们都是分配(见第 311 页脚注②)，所以它们一致：$\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha''}$，且属于 V。

进而假设 $\beta_3 < x_1$。如果 β_1、β_2 之一 $<\frac{1-x_1}{2}$，我们就能够通过置换 1、2 使 $\beta_1 < \frac{1-x_1}{2}$。这给出，用(36:8)的 $S=(1,3)$，$\overrightarrow{\alpha'} \succ \overrightarrow{\beta}$。所以，

$$\beta_1, \beta_2 \geqq \frac{1-x_1}{2}。$$

① 所以其分量的和都等于零。——311，②

显然，$\beta_3 \geqq -1$。因此，$\vec{\beta}$ 的每个分量 $\geqq \overrightarrow{\alpha''}$ 的相应分量，加之它们都是分配（见第 311 页脚注②），所以它们一致：$\vec{\beta} = \overrightarrow{\alpha''}$，且属于 V。

(30:5:b) 的证明完成。[①]

这样，我们就证明了准则 (36:A)。[②]

36.3 主对角线的其余部分

36.3.1 当 x_1 超出 36.2.1 的区域 (36:A) 时，即当它跨过其边界 $x_1 = -\frac{1}{5}$ 时，那么，(36:3) 的 V 不再是一个解。实际上，我们有可能在 $x_1 > -\frac{1}{5}$（邻近 $-\frac{1}{5}$）的某一特定区域内找到一个解，为此，给 (36:3) 的 V 添加如下分配

(36:10)　　$\overrightarrow{\alpha^{iv}} = \left\{\frac{1-x_1}{2}, -x_1, \frac{-1+x_1}{2}, x_1\right\}$ 和 (36:3) 中那样的置换。[③]

严格说：

(36:B)　　(36:3) 和 (36:10) 的集合 V 是一个解，当且

---

① 读者将会看到，在这一分析过程中，(36:8) 和 (36:9) 的所有集合都为了占优而得到了使用，$\vec{\beta}$ 不得不逐个等于 (36:3) 的 $\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$、$\overrightarrow{\alpha'''}$。——312，①

② 关于 $x_1 = -1$，见这一证明开头的说明。——312，②

③ 审视上述证明告诉我们，当 x_1 变得 $> -\frac{1}{5}$ 时，这变得不正确了：集合 $S = (1,3)$［以及 (2,3)］不再是对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的有效集。当然，这不改变三元集 (1,2,3) 性质，它被排除仅仅是因为 (1,3)［和 (2,3)］被包含在其中。

因此，被 V 的 $\overrightarrow{\alpha'}$ 这样一个元素占优变得更为困难了，而且预料之中的事情是，集合 V 的变大是解的寻找中必须考虑到的事情。——312，③

仅当 $-\frac{1}{5}<x_1\leqq 0$。①

313 (36:B)的证明与上面给出的(36:A)的证明属同一类型，我们不打算在这里讨论。

区域(36:A)和(36:B)穷尽了整个可行区间 $-1\leqq x_1\leqq 1$ 的 $x_1\leqq 0$ 的部分，即对角线 VIII—中心—I 的从 VIII 到中心的那一半。

36.3.2 本质上类似于 36.2.1 的(36:A)和 36.3.1 的(36:B)中描述的 V 的解也曾经在 $x_1>0$ 的一边——即该对角线的从中心到 I 的那一半——发现过。在这一半，与(36:A)和(36:B)所包括的那一半中同类性质的变化也发生了。实际上，存在着三个这样的区间，它们是

(36:C) $\quad 0\leqq x_1<\frac{1}{9}$，

(36:D) $\quad \frac{1}{9}<x_1\leqq\frac{1}{3}$，

(36:E) $\quad \frac{1}{3}\leqq x_1\leqq 1$。

(见图 64，并将其与图 63 比较。)

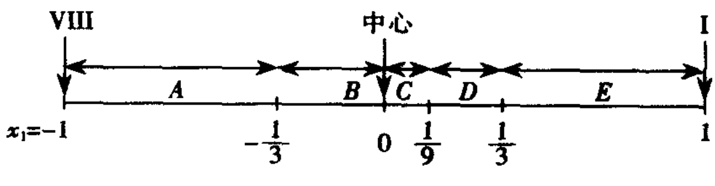


图 64

① 要看到，$x_1=-\frac{1}{5}$ 处的不连续性，而 $-\frac{1}{5}$ 属于(36:A)而不属于(36:B)！即便是在这样的问题上，该理论也是十分明确的。——312，④

我们不准备讨论有关(36:C)、(36:D)和(36:E)的解。①

不过,读者也许会注意到:$x_1=0$ 看似同时属于相邻的区域(36:B)和(36:C),而且与之类似,$x_1=\frac{1}{3}$同时属于(36:D)和(36:E)。这是因为,相应解 V 的仔细研究表明,虽然 V 的性质的变化发生在 $x_1=0$ 和$\frac{1}{3}$,但这些变化并不是不连续的。

另一方面,$x_1=\frac{1}{9}$属于与(36:C)和(36:D)都不相邻的区域。在这两个区域中成立的解 V 在 $x_1=\frac{1}{9}$处都不可用。事实上,该点处的条件尚未得到充分说明。

37. 中心及其周围

37.1　中心周围情况概述

37.1.1　上一节的分析被限制于立方体 Q 的一个一维子集:对角线 VIII—中心—I。正如 34.3 中描述的那样,通过玩家 1、2、3、4 的置换,我们能够说明 Q 的四条主对角线。借助与上一节类似的技术,我们能够沿着 Q 中

① 覆盖这一区域的一部分的另一族解将在 38.2 中讨论。尤其见 38.2.7 和第 328 页脚注②。——313,①

的其他直线寻找解。因此，Q 中存在着一个相当广阔的直线网，这些直线上的解是知道的。我们无意列举它们，尤其因为现在能够得到的信息对应着的仅仅是少量的情况。

314 然而，我们应该这么说：当有待说明是整个三维立方体 Q 时，沿着一条孤立的一维直线寻找解充其量是对问题的初步尝试。如果我们能够找到该立方体的一个三维部分——甚至一个小的部分，对于这些点，相同性质的解能够被使用，那么，关于期望之中的条件，我们就会获得一些想法。现在，围绕 Q 的中心，的确存在着这样一个三维部分。出于这一理由，我们将讨论中心点的条件。

37.1.2 中心点对应着坐标 x_1、x_2、x_3 的取值 0、0、0，而且，正如 35.3.1 中指出过的那样，它代表着这一结构中惟一一个完全对称的博弈。这一博弈的特征函数是：

$$(37:1)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\text{个元素时,}\\3\\4\end{cases}\quad \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\0\\1\\0\end{cases}$$

［见(35:8)］。正如 35.1、35.2 和 36.1 中相应的情况，我们再次从试探性分析开始。

这一博弈显然是这样一个博弈，其中所有策略努力的目的是形成一个三人联盟。被孤立的那个人是一个失败者。从这个意义上说，任何三人联盟都是胜利者，而且如果该博弈中最终形成相互对立的两个二人联盟，那么，这一局面显然应该被解释为“和局”。

这里，定性分析问题是：这一博弈中的目的是一个三

人联盟的形成。有可能，在博弈开始之前的谈判中，一个二人联盟首先形成。然后，这个二人联盟与其余两位玩家谈判，争取他们中的一位来合作对付另一位。值得提出的一个问题是，在保证第三位玩家的合作时，是否允许他享受前面两位玩家的待遇呢？如果这个问题的答案是肯定的，那么，最终联盟的总成果将在三位参与者中间平分：$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$。如果答案是否定的，那么，最初的两位成员（属于第一个二人联盟）大概会得到相同数额，这一数额大于$\frac{1}{3}$。因此，总成果1的分配大致为：$\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{1}{3}-2\varepsilon$，$\varepsilon>0$。

37.1.3　第一个选择机会类似于我们在35.1中分析点I时遇到的情况。这里，如果联盟(1,2,3)真的形成了，那么，它以相同条件包含其三个参与者。第二个选择机会是对应着36.1和36.2所分析的区间内的情况。这里，不是玩家4的任何两位玩家首先结合起来，然后，这一联盟允许其余两位玩家以不那么有利的条件进入联盟。

37.1.4　目前情况与上述两种情况都不完全相似。

在第一种情况中，联盟(1,2)无法向玩家3提出尖刻的条件，因为他们绝对需要他：如果玩家3与玩家4结盟，那么，1和2就会被彻底击败；而且，作为一个联盟，(1,2)不能与4结合起来对付3，因为4只需他们中的一个就能够取胜（见35.1.3中的描述）。在我们目前的博弈中，情况并非如此：联盟(1,2)能够利用3，也能够利用4，而且即便3和4联合起来反对它，结果也只是一个和局。 315

在第二种情况中，最后进入三人联盟的成员受到歧视是明显的事情，因为最初的二人联盟是一个远比最终的三人联盟更牢固的结构。事实上，由于 x_1 趋于 -1，后一个联盟区域变得没有价值。见 36.1.2 末尾的说明。在我们目前的这个博弈中，不存在如下可识别的性质上的不同：第一（二人）联盟导致失败与导致和局之间的不同，而最终（三人）联盟的形成是在和局与胜利之间做出的选择的结果。

关于这一决策，除了尝试上面提到的两种选择机会之外，我们没有令人满意的基础。不过，在这么做之前，我们的分析的一个重要缺陷值得关注。

37.2 两种选择及对称性的作用

37.2.1 你会注意到，我们将假设上述两种选择中的同一个对三位玩家的所有四个联盟都成立。事实上，我们正在寻找一个对称的解，即它包含分配 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 及其所有置换。

一般来说，该博弈的对称性并不意味着其每一个解都是对称的。对于三人博弈来说，33.1.1 中讨论的有歧视解十分清楚地说明了这一点。我们将在 37.6 中发现更多此类对称的四人博弈的例子。

然而，有一点是肯定的，即对于试探性的初步研究来说，一个对称博弈的不对称解过于玄妙。（见三人博弈中出现的类似事情。）这正是我们目前仅仅研究对称解的理由。

37.2.2 还要说明的一点是：虽然存在着不对称的

解，像我们上面的两种选择中相应的原理那样，一般组织原理对于全体玩家或部分玩家都是成立的。这一猜测得到如下考虑的加强，即参与者个数仍然很小，且事实上小得不允许有着不同组织原理的若干参与者群体形成。事实上，我们只有四个参与者，且有大量证据表明任何种类的组织都有一个最小人数。这些有点含糊的考虑将在 43.4.2 中的(43:L)的一个特例中得到严格说明。然而，就目前情况而言，我们还不能用严格证明来支持它们。

37.3　中心点处的第一选择

37.3.1　让我们考虑 37.1.2 的两个选择机会。我们按照相反的循序研究它们。 316

首先，假设最初的两位玩家允许第三位玩家有十分不利的待遇。那么，第一(二人)联盟必须被当作最终联盟的核心。所以，在最后阶段，第一联盟必须被当作一位玩家，与另外两位玩家打交道，从而形成一个三人博弈之类的东西。如果这一观点是站得住脚的，那么，我们就可以重复 36.1.3 的相应分析。

比如，取(1,2)为"第一"联盟，猜测中的三人博弈是玩家(1,2)、3、4 之间的博弈。上面提到的分析完全适用，只需改变数值：$a=0, b=c=1$ 和 $\alpha=1, \beta=\gamma=0$。[①]

由于"第一"联盟可以由任何两位玩家组成，与(第 21—22 节中)关于三人博弈的讨论类似，我们有理由认

① 这里的讨论与前述讨论之间的基本区别是，玩家 4 不再被排除在"第一"联盟之外。——316，①

为，当找到一个盟友时，以及当结果是和局时，联盟成员将平分利益，这里，被平分的数额分别是 1 和 0。①

37.3.2 总之：如果上述猜测得到证明，那么，情况如下：

如果“第一”联盟是(1,2)且它成功地找到了盟友，并且在最终联盟中与之结盟的是玩家 3，那么，玩家 1、2、3、4 分别得到数额$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、0、-1。如果“第一”联盟不成功，即结果是一个和局，那么，这些数额是 0、0、0、0。

如果玩家的分布不同，那么，玩家 1、2、3、4 的相应置换必定适用于上述情况。

所有这些必须接受严格检查。这一试探性的暗示显然对应着下述猜测：

令 V 是如下分配的集合：

(37:2) $\overrightarrow{\alpha'} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1\}$，$\overrightarrow{\alpha''} = \{0,0,0,0\}$ 和通过

玩家(即分量)1、2、3、4 置换由此得到的分配。

我们预计，这个 V 是一个解。

317 像 36.2 中那样的严格分析表明，这个 V 的确是 30.1 意义上的一个解。我们不在这里给出严格分析，主要原因是它被包含在后面将要给出的更为严格的证明之中。(见第 316 页脚注②。)

---

① 这一说法在这种情况下要比在前述情况(或 36.1.3 中等相应应用)中弱得多，因为每个“第一”联盟可以两种方式告终(和局和胜利)。当严格理论得到运用时，我们才能评说这一论证的价值。38.2.1—38.2.3 的证明中实际上包含着这么做的合理性。事实上，它是 38.2.3 中(38:D)的如下特殊情况：

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$。——316，②

37.4 中心点处的第二选择

37.4.1 接下来，我们假设最终三人联盟以相同条件包含其所有参与者。那么，如果这个联盟是(1,2,3)，玩家 1、2、3、4 分别得到数额$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、-1。

不要盲目地据此得出结论说我们指望由此产生的分配集 V 是一个解，这些分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的集合是：

(37:3)　　$\overrightarrow{\alpha'''}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1\}$ 及(37:2)中那样的置换。

我们尚未试着理解，在不假设先前存在着一个二人联盟核心的情况下，最终联盟是如何形成的。

37.4.2 在(37:2)的解中，这样一种解释是清晰可见的。最终联盟有层次的形成表达为分配$\overrightarrow{\alpha'}$，且选择这一分配的动机在于一个和局的威胁，表达为$\overrightarrow{\alpha''}$。严格说：$\overrightarrow{\alpha'}$自身并不形成一个解，只是在它与$\overrightarrow{\alpha''}$结合起来时，它才是一个解。

(37:3)中缺乏上述第二个因素。30.1 意义上的直接检查表明，$\overrightarrow{\alpha'''}$满足那里的条件(30:5:a)，但不满足(30:5:b)。也就是说，它们不相互占优，但它们留下一些未被占优的分配。因此，更多元素必须被加入 V。①

---

① 要避免的一个误解：不相互占优的分配组成的任何集合都能够被扩展为一个解。一般来说，这一说法并不正确。事实上，识别一个给定的分配集是否是某个(未知的)解的一个子集的问题尚未解决。见 30.3.7。

在目前情况下，我们正表达着这样一种希望，即对于(37:3)的 V 来说，这样一个扩展将被证明是可能的，而且这一希望将在后面得到进一步证明。——317,①

要添加的分配肯定不是(37:2)的$\overrightarrow{\alpha''}=\{0,0,0,0\}$,因为这一分配被$\overrightarrow{\alpha'''}$占优。① 换句话说,如(37:2)的$\overrightarrow{\alpha'}$的情况那样,在(37:3)的情况下,$\overrightarrow{\alpha'''}$扩展成一个解(即4.3.3意义上的稳定化)必须借助一个完全不同的分配(即威胁)来实现。

要为现在必需的步骤找出一个试探性的分析看似十分困难。然而,幸运的是,从此以后,一个严格的过程是可能
318 的,从而使试探性分析不再是必要的。事实上,我们能够严格证明,从(37:3)的V到一个解的扩展是存在的,且是惟一一个对称的扩展。要添加的分配$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$是:

(37:4) $\overrightarrow{\alpha^{iv}}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\}$及(37:2)中那样的置换。

37.4.3 如果需要给这个解——即其组成部分,(37:4)的$\overrightarrow{\alpha^{iv}}$——一个常识性的解释,我们必须说,它不大可能是一个和局[就像(37:2)中相应的$\overrightarrow{\alpha''}$],相反,它似乎是可能的胜利联盟的一部分(两个成员)与另外两个玩家之间的某种妥协。然而,如上所述,我们并不试图为(37:3)和(37:4)的V找一个富有启发性的解释。事实上,这部分严格理论已经使其不大可能。② 另外,后面有些例子将在更广泛的基础上证明这个解的奇妙性。再次,我们不给出上述结果的严格证明。

---

① 用S=(1,2,3)。——317,②

② 当然,这是数学物理理论中常有的事情,尽管数学物理理论源于启发性分析。——318,①

37.5 两个中心解的比较

37.5.1 解(37:2)与解(37:3)、(37:4)都是我们为重心点所对应博弈找到的解,这是解的可能多样性又一个例子。当然,我们在前面就看到过这一现象,即 33.1.1 中的本质三人博弈。但是,在那里,除一个解之外,其余所有解都是不正常的(我们用"歧视"这一术语描述这一现象)。在那种情况下,只有一个解是有限分配集。惟有这个解与博弈本身具有相同的对称性(即对所有玩家对称)。现在,情况则相当不同。我们发现了两个都是有限分配集的解[①],而且它们都有该博弈的充分对称性。37.1.2 的讨论表明,在任何情况下,都难以把这两个解中的任何一个解说成"不正常"或"有歧视"。它们有着基本的不同,其不同在于三人联盟中的最后一个玩家被对待的方式不同,从而看似对应着两个完全正常的社会组织原理。

37.5.2 如果说有什么不正常的话,倒是解(37:3)和(37:4)或许有点不正常。在(37:2)中以及在(37:3)、(37:4)中,解的特征都是由这样一些分配决定的,这些分配分别描述的是完备决策 $\overrightarrow{\alpha'}$ 和 $\overrightarrow{\alpha''}$。对于这些额外"稳定化"分配,$\overrightarrow{\alpha''}$、$\overrightarrow{\alpha''}$ 不得不被添加上。在第一个解中,这个额 319
外 $\overrightarrow{\alpha''}$ 的一个明显的试探性解释是一个和局,而在第二个解中,额外的 $\overrightarrow{\alpha''}$ 的本质要复杂得多。

然而,一个较为全面的分析说明,第一个解的周围有

---

① 给定的分配及其不同置换的计数并不困难,解(37:2)由 13 个元素组成,而解(37:3)、(37:4)则有 10 个元素。——318,②

一些奇特的现象，这些现象是轻易得到这个解的启发性方法无法解释和无法预见的。

从一般观点来看，这些现象也是相当具有启发性的，因为它们以一种相当引人注目的方式说明了我们的理论的某些可能性和解释。因此，我们将在后面详细分析它们。不过，第二个解的类似扩展至今尚未被发现。

37.6 不对称的中心解

37.6.1 首先，存在着有限个与 37.3.2 中(37:2)有密切联系的不对称解，因为它们包含分配 $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,-1\right\}$ 的某些置换。[①] 这些解中的一个是我们从两边沿着对角线 I—中心—VIII 逼近中心并用 36.3 中提到的解得到的那个解。也就是说：它是通过连续拟合那里提到的区域(36:B)和(36:C)来得到的。(点 $x_1=0$，即中心，同时属于这些区域，见 36.3.2。)由于这个解也能够被用于表达特有的社会组织原理，我们将对其进行简要描述。

这个解与属于对角线 I—中心—VIII 上的博弈的解有相同的对称性，就像其中之一实际表现出来的那样：关于玩家 1、2、3 对称，而玩家 4 占据一个特殊地位。[②] 因此，我们将像我们在对角线上做的那样讨论这个解，如 36.2.1 中(36:3)中那样。这里，被禁止的置换只是玩家 1、2、3 的置换，而在(37:3)和(37:4)的描述中，我们禁止了玩家 1、

① 即这个分配的 12 个置换的某些而不是全部。——319，①

② 玩家 4 在这个解中的地位真正不同于其他玩家。正是这一点使这个解有别于上述两个对称解。——319，②

2、3、4 的所有置换。

37.6.2 为便于比较，我们用这一符号（即只允许玩家 1、2、3 的置换）重述 37.3.2 中我们的第一个完全对称解(37:2)。它由如下分配组成：①

$$(37:2^*)\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{\beta'} &= \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,-1\right\} \\ \overrightarrow{\beta''} &= \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right\} \\ \overrightarrow{\beta'''} &= \left\{\frac{1}{2},0,-1,\frac{1}{2}\right\} \\ \overrightarrow{\beta^{iv}} &= \{0,0,0,0\} \end{aligned}$$

以及通过置换玩家 1、2、3 从这些分配中得到的分配。

我们所说的（不对称）解由如下分配组成： 320

(37:5)　(37:2*)中那样的$\overrightarrow{\beta'}$、$\overrightarrow{\beta''}$和$\overrightarrow{\beta^{iv}}$；$\overrightarrow{\beta^{v}} = \left\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\right\}$②；以及通过置换玩家 1、2、3 从这些分配中得到的分配。

我们再次忽略(37:5)是一个解的证明。不过，我们将对这个解与(37:2)的解——即 37.3.2 中的第一个（对

---

① $\overrightarrow{\beta'}$、$\overrightarrow{\beta''}$、$\overrightarrow{\beta'''}$穷尽了 37.3.2 中(37:2)的$\overrightarrow{\alpha'}$，$\overrightarrow{\beta^{iv}}$是那里的$\overrightarrow{\alpha''}$。

$\overrightarrow{\alpha'}$必须用$\overrightarrow{\beta'}$、$\overrightarrow{\beta''}$、$\overrightarrow{\beta'''}$这三个分配来表达，因为这个表达体系必须说明玩家 4 在这个分配的三个可能位置（即值$\frac{1}{2}$、0、-1）中的哪一个。——319，③

② $\overrightarrow{\beta^{v}}$让人联想到 37.4.2 的(37:4)中$\overrightarrow{\beta^{iv}}$的排列，但是做出那种类似的事情是不可能的。——320，①

称)解——之间的不同做出解释。

37.6.3 这一不同是

$$\overrightarrow{\beta'''} = \{\frac{1}{2}, 0, -1, \frac{1}{2}\}$$

被

$$\overrightarrow{\beta^{v}} = \{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\}$$

取代了。也就是说:$\overrightarrow{\beta'''}$——其中玩家 4 本来属于“第一”联盟(见 37.3.1),即属于赢得最大数额$\frac{1}{2}$的组——被消除了,取而代之的是分配$\overrightarrow{\beta^{v}}$。现在,玩家 4 得到的数额少了,而且玩家 1、2、3 中遭受损失的玩家(当前排列中的玩家 3)得到的数额大于$\overrightarrow{\beta'''}$中的数额。这一不同恰好是$\frac{1}{2}$,因此玩家 4 取得了和局的待遇,而玩家 3 从完全失败 -1 变成了中间情况 $-\frac{1}{2}$。

玩家 1、2、3 形成一个“特权”群体,这个群体外部的人不允许进入“第一”联盟。但是,甚至在这个特权群体内的三个成员中间也存在着斗争,因为“第一”联盟只有两位参与者。值得注意的是,如$\overrightarrow{\beta''}$中的情况那样,这个特权群体内的一个成员甚至有可能完全失败,他所属“阶层”按多数原则决定由谁组成“第一”联盟,并由他们决定“没有特权”的玩家 4 有资格成为“最终”联盟的第三个成员。

37.6.4 读者将会注意到,这描述了一个完全可能的社会组织形式。可以肯定的是,这一组织形式是歧视性

的，尽管歧视方式不像三人博弈的“有歧视”解那么简单。它描述了一种较为复杂而精妙的社会关系，这归于这个解而非博弈本身。① 你也许认为，它有一定的随意性，不过，由于我们正在讨论一个规模十分小的“社会”，所有可能的行为标准都必须被相当精确和巧妙地调整到其尽可能的狭义形式。

我们很少需要详述这样一个事实，即对 4 之外的任一玩家（1、2、3）的类似歧视也能够用适当的解来表达，这进 321
一步联系到 Q 的其余三条对角线。

38. 中心点邻近的一族解

38.1 属于中心点处第一种选择的解及其变换

38.1.1 我们继续分析 37.3.2 中解（37:2）的衍生结果。它似乎适合一个特殊的变换而不失去其作为一个解的特征。

这个变换是用一个普通的（正）数值因子 z 去乘 37.3.2 的分配（37:2）。以这种方式，我们得到下列分配集合：

(38:1) $\overrightarrow{\gamma'} = \{\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, 0, -z\}, \overrightarrow{\gamma''} = \{0,0,0,0\}$ 以及

通过置换玩家 1、2、3、4 从这两个分配得到的分配。

① 关于这一特点，见 35.2.4 的讨论。——320，②

为保证这些向量是分配，它们的所有分量都必须$\geqq -1$，即v[(i)]的普通值。当$z>0$时，这仅仅意味着$-z\geqq -1$，即我们必须有：

(38:2)　　$0<z\leqq 1$。

对于$z=1$，我们的(38:1)与37.3.2的(37:2)一致。对于(38:2)中其他的z，(38:1)看似不应该是同一博弈的解。然而，简单的讨论表明，当且仅当$z>\frac{2}{3}$，它才是一个解，即(38:2)换成

(38:3)　　$\frac{2}{3}<z\leqq 1$。

这一族解的重要性因这样一个事实而增加了，即它能够被扩展为环绕立方体Q的中心的一个三维体。我们将对此进行详细讨论，因为它提供了一个机会以证明在这些研究中有着广泛用处的一个技术。

这些结果的解释将在后面给出。

38.1.2　我们首先要看到的是，对于37.1.2中(37:1)描述的博弈(即Q的中心)，(38:1)界定的集合V的分析能够被替换另一个博弈中37.3.2中的(37:2)的最初集合V的分析。事实上，我们的(38:1)得自z乘以(37:2)。如不想这样，我们能够保持(37:2)并用$1/z$乘以特征函数(37:1)；这会破坏正规化$\gamma=1$，而$\gamma=1$是用Q进行图示所必需的(见34.2.2)。不过，我们准备接受它。

我们目前的任务能够被描述为：

迄今为止，我们从一个给定的博弈开始，并寻找了解。

322 现在，我们准备把这个过程颠倒过来，从一个解出发，并寻

找博弈。严格说：我们从一个给定的分配集 V 出发，我们的问题是，对于什么样的特征函数 v(S)（即博弈）来说，这个 V 是一个解。①

37.1.2 中(37:1)的 v(S)被一个公因数乘意味着，我们仍然要求

(38:4)　　当 S 是一个二元集时，v(S) = 0，

但是，除此之外，我们只要求该博弈的简化特征（见 27.1.4），即

(38:5)　　v[(1)] = v[(2)] = v[(3)] = v[(4)]。

事实上，(38:5)的连结值是 −1/z，从而(38:4)、(38:5)和 25.3.1 中的(25:3:a)、(25:3:b)给出的结果是，这个v(S)正是(37:1)被 1/z 乘。我们的结论(38:3)意味着，37.3.2 中(37:2)的 V 对于(38:4)和(38:5)而言是一个解的充分必要条件是，(38:5)的连结值（即 −/z）≦ −1 且 $> -\frac{3}{2}$。

38.1.3　现在，我们进一步，放弃简化条件，即(38:5)。这样，我们只要求 v(S)满足(38:4)，限制其二元集 S

---

① 就存在着的类型和程度来说，这个相反的过程相当具有数学方法的典型特征。虽然从最严格的数学眼光来看，最初它使研究转向了必定被认为不自然的方向，但它是有效的。借助适当的巧妙技术处理，它最终将揭示以其他方式未曾发现过的解。

关于目前这一情况，没有可依赖的试探性分析，只能靠纯粹数学技巧求解，但我们原有的例子之后试探性分析是有指导意义的。

对于不满足于使用这些方法（即纯粹技术的和非概念性的方法）的读者来说，我们认为，这些方法是数学分析中自由而合理地使用的。

我们已经多次发现，试探性方法较严格方法更易于掌握，目前的情况提供了一个相反的例子。——322，①

的取值。我们重述我们的问题的最终形式：

(38:A)　考虑所有四人零和博弈，其中

(38:6)　对于所有二元集 S，$v(S)=0$。

对于这些博弈中的哪一个来说，37.3.2 中 (37:2) 的集合 V 是一个解？

你将注意到，由于我们不再要求 $v(S)$ 的正规化和简化，与 Q 中的图示的所有联系都是危险的。因此，为了把我们即将得到的结果重新放在 Q 之中，一种特殊的技术处理终归是必要的。

38.2 严格讨论

38.2.1 问题(38:A)的未知数显然是

(38:7)　$v[(1)]=-y_1, v[(2)]=-y_2, v[(3)]=-y_3, v[(4)]=-y_4$。

我们要确定限制(38:A)中条件的什么条件真正约束着数字 y_1、y_2、y_3、y_4。

323 这个博弈不再是对称的。[1] 因此，只有同时进行 y_1、y_2、y_3、y_4 的置换，玩家 1、2、3、4 的置换才是合理的。[2]

首先，37.3.2 中 (37:2) 的向量中与给定的玩家 k 联系着的最小分量是 -1。因此，要使这些向量是分配，当且仅当 $-1 \geqq v[(k)]$，即

(38:8)　$y_k \geqq 1$,　$k=1,2,3,4$。

---

① 除非 $y_1=y_2=y_3=y_4$。——323，①

② 不过，正如我们在 37.3.2 中 (37:2) 的描述那样，如此使用 1、2、3、4 的置换无可置疑。——323，②

因此，作为一个分配集，V 的特征建立起来了。接下来，让我们看一看它是否是一个解。这一研究类似于 36.2.3—36.2.5 中给出的证明。

38.2.2　36.2.3 的(36:5)和(36:6)再次适用。当 $\alpha_i+\alpha_j\leqq 0$ 时，二元集 $S=(i,j)$ 是一个对于 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 来说的有效集[见(38:A)]。因此，对于(37:2)的 $\overrightarrow{\alpha'}$ 和 $\overrightarrow{\alpha''}$，我们有：在 $\overrightarrow{\alpha''}$ 中，每个二元集 S 都是有效的。在 $\overrightarrow{\alpha'}$ 中：任何不包含玩家 4 的二元集 S 都不是有效的，而包含玩家 4 的二元集(1,4)、(2,4)、(3,4)显然是有效的。然而，如果我们考虑集合 $S=(1,4)$，我们可以略去另外两个；$S=(2,4)$得自玩家 1、3 对换，而这样的对换不影响 $\overrightarrow{\alpha'}$。① 1、3 对换之后，由于$\frac{1}{2}\geqq 0$，$S=(3,4)$实际上劣于它。②

总之：

(38:B)　对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的，二元集(1,4)③是肯定必要集；对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 来说，所有二元集都是肯定不必要集。

关于三元集：根据上述结果，我们可以根据(36:6)排除所有对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 而言的三元集，以及包含(1,4)或(2,4)的对于 $\overrightarrow{\alpha'}$

---

① 尽管有上述脚注①，这一置换及后面的类似置换显然是合理的工具。见第 309 页脚注①和上面的脚注②。——323，③

② 当 $v[(4)]=-1$，即 $y_4=1$ 时，由于 $\alpha_4'=-1$ 时，我们能够忽略所有这些集合，包括 $S=(1,4)$。但是，我们不必这么做。我们宁愿不那么做，为的是既能够使 $y_4=1$，也能够使 $y_4>1$。——323，④

③ 以及 1、2、3、4 的所有置换；这些也改变 $\overrightarrow{\alpha'}$。——323，⑤

而言的那些三元集。[1] 这只剩下对于$\overrightarrow{\alpha'}$而言的$S=(1,2,3)$。

总之：

(38:C)　　　对于$\overrightarrow{\alpha'}$来说，三元集(1,2,3)是肯定必要集，其他三元集都是肯定不必要集。

324 我们请读者验证30.1.1中的(30:5:a)，即不存在V中的$\overrightarrow{\alpha'}$占优V中的$\vec{\beta}$。[见36.2.4中证明的相应部分。实际上，后面的(30:5:b)的证明中也包含这些必要步骤。]

38.2.3 接下来，我们验证30.1.1中的(30:5:b)，即不被V的元素占优的一个分配$\vec{\beta}$必定属于V。

考虑不被V的元素占优的一个$\vec{\beta}$。如果β_1、β_2、β_3、β_4中任意两个<0，我们就能够(通过置换1、2、3、4)使β_1、$\beta_2<0$。这给出(38:B)的用$S=(1,2)$，$\overrightarrow{\alpha''}\succ\vec{\beta}$。因此，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$、$\beta_4$中至多有一个$<0$。如果都不$<0$，那么，它们都$\geqq 0$。这样，$\vec{\beta}$的每个分量都$\geqq\overrightarrow{\alpha''}$的相应分量，加之两者都是分配(见第311页脚注②)，所以它们相同，$\vec{\beta}=\overrightarrow{\alpha''}$，且它属于V。

所以，β_1、β_2、β_3、β_4中恰好有一个<0。通过置换1、2、3、4，我们能够使这个小于零的分量是β_4。

如果β_1、β_2、β_3中任意两个$<\frac{1}{2}$，我们就能够通过置换1、2、3使β_1、$\beta_2<\frac{1}{2}$。另外，$\beta_4<0$。这样，3和4的置换给出(38:C)，用$S=(1,2,3)$，$\overrightarrow{\alpha'}\succ\vec{\beta}$。因此，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$中至多有一个$<\frac{1}{2}$。如果都不$<\frac{1}{2}$，那么，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$都$\geqq\frac{1}{2}$。从

[1] 后者是通过对换玩家1、2从前者得到的，这不影响$\overrightarrow{\alpha'}$。——323，⑥

而，$\beta_4 \leqq -\frac{3}{2}$。但是，$\beta_4 \geqq \mathrm{v}[(4)] = -\gamma_4$，所以这必然要求 $-\gamma_4 \leqq -\frac{3}{2}$，即 $\gamma_4 \geqq \frac{3}{2}$。故，要排除这种可能性，我们需要 $\gamma_4 < \frac{3}{2}$。而且，由于我们可以自由地置换 1、2、3、4，我们甚至要求

$$(38:9) \qquad \gamma_k < \frac{3}{2}, \quad k = 1, 2, 3, 4。$$

若这一条件得到满足，那么，我们就能够下结论说，β_1、β_2、β_3 中恰好有一个 $<\frac{1}{2}$。通过置换 1、2、3，我们能够使其是 β_3。

这样，β_1、$\beta_2 \geqq \frac{1}{2}$，$\beta_3 \geqq 0$。如果 $\beta_4 \geqq -1$[①]，那么，$\vec{\beta}$ 的每个分量 $\geqq \overrightarrow{\alpha'}$ 的相应分量，加之两者都是分配（见第 311 页脚注②），它们相同：$\vec{\beta} = \overrightarrow{\alpha'}$ 且属于 V。

所以，$\beta_4 < -1$。又，$\beta_3 < \frac{1}{2}$。故，1 和 3 的对换给出，用(38:B)的 $S = (1, 4)$，$\overrightarrow{\alpha'} \succ \vec{\beta}$。

最终，这是一个矛盾，从而完成了 30.1.1 中(30:5:b)的验证。

这一证明中需要的条件(38:9)事实上是必要条件：不难证明，

$$\overrightarrow{\beta'} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

---

① 如果 $\mathrm{v}[(4)] = -1$，即如果 $\gamma_4 = -1$，那么，情况肯定是这样。但是，我们不想做出这一假设。（见第 323 页脚注④。）——324，①

325 不被我们的 V 占优，且防止它是一个分配的惟一办法是使 $-\frac{3}{2}<\mathrm{v}[(4)]$，即 $y_4<\frac{3}{2}$。① 置换 1、2、3、4 给出(38:9)。

因此，我们恰好需要(38:8)和(38:9)。总之：

(38:D) 37.3.2 中(37:2)的 V 是(38:A)的一个博弈[那里的(38:6)，(38:7)]的一个解，当且仅当，

$$1\leqq y_k<\frac{3}{2},\quad k=1,2,3,4。\tag{38:10}$$

38.2.4 接下来，我们重新引入我们在前面暂时放弃的正规化和简化，正如(38:A)后面直接指出的那样，这是将这些结果与 Q 联系起来所必需的。

27.1.4 的简化公式表明，玩家 k 的份额必须用那里的数额 α_k^0 替换

$$\alpha_k^0=-\mathrm{v}[(k)]+\frac{1}{4}\{\mathrm{v}[(1)]+\mathrm{v}[(2)]+\mathrm{v}[(3)]+\mathrm{v}[(4)]\}$$

$$=y_k-\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4),$$

---

① 要看到，V 未能占优这个 $\overrightarrow{\beta'}$ 并不能通过把 $\overrightarrow{\beta'}$ 添加到 V 之中的办法来纠正。事实上，$\overrightarrow{\beta'}$ 占优 用 $S=(1,2,3)$，$\overrightarrow{\alpha''}=\{0,0,0,0\}$，所以从 V 中将 $\overrightarrow{\alpha''}$ 去掉是必要的，从而创造了新的不被占优的分配等。

如果 $y_1=y_2=y_3=y_4=\frac{3}{2}$，那么，用 $\frac{2}{3}$ 改变计算单位将我们的博弈变回 37.4.1 中(37:1)的形式，且上述 $\overrightarrow{\beta'}$ 变成 $\overrightarrow{\alpha^{iv}}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1\}$。将我们的 V 变成一个解的进一步努力大概会将其逐步变成 37.4.1—37.4.2 中的(37:3)、(37:4)。这是值得的，因为我们是从 37.3.2 中(37:2)开始的。

解(37:2)与解(37:3)、(37:4)之间的这些联系应该得到进一步研究。——325，①

且

$$\gamma = -\frac{1}{4}\{v[(1)]+v[(2)]+v[(3)]+v[(4)]\}$$

$$=\frac{1}{4}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)。$$

对于二元集 $S=(i,j)$，$v(S)$ 从其最初的值 0 增加到了

$$\alpha_i^0+\alpha_j^0=\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)$$

$$=\frac{1}{2}(\gamma_i+\gamma_j-\gamma_k-\gamma_l)$$

（k、l 是不同于 i、j 的两位玩家）。

根据(38:10)，显然上述 $\gamma \geqq 1>0$，从而这个博弈是一个本质博弈。用 γ 去除特征函数和每位玩家的份额就实现了正规化。所以，对于 $S=(i,j)$，$v(S)$ 进一步变成

$$\frac{\alpha_i^0+\alpha_j^0}{\gamma}=2\frac{\gamma_i+\gamma_j-\gamma_k-\gamma_l}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}。$$

如我们在 34.2.1 中对 Q 所代表的情况所做的那样，这是正规化和简化的特征函数。(34:2)与上述公式合起来给出 Q 中的坐标 x_1、x_2、x_3： 326

(38:11)
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4}{\gamma_1+\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4}, \\ x_2=\dfrac{-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4}{\gamma_1+\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4}, \\ x_3=\dfrac{-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}{\gamma_1+\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4}。\end{cases}$$

38.2.5 所以，(38:10)和(38:11)合起来界定 Q 的一个部分，在这一部分中，这些解——即转变为上述解的

37.3.2 中的解(37:2)——能够被使用。这个定义是详尽的,却是隐含的。让我们将其明确。也就是说,对于 Q 中有坐标 x_1、x_2、x_3 的点,让我们确定,(38:10)和(38:11)是否能够由恰当的 y_1、y_2、y_3、y_4 来满足。

我们令假设中的 y_1、y_2、y_3、y_4 满足

$$(38:12)\qquad y_1+y_2+y_3+y_4=\frac{4}{z}$$

其中 z 有待确定,那么,方程(38:11)变成

$$(38:12^*)\qquad \begin{cases} y_1-y_2-y_3+y_4=\dfrac{4x_1}{z},\\ -y_1+y_2-y_3+y_4=\dfrac{4x_2}{z},\\ -y_1-y_2+y_3+y_4=\dfrac{4x_3}{z}。\end{cases}$$

对 y_1、y_2、y_3、y_4 求解(38:12)和(38:12*)得:

$$(38:13)\qquad \begin{cases} y_1=\dfrac{1+x_1-x_2-x_3}{z}, & y_2=\dfrac{1-x_1+x_2-x_3}{z},\\ y_3=\dfrac{1-x_1-x_2+x_3}{z}, & y_4=\dfrac{1+x_1+x_2+x_3}{z}。\end{cases}$$

现在,(38:11)得到满足,而且我们必须使用我们选择 z 的自由使(38:10)得到满足。

令 w、v 分别是下述四个数中的最大的和最小的:

$$(38:14)\qquad \begin{aligned} &u_1=1+x_1-x_2-x_3, \quad u_2=1-x_1+x_2-x_3,\\ &u_3=1-x_1-x_2+x_3, \quad u_4=1+x_1+x_2+x_3。\end{aligned}$$

由于 x_1、x_2、x_3 是被假定的,这些数是已知的。

(38:10)明显意味着,$1\leqq v/z$ 且 $w/z<\dfrac{3}{2}$,即这意味着,

(38:15)
$$\frac{2}{3}w < z \leqq v_\circ$$

显然，要使这一条件得到满足，当且仅当

(38:16)
$$\frac{2}{3}w < v_\circ$$

而且，如果(38:16)得到满足，那么，条件(38:15)允许无 327
穷多个 z 值——整个区间。

38.2.6 在根据(38:15)和(38:16)给出任何结论之前，我们给出明确公式以表明 37.3.2 的解(37:2)因为我们的变换而变成了什么。我们必须取那里的 $\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$，在第 k 个分量(即第 k 个玩家的份额)上加上 α_k 并除以 γ。

这个巧妙的变换将第 k 个分量——它们是(37:2)的 $\frac{1}{2}$、0、-1——的可能值进行了变换。我们首先考虑 $k=1$ 并使用上面关于 α_k 和 γ 的表达式以及(38:13)，那么，

$$\frac{1}{2}\text{变成}\frac{\frac{1}{2}+\alpha_1}{\gamma}=\frac{2+4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4}$$
$$=\frac{z}{2}+x_1-x_2-x_3,$$

$$0\text{ 变成}\frac{\alpha_1}{\gamma}=\frac{4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4}$$
$$=x_1-x_2-x_3,$$
$$-1\text{ 变成}\frac{-1+\alpha_1}{\gamma}=\frac{-4+4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4}$$
$$=-z+x_1-x_2-x_3\text{。}$$

对于 $k=2,3,4$，只需将这些表达式中的 $x_1-x_2-x_3$ 分别换

成 $-x_1+x_2-x_3$，$-x_1-x_2+x_3$，$x_1+x_2+x_3$。①

总结［并回顾(38:14)］：

(38:E) 第 k 个分量被以如下方式变换：

$\frac{1}{2}$ 变成 $z/2+u_k-1$，

0 变成 u_k-1，

-1 变成 $-z+u_k-1$，

u_1、u_2、u_3、u_4 由(38:14)定义。

我们请读者用(38:E)重述(37:2)，注意正确给出必要的玩家1、2、3、4置换。

你将会注意到，对于中心——即 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$，(38:E)重新给出38.1.1的公式(38:1)。

38.2.7 接下来，我们回头讨论(38:15)和(38:16)。

条件(38:16)表明，(38:14)的四个数 u_1、u_2、u_3、u_4 相距不太远——其最小的一个大于其最大的一个的 $\frac{2}{3}$，即相对地它们的大小相差不超过2:3。

在中心点，$x_1=x_2=x_3=0$，情况肯定是这样，u_1、u_2、u_3

328 和 u_4 都 $=1$。所以，在这种情况下，$v=w=1$，且(38:15)变成 $\frac{2}{3}<z\leqq 1$，这证明了这一讨论中较早时给出的断言（见38.1.1）。

用 Z 记 Q 中(38:16)成立的部分，那么，中心点的一

---

① 由(38:13)的形式，这些结果是直接的；而且，如34.3.2中描述的那样，考虑玩家1、2、3、4置换对坐标 x_1、x_2、x_3 的影响也同样给出这些结果。——327，①

个充分小的邻近属于 Z。① 这样，Z 是 Q 内部的一个三维体，其中包含着中心。

我们还能够表达 Z 与 Q 的对角线的关系，如其与 I—中心—VIII 的关系。Z 包含着该对角线的如下部分(使用图64)：在一个方向上，它恰好包含 C；在另一个方向上，它略微小于 B 的一半。② 我们补充一点：这些解不同于36.3中提到的(36:B)和(36:C)中成立的一族解。

38.3 上述解的解释

38.3.1 我们已经确定的一族解具有若干值得说明的特点。

第一，我们注意到，对于以这个族为一个解的每一个

---

① 如果 x_1、x_2、x_3 与0相差 $<\frac{1}{15}$，那么，(38:14)的 u_1、u_2、u_3、u_4 中的每一个都 $<1+\frac{3}{15}=\frac{6}{5}$ 且 $>1-\frac{3}{15}=\frac{4}{5}$，所以，相对来说，它们相差 $<\frac{6}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{2}$。这样，我们仍然在 Z 之内。换句话说：Z 包含一个立方体，它与 Q 有同一个中心，但其大小(边长)是 Q 的 $\frac{1}{15}$。

实际上，Z 更大一些，其体积大约是 Q 的体积的 $\frac{1}{1000}$。——328，①

② 在该对角线上，$x_1=x_2=x_3$，所以 u_1、u_2、u_3、u_4 是：(三倍于)$1-x_1$ 和 $1+3x_1$。故，对于 $x\geqq 0$，$v=1-x_1$，$w=1+3x_1$，从而(38:16)变成 $x_1<\frac{1}{9}$。而且，对于 $x_1\leqq 0$，$v=1+3x_1$，$w=1-x_1$，从而(38:16)变得 $>-\frac{1}{11}$。所以，相交的部分是：

$$0\leqq x_1<\frac{1}{9}\quad(\text{这正是 }C)$$

$$0\geqq x_1>-\frac{1}{11}\quad\left(B\text{ 是 }0\geqq x_1>-\frac{1}{5}\right)。\qquad ——328，②$$

博弈（即 Z 的每一点处）来说，它给出无穷多个解。① 我们在 37.5.1 所说的一切再次适用：这些解是有限分配集②且具有该博弈的充分对称性。③ 因此，这些解任何一个之中都不存在“歧视”。也无法赋予它们我们在前面讨论过的“组织原理”上的差异。不过，存在着一个简单的“组织原理”，我们能够对其进行定性的口头描述以区别这些解。这是我们接下来的任务。

38.3.2 考虑（38：E），它表达的是服从 37.3.2 中（37：2）的变化。显然，对于玩家 k 来说，这个解中最坏的可能结果是最后一个表达式（因为这对应着 -1），即 $-z+u_k-1$。视 $z<$ 或 $=u_k$，该表达式 $>$ 或 $=-1$。现在，u_1、u_2、u_3、u_4 是（38：14）中的四个数，其中最小的一个是 v。根据（38：15），$z\leqq v$，即总有 $-z+u_k-1\geqq -1$，而且 $=$ 仅仅发生在 z 的最大可能值，$z=v$，从而这仅仅是对于 u_k 取得其最小值 v 的玩家 k 来说的。

329 我们将这重述为：

（38：F） 在这一族解中，哪怕是最坏的结果，一般来说，玩家 k 面对的情况也肯定优于他独自行动能够得到的结果，即 $v[(k)]=-1$。这一优势消失的惟一情况是，z 有其最大可能值

---

① 我们找到的这个解包含 4 个参数：y_1、y_2、y_3、y_4，而博弈以其作为解的博弈却只有三个参数：x_1、x_2、x_3。——328，③

② 像 37.3.2 中的（37：2）那样，每一个有 13 个元素。——328，④

③ 在中心处，$x_1=x_2=x_3=0$，我们有 $y_1=y_2=y_3=y_4$［见（38：13）］，即关于 1、2、3、4 对称。在该对角线上，$x_1=x_2=x_3$，我们有 $y_1=y_2=y_3=y_4$［见（38：13）］，即关于 1、2、3 对称。——328，⑤

即 $z=v$，而且是对于这样一个玩家 k 来说，(38:14)中相应的 u_1、u_2、u_3、u_4 达到(38:14)中的最小值。

换句话说：在这些解中，一个失败的玩家一般来说没有被完全“剥夺”，没有被逼到可能的最差处境——他独自行动能够得到的数额，即 $v[(k)]=-1$。在 33.1 中讨论三人博弈的“轻度”“歧视”解（即 $c>-1$ 时，见 33.1.2 末尾）时，我们看到过一个胜利联盟的这一部分受到的此类约束。但是，在任何一个解中，只有一位玩家能够成为这一约束的对象，而且这一现象伴随他被逐出加入联盟的竞争而消失。现在，不存在歧视或隔离，相反，这一约束适用于所有的玩家，而且，在 Q 的中心[38.1.1 中(38:1)，$z<1$]，解甚至是对称的！①

38.3.3 即使 z 取得其最小值 v，一般来说，只有一位玩家失去这一优势，又因为(38:14)的四个数字 u_1、u_2、u_3、u_4 一般来说是相互不同的且只有一个等于它们的最小值

① 也存在着具有某种意义的量上的差异。在我们当前的结构（四人博弈，Q 的中心）和 33.1 意义上的三人博弈中（在我们找到的这个解中），一位玩家都能够得到的最好结果都是 $\frac{1}{2}$，且最坏的结果是 -1。

我们在找到的他没有被完全“剥夺的”那些解中，失败情况下他可能得到的上限是 $-\frac{2}{3}$（即 $-z$，而 $\frac{2}{3}<z\leqq 1$），而那时（即 $-1\leqq c<\frac{1}{2}$），它是 $\frac{1}{2}$。所以，这个区域现在包含有意义的区间的比例是 $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)-(-1)}{\frac{1}{2}-(-1)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{9}$，即 $22\frac{2}{9}\%$，而那时它覆盖 100%。——329，①

v。只有当 u_1、u_2、u_3、u_4 都等于其最小值 v，即它们都相等时，全部四位玩家才会同时失去这一优势，而(38:14)告诉我们，这种情况只会发生在 $x_1=x_2=x_3=0$，即中心。

不彻底"剥夺"失败的玩家，这一现象是我们的解——即社会组织——的一个十分重要的可能(而非必然)特征。在一般理论中，它还有着更为重要的作用。

我们的结论是，我们在 36.3.2 中提到而未能描述的解中有些也具有这一特点。它们是图 64 的 C 中的解。不过，它们终归不同于我们这里考虑的解。

第 8 章　关于 $n \geqq 5$ 博弈的一些说明

39. 各类博弈的参数个数

39.1　$n=3,4$ 的情况

39.1　我们知道，本质博弈形成我们的真正问题，而且我们假设它们总是有简化型且 $\gamma=1$。在这一表述中，恰恰存在一个三人零和博弈，而四人零和博弈形成一个三维流形。[①] 我们还看到，（惟一的）三人零和博弈自然而然是对称的，而所有四人零和博弈的三维流形却恰好包含一个对称博弈。 330

我们也可以这样说，上述各种博弈中的每一个的维度是多少，即为了描述一类博弈中的一个，必须确定的未知

① 关于一般说明，见 27.1.4 和 27.3.2；关于三人零和博弈，见 29.1.2；关于四人零和博弈，见 34.2.1。——330，①

参数有几个。图 65 给出了有关结果。[①] 我们上面的说法重新出现在该表 n = 3,4 栏中。

玩家个数	所有的博弈	对称博弈
3	0*	0*
4	3	0*
5	10	1
6	25	1
7	56	2
8	119	2
...	...	...
n	$2^{n-1}-n-1$	$\frac{n+1}{2}-2n$ 是奇数 $\frac{n}{2}-2n$ 是偶数

* 表示该博弈惟一

图 65——本质博弈。（简化形式，其中 $\gamma=1$）

39.2 $n\geqq 3$ 的情况

39.2.1 接下来，我们确定全部 n 人博弈和对称 n 人零和博弈的参数个数。

特征函数是很多 v(S)的一个综合，而 v(S)的个数就是 $I=(1,\cdots,n)$ 的子集的个数，即 2^n 个。这些数满足 25.3.1的约束条件(25:3:a)—(25:3:c)，以及 27.2 中的(27:5)所表达的归于简化特征和正规化 $\gamma=1$ 的条件。在这些条件中，(25:3:b)使得，每当 v(S)被给定，那么，

① 对于 $n=1,2$，不存在本质博弈！——330，②

v($-S$)就确定了,因此它使参数减少一半。① 这样,我们有 2^{n-1},而不是 2^n。接着,(25:3:a)确定其余 v(S)中的一个:v($\ominus$);(27:5)确定其余 v(S)中的 n 个:v[(1)],…,v[(n)]。因此,它们使参数个数减少 $n+1$ 个。② 这样,我们有 $2^{n-1}-n-1$ 个参数。最后,(25:3:c)不需要考虑,因为它仅仅包含不等式。

39.2.2 如果该博弈是对称的,那么,v(S)仅仅依赖于 S 的元素 p 的个数:v(S) = v_p,见 28.2.1。因此它是多个 v_p 的综合,而 $p=0,1,\cdots,n$,即 $n+1$ 个。这些数服从 331
28.2.1的约束条件(28:11:a)—(28:11:c);这一简化特征是自动有的,而且我们还要求 $v_1=-\gamma=-1$。当 v_p 给定时,(28:11:b)固定 v_{n-p},所以,对于 $n-p \neq p$,它使这些参数的个数减半。当 $n-p=p$③,即 $n=2p$ 时,n 必定是一个偶数,那么,$p=n/2$,(28:11:b)表明,这个 v_p 必定等于零。这样,当 n 是奇数时,我们有 $\frac{n+1}{2}$ 个参数;当 n 是偶数时,我们有 $\frac{n}{2}$ 个参数,而不是最初的 $n+1$ 个。接下来,(28:11:a)确定其余 v_p 中的一个:v_0;$v_1=-\gamma=-1$ 确定了其余 v_p 中的另一个:v_1;它们使参数减少两个:④这样,我们有 $\frac{n+1}{2}-2$

---

① S 和 $-S$ 永远不会是相同的集合!——330,③

② $S=\ominus$,(1),…,(n)互不相同且各自的分量都不相同。——330,④

③ 与第 330 页脚注③比较!——331,①

④ $p=0,1$ 相互不同且不同于各自的 $n-p$。(后者只是因为 $n \geq 3$。)——332,②

或$\frac{n}{2}-2$个参数。最后,(28:11:c)不需要考虑,因为它只包含不等式。

39.2.3 我们用图65概括这些信息。在图65中,我们明确给出$n=3,4,5,6,7,8$时的值——其中,前面两个的值是我们过去提到过的。

如果需要的话,图65左边一栏的迅速增加可以作为一个指数,表明随着参与者人数增加,博弈的复杂性如何
332 增加。值得注意的是,右边一列也在增加,但增加得慢得多。

40. 对称五人博弈

40.1 对称五人博弈的形式体系

40.1.1 我们并不试图直接攻克五人零和博弈。系统化的理论还没有发达到允许我们这么做的程度,而且对于描述性的方法和决疑法(如四人零和博弈分析使用的那样)来说,10个参数实在令人望而生畏。

然而,研究对称的五人零和博弈还是可能的。其参数个数是1,小而不等于零,而且是一个值得考虑的质的变化。对于$n=3,4$,仅仅存在一个对称博弈,$n=5$时,第一次出现了这样的情况,即对称博弈的结构呈现出多种类型。

40.1.2 对称五人博弈由28.2.1的v_p,$p=0,1,2,3,4$,

5 刻画，服从那里给出的约束条件(28:11:a)—(28:11:c)。(28:11:a)和(28:11:b)是说(在 $\gamma=1$ 时)

(40:1) $$v_0=0, v_1=-1, v_4=1, v_5=0,$$

且 $v=-v_3$，即

(40:2) $$v_2=-\eta, \quad v_3=-\eta。$$

(28:11:c)是说，对于 $p+q \leqq 5$，$v_{p+q} \geqq v_p+v_q$，而且我们能够使 p、q 进一步服从(28:12)的约束条件。所以，$p=1$，$q=1,2$①，而且根据(40:1)和(40:2)，我们有

$$p=1, q=1: \quad -2 \leqq -\eta;$$

$$p=1, q=2: \quad -1-\eta \leqq \eta;$$

即

(40:3) $$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2。$$

总之：

(40:A)　对称五人零和博弈由参数 η 借助(40:1)和(40:2)描述。η 的变动范围是(40:3)。

40.2 两种极端情况

40.2.1 为上述对称博弈提供一个直接的描述也许是有益的。让我们首先考虑区间(40:3)的两个端点：

$$\eta=2, -\frac{1}{2}。$$

首先考虑 $\eta=2$ 的情况：在这种情况下，对于每个二元 333

① 这可以轻易地从(28:12)或第 259 页脚注②中的不等式得到验证。这些结果给出 $1 \leqq p \leqq \frac{5}{3}$，$1 \leqq q \leqq 2$，又因 p、q 是整数，所以 $p=1, q=1,2$。——332，①

集来说，$v(S)=-2$，即每个二人联盟都是失败的。[①] 因此，一个三人联盟（作为前者的补集）是一个胜利联盟。这就告诉了我们所有事情：在联盟的逐步形成中，从失败到胜利的转折点是当联盟的规模从2过渡到3的时候，而且在这一点发生转变的比率是100%。[②]

总之：

(40:B)　　$\eta=2$ 描述的这样一个博弈，其中所有玩家的惟一目标是形成三人联盟。

40.2.2 接着，我们考虑 $\eta=-\frac{1}{2}$。在这种情况下，我们认为

$$\text{当} S \text{有}\begin{cases}4\\2\end{cases}\text{个元素时}，\quad v(S)=\begin{cases}1\\\frac{1}{2}\end{cases}。$$

一个四人联盟总是一个胜利联盟。[③]

上述公式表明，从比例上说，一个二人联盟做得像一个四人联盟一样好。因此，我们有理由认为前者取得了与后者一样大的胜利。如果我们采取这一较宽泛的胜利观，我们就可以再次断言，有关这一博弈的所有事情都说清楚

① 见35.1.1中的讨论，尤其见第296页脚注④。——333，①

② 一位玩家像两位玩家一样失败，四位玩家也不会比三位玩家有更大的胜利。当然，一个三人联盟没有吸收第四个同伙的动机。有启发意义的是，如果他们这样做了，他们大概也会在对其最不利的条件下接受他。但不管怎样，作为一个整体来看，这个四人联盟是一个胜利联盟，因为剩下的孤立玩家是失败的。——333，②

③ 在任何 n 人零和博弈中，任意一个 $n-1$ 人联盟都是胜利的，因为一个孤立的玩家总是一个失败者。见上面引用过的地方。——333，③

了:在联盟的形成中,从失败到胜利的转折点发生在联盟的规模从一增加到二的时候;而且在这一点处,转变的比例是100%。①

总之:

(40:C)　　$\eta=-\frac{1}{2}$描述了一个博弈,其中所有玩家的惟一目标是形成二人联盟。

40.2.3　基于(40:B)和(40:C),我们不难猜测两个博弈各自的试探性的解。严格证明这一点并不困难,我们不做进一步分析。

在我们转而考虑(40:3)中 η 的其他取值之前,我们要说明的一点是,(40:B)和(40:C)显然是界定博弈的一般方法的一个最简单例子。这一方法(较第296页脚注④ 334
中提到的第10章中的方法更为一般)将在(关于非对称博弈的)其他地方得到详尽分析。它服从一个算术性质。因此,显然不可能存在这样一个(本质对称零和)博弈,其中,如果 p 是 n 的一个因子,每个 p 人联盟都是胜利联盟,因为那样的话,就会有 n/p 个这样的联盟,而且每个联盟都是胜利者,没有了失败者。另一方面,$p=n-1$ 时,同样条件丝毫不约束该博弈(见第333页脚注③)。

---

① 一位玩家是失败的,二或四位玩家是胜利的。一个三人联盟是值得注意的复合情况:对于一个三元集 S 来说,$v(S)$ 是 $-\frac{1}{2}$,即它是在一个二元集的 $\frac{1}{2}$ 上添加一个 -1 得到的。因此,一个三人联盟会胜过(它所包含的)一个胜利的二人联盟加上剩下的孤立且失败的玩家。这个联盟只是一个胜利组与一个失败组的组合,其状况丝毫不因这一动作而被改变。——333,④

40.3 对称五人博弈与1、2、3对称四人博弈之间的关系

40.3.1 现在，让我们考虑(40:3)内部的 η。这种情况有点类似于35.3末尾讨论过的情况。对于(40:3)的两个端点，我们有某种试探性的看法（见上）。(40:3)的每一点 η 都是被这些端点"环绕"着的。更确切地说，使用适当的权重，它是它们的重心。[①] 前面给出的说明再次适用：虽然这一结构表示，(40:3)的所有博弈是极端情况(40:B)和(40:C)的组合，我们却没有理由指望前者的策略能够通过某种直接的过程得自后者的策略。我们关于四人零和博弈的经验就是证明。

然而，与四人博弈的另一个相似之处提供了某种富有启发性的思路。关于玩家1、2、3对称四人零和博弈的参数个数是相同的。现在，我们有参数 η，η 的取值范围是

(40:3) $$-\frac{1}{2}\leqq\eta\leqq2,$$

而我们提到的博弈有参数 x_1，x_1 的变动范围是

(40:4) $$-1\leqq x_1\leqq 1。$$[②]

（完全对称的）五人博弈与1、2、3对称的四人博弈之间的这一相似性至今还完全是形式上的相似。然而，其背后有着深层意义。我们接下来的任务就是将其弄明白。

40.3.2 考虑一个对称五人博弈 Γ，其 η 的取值范围是(40:3)。现在，我们对该博弈进行适当修改，把玩家4和

---

① 根据40.1.2中我们的方程(40:1)、(40:2)，读者能够轻易给出第304页脚注①意义的这个组合。

② 见35.3.2在 Q 的表示中，$x_1=x_2=x-3$。——334，②

玩家5结合成一位玩家，记为玩家4′。记修改后的博弈为Γ′。要认识到，Γ′是一个全新的博弈：我们既然没有断定在Γ中玩家4和玩家5必然联合行动，形成一个联盟等，也没有断言存在任何一般地成立的导致这一联盟的策略动机。[①]我们强迫玩家4和玩家5结合起来。我们是通过修改博弈规则，即通过用博弈Γ′取代Γ来做到这一点的。

现在，博弈Γ是一个对称五人博弈，而Γ′是一个1、2、 335
3对称四人博弈。[②] 给定Γ的 η，我们需要确定的Γ′的 x_1，以弄清楚这界定了什么东西与(40:3)和(40:4)对应着。然后，我们将研究Γ与Γ′的策略——即解——之间是否存在某些联系。

Γ′的特征函数 $v'(S)$ 能够直接用Γ的特征函数 $v(S)$ 表达出来。事实上：

$$v'[(1)]=v[(1)]=-1, v'[(2)]=v[(2)]=-1,$$
$$v'[(3)]=v[(3)]=-1, v'[(4')]=v[(4,5)]=-\eta;$$
$$v'[(1,2)]=v[(1,2)]=-\eta, v'[(1,3)]=v[(1,3)]=-\eta,$$
$$v'[(2,3)]=v[(2,3)]=-\eta, v'[(1,4')]=v[(1,4,5)]=\eta,$$
$$v'[(2,4')]=v[(2,4,5)]=\eta, v'[(3,4')]=v[(3,4,5)]=\eta;$$
$$v'[(1,2,3)]=v[(1,2,3)]=\eta,$$
$$v'[(1,2,4')]=v[(1,2,4,5)]=1,$$
$$v'[(1,3,4')]=v[(1,3,4,5)]=1,$$

① 这里的讨论应该与36.1.2中的讨论进行比较，那里，一个类似的二人组合在如下条件下形成，即这一联合似乎有着策略上的合理性。——334，③

② Γ中的参与者是玩家1、2、3、4、5，他们在最初的博弈中有着相同的角色。Γ′中的参与者是玩家1、2、3和复合玩家(4,5):4′。显然，1、2、3仍然有相同角色，但4′就不同了。——335，①

$$v'[(2,3,4')] = v[(2,3,4,5)] = 1;$$

而且

$$v'(\ominus) = v'[(1,2,3,4')] = 0。$$

虽然 Γ 是正规化的和简化的，Γ' 却不是。而且，我们必须将其变成那种形式，因为我们要计算其 x_1、x_2、x_3、x_4，即要将其与 34.2.2 的 Q 联系起来。

因此，让我们首先应用 27.1.4 的正规化公式。那些公式表明，玩家 $k=1,2,3,4'$ 的份额必须改变为数额 α_k^0，

$$\alpha_k^0 = -v'[(k)] + \frac{1}{4}\{v'[(1)] + v'[(2)] + v'[(3)] + v'[(4')]\},$$

且

$$\gamma = -\frac{1}{4}\{v'[(1)] + v'[(2)] + v'[(3)] + v'[(4')]\}。$$

从而

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha_3^0 = \frac{1-\eta}{4}, \alpha_4^0 = -\frac{3(1-\eta)}{4}, \gamma = \frac{3+\eta}{4}。$$

显然，根据(40:3)，$\gamma \geqq \dfrac{3-\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{5}{8} > 0$，所以该博弈是一个本质博弈。每位玩家的份额除以 γ 就实现了正规化。

因此，对于一个二元集 $S=(i,j)$，$v'(S)$ 被替换为

$$v''(S) = \frac{v'(S) + \alpha_i^0 + \alpha_j^0}{\gamma}。$$

简单的计算给出如下结果：

$$v''[(1,2)] = v''[(1,3)] = v''[(2,3)] = -\frac{2(3\eta-1)}{3+\eta},$$

$$v''[(1,4')] = v''[(2,4')] = v''[(3,4')] = \frac{2(3\eta-1)}{3+\eta}。$$

如我们在 34.2 中表示 Q 时所使用的那样，这是该特 336
征函数的正规型和简化型。34.2.1 中(34:2)与上面的表达式合起来给出，

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3\eta - 1}{3 + \eta}。$$

把 x_1、x_2、x_3 看作给定，上式能够被重写为

(40:5) $$(3 - x_1)(3 + \eta) = 10。$$

不难验证，(40:5)把 η 值域(40:3)映射到 x_1 值域(40:4)。该映射显然是单调的。其详细内容见图 66 并结合 x_1 和 η 的取值对应表。图中曲线代表 x_1,η 平面中的关系(40:5)。这条曲线显然是一条双曲线(的一段弧)。

337

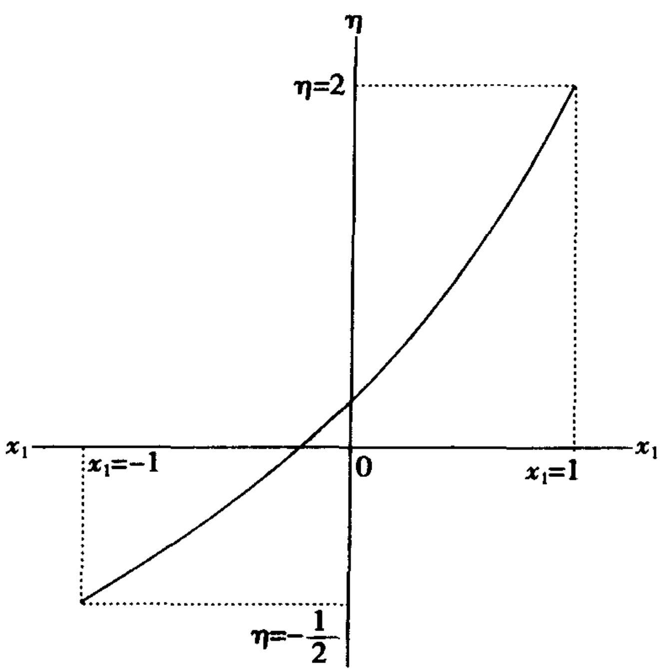


图 66

40.3.3 我们关于1、2、3对称四人博弈的分析以36.3.2中指出的结果为告终：Q 中的对角线I—中心—VIII所代表的博弈从 A 到 E 分为五类，其中每一类由一个有特定性质的解刻画。对角线I—中心—VIII——即区间 $-1 \leqq x_1 \leqq 1$ 的划分见图64。

因此，目前的结果暗示着对称五人博弈 Γ 的相应分类，希望通过将其与1、2、3对称四人博弈的逐类比较获得求解的思路。

使用图66，我们得到区间 $-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2$ 的进一步划分：$\overline{A}-\overline{E}$，它们是 $-1 \leqq x_1 \leqq 1$ 中 $A-E$ 的象。详细细节见图67。

相应的 x_1 和 η 值

x_1:	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
η:	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$	1	2

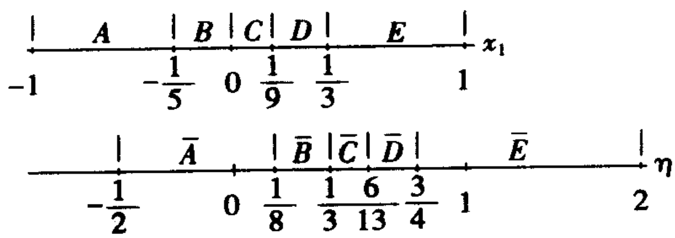


图 67

对称五人博弈的详细分析能够以此为基础进行。它揭示的是，区域 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的确起着我们预期的作用，但区域 $\overline{C}$、$\overline{D}$ 和 $\overline{E}$ 则必须用其他区域，$\overline{C}'$ 和 $\overline{D}'$ 取代。$-\frac{1}{2} \leqq \eta \leqq 2$

中的区域 $\bar{A}$—$\bar{D}'$ 以及它们在 $-1 \leq x_1 \leq 1$ 中的逆象 A—D'（同样根据图 66 得到）如图 68 所示。

值得说明的是，图 68 的 x_1 表现出较图 67 中的 x_1 更大的对称性，尽管对于 1、2、3 对称的四人博弈来说有意义的是后者。

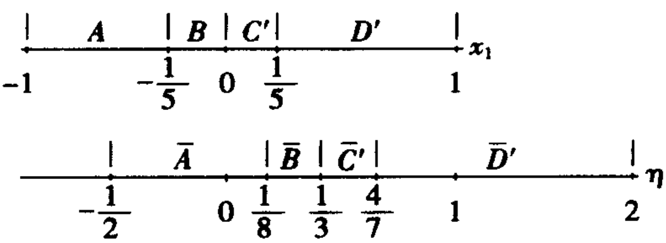


图 68

40.3.4　对称五人博弈的分析还具有某种超出上述直接信息的启发意义。事实上，通过比较对称五人博弈 Γ 和相应的 1、2、3 对称四人博弈 Γ′，并研究它们的解之间的不同，我们就能够看出复合玩家 4′中玩家 4 和玩家 5 合并的策略效应。如果这些解不表现出本质不同（如上所述，在区域 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 就是这样），那么，我们就可以 338
说，这一合并不影响真正有意义的策略分析。① 另一方面，当这样的不同出现时（这发生在其余区域之中），我

① 当然，你必定预料到，在 Γ 的解中，玩家 4 和玩家 5 处于两个相对立的联盟之中。显然，在 Γ′中没有与此类似的事情。我们用缺乏基本不同指，在 Γ 的一个解中表明 4 和 5 的一个联盟的那些分配应该对应着 Γ′的解中的等价分配。这些想法需要更详细讨论，这是可能的，但篇幅过长，不宜在这里给出。——338，①

们会面对一个有趣的情况，即当4和5甚至在Γ中恰好也合作时，他们的联合地位因他们分离的可能性而被扰乱了。[①]

篇幅不允许我们基于严格的解的概念进行较为充分的讨论。

---

① 在22.2中，我们关于三人博弈的首次讨论表明，在一个联盟之内，成果的分配是由分离情况下每位玩家的可能性决定的。但是，我们现在想像的这种情况则不同。在我们现在的Γ中，能够发生的事情是，玩家4加上玩家5的总份额会受到这一"想像"的事实的影响。

这样一种可能性的一个定性概念最好以如下方式获得：当4和5的初步联盟正在与其潜在未来盟友进行谈判时，他们的讨价还价地位在如下两种情况有所不同：一、在Γ'中，他们的联盟已知不可能被拆散；二、在Γ中，他们有可能对立。——338，②

第 9 章　博弈的合成与分解

41. 合成与分解

41.1　全部解能够被决定的 n 人博弈

41.1.1　前面两章告诉我们,随着参与者人数 n 增加 339
到 4,5 等,我们的问题的复杂程度迅速增加。尽管这些分析仍不全面,却十分浩繁,以至于要将决疑法应用于五位参与者以上的情况几乎是没有希望的。[①] 另外,以这种方式获得的结果显得支离破碎,这使其不能充分告诉我们这一理论的一般可能性。

另一方面,绝对重要的是,我们一定要认识到,哪些条件对于更大的 n 来说总是成立的。不仅对于经济和社会应用来说这是最为重要的,另外一个理由是:随着 n 的增加,会出现新的现象。$n=2,3,4$(见 20.1.1、20.2、35.1.3

① 正如我们在第 8 章中看到的那样,对于五位参与者的情况,我们不得不将自己限于对称博弈。——339,①

和第221页脚注②)中的每一种情况都是这样的。从 $n=4$ 到 $n=5$,我们还没有观察到这一现象,也许是因为我们缺乏有关这种情况的详细信息。但是,我们将在后面看到(见46.12),一个重要的现象首次出现于 $n=6$ 的情况。

41.1.2 出于这些理由,我们迫切需要找到某种技术来对付 n 较大的博弈。目前情况下,我们不能奢望找到一个系统的和详尽的方法。所以,一个自然的方法是找出一些包括很多参与者的、能够求解的特殊类型的博弈。[①] 一般经验是,在精确和自然科学的很多领域中,彻底弄清楚一些特例——它们在技术上是可以对付的且包含着基本原理——很有可能成为系统的和详尽的理论的奠基工作。

我们将阐述和讨论两类这样的特例。我们可以把它们看作两个四人博弈的扩展——这样,其中每一个都将是这两个类之一的一个原型。这两个四人博弈对应着34.
340 2.2中引入的立方体 Q 的八个角:事实上,我们看到,这些角仅仅代表着两类策略不同的博弈——一类是35.1中讨论的I、V、VI、VII;另一类是35.2中讨论的II、III、IV、VIII。因此,Q 的角I和VIII是这些推广的原型,是本章和下一章要研究的对象。

41.2 第一个类:合成和分解

41.2.1 我们首先考虑35.2中讨论过的 Q 的角VIII。正如我们在35.2.2中做的那样,该博弈具有如下显著特点:四位参与者分为两个分离的集合(一个集合中有

---

① 以这种方式,每一个都发挥着基本作用!——339,②

三个元素，另一个集合中有一个元素）。也就是说，我们可以认为，每一个集合中的玩家各自独立地在其内部进行一个博弈，两个集合之间没有任何关系。

这个博弈的一个自然推广是有 $n=k+l$ 个参与者的博弈 Γ，它有如下性质：参与者落入分别有 k 个和 l 个元素的两个集合，这两个集合的元素相互之间没有联系。也就是说，每个集合中的玩家可以被视为分别玩一个独立的博弈，如 Δ 和 H，完全在他们自己中间玩，与另一个集合中的玩家完全没有关系。①

我们将用下面的术语描述 Γ、Δ、H 之间的关系：Δ 与 H 的合成产生 Γ。反过来，Γ 能够被分解为 Δ、H 两个成分。②

---

① 在 35.2 的最初博弈中，第二个集合由一个孤立的玩家组成，他也被称为一个"哑玩家"。这暗示着对上述博弈的另一种推广：一个博弈，其中参与者落入两个集合，第一个集合中的参与者严格地在其内部进行一个博弈，而第二个集合中的参与者对该博弈中他们自己的命运和其他玩家的命运都没有任何影响。（那么，这些玩家是"哑玩家"。）

然而，这是正文中一般情况的特例。通过把博弈 H 看作一个非本质博弈，即对于每位参与者来说，该博弈有一个确定的不受其他人影响的值。（见 27.3.1 和 43.4.2 末尾，一个非本质博弈中的一位玩家能够通过不恰当的玩法而使其地位退化。对于一个"哑玩家"，我们应该排除这种可能性——不过，这一点并不重要。）

我们将要（对博弈 Δ 和 H 都是本质博弈的情况）给出的一般讨论将实际说明一个新的现象，这一现象是 35.2 的角 VIII 所描述的特殊情况——即"哑玩家"（H 是非本质博弈）情况中没有出现过的。这个新的现象将在 46.7 和 46.8 中讨论，其中任何新的事情都不发生的"哑玩家"情况将在 46.9 中讨论。——340，①

② 将合成和分解的概念推广到超过两个组成部分似乎是自然的事情。这将在 43.2 和 43.3 中给出。——340，②

41.2.2 在我们严格描述上述口头定义之前，一些定性分析是有益的：

第一，应该看到，我们的合成和分解过程与当代数学的很多领域中成功运用的过程类似。① 因为这些事情涉及较高深的数学技术，我们不在这里多说。我们只需说的一点是，我们目前的方法部分地受到这些类似性的驱使。
341 从技术角度看，一个相当令人鼓舞的征兆是，我们即将得出详尽的结果，且这些结果能够用于进一步的解释。

41.2.3 第二，读者也许觉得，合成运算完全是形式的和虚幻的。为什么由两个不相交的玩家集合进行的而且绝对没有相互影响的两个博弈 Δ 和 H 应该被看作一个博弈 Γ 呢？

我们的结果将说明，仅就规则而言，博弈 Δ 和 H 的完全分离未必意味着它们的解也是完全分离的。也就是说：虽然两个玩家集合无法直接相互影响，然而，当它们被当作一个集合——一个社会——时，有可能存在着建立它们之间关系的稳定行为标准。② 这种情况的意义将在我们上面提到的地方得到更加充分的说明。

41.2.4 另外，还应该注意的是，这一合成方法在自然科学和经济学中相当常见。因此，我们完全可以合理地把两个分离的物理系统——举一个极端例子，其中一个在木星上，另一个在天王星上——看作一个系统。同样，我

① 见伯克霍夫和麦克雷恩：《当代代数研究》，纽约，1941，第 XIII 章。——340，③

② 这与我们在前面（见 21.3 和 37.2.1）看到的现象有一些类似，即博弈的对称性未必意味着所有解的同一对称性。——341，①

们也可以把几乎没有联系的两个分离的国家的经济看作一个经济。当然，这是引入这些系统之间相互影响力的准备步骤。因此，我们能够在我们的第一个例子中把这两个系统分别选择为木星和天王星本身（两者都在太阳引力范围之内），然后，我们引入这两个行星的相互引力。在我们的第二个例子中，当国际贸易、国际资本流动和移民等受到考虑时，相互影响就进来了。

同样，我们能够把可分解的博弈 Γ 当作迈向与其邻近的其他博弈的台阶，直到不可分解为止。[①]

然而，在当前的分析中，我们将不考虑后一种修改。我们的兴趣在于这一段的开头提到的解所引入的关系。

41.3　严格定义

41.3.1　接下来，我们对博弈的合成和分解进行严格的数学描述。

令 k 个玩家 $1',\cdots,k'$ 形成集合 $J=(1',\cdots,k')$，参与博弈 Δ；l 个玩家 $1'',\cdots,l''$ 形成集合 $K=(1'',\cdots,l'')$，参与博弈 H。我们重申，Δ 和 H 是不相交的玩家集[②]，而且，博弈 Δ 和 H 相互之间没有任何影响。用 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 分别记这两个博弈的特征函数，其中 $S\subseteq J$ 且 $T\subseteq K$。 342

① 见 35.3.3，运用于角 I 的邻近，根据 35.2，它是一个可分解的博弈。第 303 页脚注②关于摄动的说明也是有意义的。——341，②

② 如果玩家 $1,\cdots,n$ 正同时参与两个博弈，那么，这属于完全不同的情况。这是我们在 27.6.2 和 35.3.4 中提到的博弈的叠加。其对策略的影响十分复杂，而且，如我们在 35.3.4 中指出过的那样，很少是一般规则能够描述的。——341，③

在形成合成博弈 Γ 时，方便的做法是对于其 $n=k+l$ 位玩家使用相同符号 $1',\cdots,k',1'',\cdots,l''$。[①] 他们形成集合 $I=J\cup K=(1',\cdots,k,1'',\cdots,l'')$。

显然，每个集合 $R\subseteq I$ 允许惟一一个表示。

(41:1) $$R=S\cup T,\quad S\subseteq J,\quad T\subseteq K;$$

这一公式的逆命题是

(41:2) $$S=R\cap J,\quad T=R\cap K。$$[②]

记博弈 Γ 的特征函数为 $v_{\Gamma}(R)$，$R\subseteq I$。一个初步事实是，博弈 Δ 和 H 无相互影响地结合起来形成 Γ，这一事实有其定量表达：Γ 中一个联盟 $R\subseteq I$ 的值等于博弈 Δ 中 R 的属于 J 的部分 S 的值与博弈 H 中 R 的属于 K 的部分 T 的值之和。其公式为：

(41:3) $$v_{\Gamma}(R)=v_{\Delta}(S)+v_{H}(T),$$

其中，R、S、T 满足(41:1)，即(41:2)。[③]

41.3.2 (41:3)表达了 $v_{\Gamma}(R)$ 由其两个成分 $v_{\Delta}(S)$ 和 $v_{H}(T)$ 合成。然而，它还包含这逆问题的答案：用 $v_{\Gamma}(R)$ 表达 $v_{\Delta}(S)$、$v_{H}(T)$。

事实上，$v_{\Delta}(\ominus)=v_{H}(\ominus)=0$。[④] 因此，在(41:3)中令 $T=\ominus$ 和 $S=\ominus$ 给出：

---

① 不使用 $1,\cdots,n$。——342，①

② 公式(41:1)和(41:2)有直接口头含义。读者会发现，对其进行阐述是有益的。——342，②

③ 当然，以 25.1.3 为基础进行严格演绎是可行的，且没有困难。25.3.2 的全部内容适用于这种情况。——342，③

④ 注意，空集 $\ominus$ 同时是 J 和 K 的子集。因为 J 和 K 是不相交的，这是它们惟一的共同子集。——342，④

(41:4)　　$v_{\Delta}(S) = v_{\Gamma}(S)$，　$S \subseteq J$，

(41:5)　　$v_{H}(T) = v_{\Gamma}(S)$，　$T \subseteq K$。[1]

接下来，我们要表述的是博弈 Γ 对于 J 和 K 这两个集合的可分解性。也就是说：（在 $I = J \cup K$ 的元素中间的）给定的博弈 Γ 是这样一个博弈，它能够被分解为两个合适的博弈：一个是（J 的元素中间的）博弈 Δ，另一个是（K 的元素中间的）博弈 H。如上所述，这是 Γ 的涉及未知 Δ 和 H 的一个隐含性质。但是，它将被表达为 Γ 的一个明显性质。

事实上：如果这样的 Δ 和 H 存在，那么，它们不可能不同于(41:4)和(41:5)所描述的博弈。因此，问题中 Γ 的性质是，(41:4)和(41:5)的 Δ 和 H 满足(41:3)。因 343
此，用(41:3)取代(41:4)和(41:5)，用(41:1)以 S,T 表达 R 给出：

(41:6)　　$v_{\Gamma}(S \cup T) = v_{\Gamma}(S) + v_{\Gamma}(T)$，　$S \subseteq J, T \subseteq K$。

或者，如果使用(41:2)（以 R 表达 S,T）取代(41:1)

(41:7)　　$v_{\Gamma}(R) = v_{\Gamma}(R \cap J) + v_{\Gamma}(R \cap K)$，　$R \subseteq I$。

41.3.3　为了正确理解方程(41:6)、(41:7)的作用，我们要重新思考它们所依据的基本原理。这是 41.4—42.5.2 的任务。不过，我们能够直接就这些方程的解释做出两点说明。

第一：(41:6)表达的是，集合 $S \subseteq J$ 与集合 $T \subseteq K$ 之间的联盟没有吸引力——虽然 J 和 K 中的玩家都有联合起

---

[1] 这是把空集当作一个联盟的好处的一个例子。见第 241 页脚注②。——342，⑤

来的动力，但不存在跨越 J 和 K 的边界的力量。

第二：对于熟悉测度论的读者来说，我们可以继续 27.4.3 末尾的观察：（41：7）是卡拉西奥德利（Carathéodory）的可测性定义。这一概念在可加测度理论中相当基本，而且，卡拉西奥德利方法是迄今为止最强有力的方法。[①] 其在当前内容中的出现是一个值得进一步研究的事实。

41.4 可分解性分析

41.4.1 通过把得自（41：4）、（41：5）的 $v_\Delta(S)$、$v_H(T)$ 代入基本条件（41：3），我们得到了 Γ 的可分解性准则（41：6）、（41：7）。然而，这一演绎中有一个缺陷：我们没有验证是否有可能找到两个博弈 Δ、H 以产生由（41：4）、（41：5）正式地定义的 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(S)$。

把这些条件公式化并不困难。正如我们在 25.3.1 中已知的那样，它们意味着，$v_\Delta(S)$ 和 $v_H(S)$ 满足条件（25：3：a）—（25：3：c）。必须理解的一点是，对于最初的博弈 Γ，我们假设一个给定的 $v_\Gamma(R)$，即 $v_\Gamma(R)$ 满足这些条件。因此，我们有下列问题：

（41：A） $v_\Gamma(R)$ 满足 25.3.1 中的（25：3：a）—（25：3：c）和（41：6），即（41：7）。（41：4）和（41：5）的 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 也满足 25.3.1 中的（25：3：a）—（25：3：c）吗？或者，如果情况

① 见卡拉西奥德利：*Vorlesungen über Reelle Funktionen*，柏林，1918，第 V 章。——343，①

不是这样，我们必须对 $v_\Gamma(R)$ 进一步施加什么样的假设？

要回答这一问题，我们分别就 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 研究 25.3.1 的(25:3:a)—(25:3:c)。为了方便，顺序上有所改变。

41.4.2 (25:3:a)的证明：根据(41:4)和(41:5)，对于 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 来说与对于 $v_\Gamma(R)$ 来说，这是同一个说法。

(25:3:c)的证明：根据(41:4)和(41:5)，这从 $v_\Gamma(S)$ 转到了 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$——它等于 $R\subseteq I$ 对 $S\subseteq J$ 和 $T\subseteq K$ 的限制。 344

在讨论(25:3:b)之前，我们在这里插入一点关于 25.4.1的(25:4)的说明。由于这是(25:3:a)—(25:3:c)的一个结果，我们可以合理地从中得出结论——而且，我们将会看到，这一推测将简化(25:3:b)的分析。

从这里开始，我们将不得不用到 I、J、K 的补集。为了避免混乱，我们有必要回避 $-S$ 这样的记号，将其分别写为 $I-S$、$J-S$、$K-S$。

(25:4)的证明：对于 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 来说，集合 I 的作用分别由集合 J 和 K 取代。因此，这一条件变成：

$$v_\Delta(J)=0,$$

$$v_H(K)=0。$$

根据(41:4)和(41:5)，这意味着

(41:8) $$v_\Gamma(J)=0,$$

(41:9) $$v_\Gamma(K)=0。$$

由于 $K=I-J$，(25:3:b)（运用于假设对其成立的 $v_\Gamma(S)$）给出

(41:10) $$v_\Gamma(J)+v_\Gamma(K)=0。$$

因此,根据恒等式(41:10),(41:8)和(41:9)中的一个意味着另一个。

在(41:8)或(41:9)中,我们实际上有一个新的条件,它并非来自(41:6)或(41:7)。

(25:3:b)的证明:我们将从假设的其对 $v_\Gamma(R)$ 成立推出其对 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 成立。根据对称性,只需考虑 $v_\Delta(S)$。

要证明的关系是

(41:11) $$v_\Delta(S)+v_\Delta(J-S)=0。$$

根据(41:4),这意味着

(41:12) $$v_\Gamma(S)+v_\Gamma(J-S)=0。$$

由(41:8),这可以被重写为

(41:13) $$v_\Gamma(S)+v_\Gamma(J-S)=v_\Gamma(J)。$$

(当然,$S\subseteq J$。)

要证明(41:13),将关于 $v_\Gamma(R)$ 的(25:3:b)运用于 $R=J-S$ 和 $R=J$。对于这些集合,$I-R=S\cup K$ 和 $I-R=K$。所以,(41:13)变成

$$v_\Gamma(S)-v_\Gamma(S\cup K)=-v_\Gamma(K),$$

即

$$v_\Gamma(S\cup K)=v_\Gamma(S)+v_\Gamma(K),$$

而且,这是 $T=K$ 时(41:6)的特殊情况。

345 因此,我们弥补了上面提到的缺陷并回答了(41:A)的问题。

(41:B) 必须对 $v_\Gamma(R)$ 施加的额外假设是:(41:8),即(41:9)。

所有这些合在一起回答了 41.3.2 中的可分解性问题：

(41:C)　　博弈 Γ 是关于集合 J 和 K 可分解的（见 41.3.2），当且仅当它满足条件：(41:6)，即 (41:7) 和 (41:8)，即 (41:9)。

41.5　修改的必要性

41.5.1　我们在 (41:C) 中证明的可分解性的两个等价条件具有十分不同的特征。(41:6)［即 (41:7)］是真正基本的一个，而 (41:8)［即 (41:9)］仅仅代表一个相当偶然的条件。我们将在下面严格证明这一点，不过，首先有一个定性分析是有益的。我们的分解概念的原型是 41.2.1开头提到的博弈：该博弈由 35.2 角 VIII 代表。现在，这一博弈满足 (41:6)，但不满足 (41:8)。前者来自 35.2.1 中的 (35:7)，后者来自 $v(J) = v[(1,2,3)] = 1 \neq 0$。然而，我们把该博弈当作可分解的［$J = (1,2,3)$，$K = (4)$］。这怎么可能呢？它破坏了我们发现的可分解性必要条件 (41:8) 呀！

41.5.2　答案是简单的：对于上述博弈，［$J = (1,2,3)$ 中的］Δ 和［$K = (4)$ 中的］H 这两个成分博弈并不完全满足 25.3.1 中的 (25:3:a)—(25:3:c)。严格说，它们不满足 25.4.1 中的结果 (25:4)：$v_{\Delta}(J) = v_{H}(K) = 0$ 不成立［且我们正是从这个条件中得出 (41:8) 的］。换句话说：Γ 的成分并非零和博弈。在 35.2.2 中，这一点当然是完全清楚的，且得到了应有的分析。

所以，我们必须尽量回避条件 (41:8)，而且要认识到，这可能迫使我们考虑其他零和博弈。

42. 理论的修改

42.1 零和条件的不完全放弃

42.1 对于我们的博弈来说,零和条件的完全放弃[①]意味着,11.2.3 意义上描述博弈的特征函数 $H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 不受任何限制。也就是说,11.4 和 25.1.3 的条件

$$(42:1) \qquad \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n) \equiv 0$$

346 被放弃了,且没有引入其他约束条件。由于第 25 节中特征函数的结构依赖于(25:1),即(42:1),这必然要求具有重大意义的修改,从而必须重新研究。

这一修改终究是必要的(见第 11 章),但现在还不是时候。

为了对当前所必需的东西有准确的概念,让我们在接下来的 42.2.1 和 42.2.2 中给出一些辅助分析。

42.2 策略等价:常数和博弈

42.2.1 考虑一个零和博弈 Γ,它可能满足,也可能不满足条件(41:6)和(41:8)。从 Γ 过渡到 27.1.1 和27.1.2 意义上的一个策略等价的博弈 Γ',有那里描述的 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$。

---

① 我们重新用 $1,2,\cdots,n$ 记玩家。——345,①

显然，关于 Γ 的(41:6)等价于关于 Γ' 的(41:6)。[①]

对于(41:8)来说，情况则完全不同。从 Γ 过渡到 Γ' 将使(41:8)的左边改变 $\sum_{k\text{属于}J}\alpha_k^0$，从而(41:8)在一种情况下成立丝毫不意味着它在另一种情况下也成立。事实上，这是对的：

(42:A)　　对于每一个博弈 Γ 来说，选择一个策略等价的博弈 Γ' 使后者满足(41:8)是可能的。

证明：这一断言的意思是，我们能够选择 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$，$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0$[这是 27.1.1 中的(27:1)]，使得

$$\mathrm{v}(J)+\sum_{k\text{属于}J}\alpha_k^0=0。$$

如果 $J\neq\ominus$ 或 I，那么，这显然是可能的，因为这样的话 $\sum_{k\text{属于}J}\alpha_k^0$ 能够被赋予任何值。如果 $J=\ominus$ 或 I，不存在需要证明的东西，因为那样的话，根据 25.3.4 中的(25:3:a)和 25.4.1 中的(25:4)，$\mathrm{v}(J)=0$。

这一结果能够有如下解释：如果我们不考虑非零和博弈[②]，那么，条件(41:6)表达了，虽然博弈 Γ 本身可能是不可分解的，它策略等价于某个可分解的博弈 Γ'。[③]

42.2.2　上述严格结果弄清楚了我们目前的方案的缺陷所在。可分解性是一个重要的策略性质，从而，我

---

① 依据 27.1.1 中的(27:2)。要看到，(42:A)的 $\mathrm{v}_\Gamma(S)$ 和 $\mathrm{v}_\Gamma{}'(S)$ 正是(27:2)的 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{v}'(S)$。——346，①

② 即我们不但要求 Γ 是这样，而且还要求 Δ、H 是这样。——346，②

③ 正如第 300 页脚注①的研究所表明的那样，35.2.2 中组成部分的处理完全等于此。——346，③

们感到不便的是，两个策略等价的博弈中，一个可以说是可分解的，而另一个却不可分解。因此，我们希望拓
347 展这些概念，使可分解性变成策略等价下的一个不变性质。

换句话说：我们想修改我们的概念，使得 27.1.1 中定义策略等价的变换(27:2)不干扰一个可分解博弈 Γ 与其组成部分 Δ 和 H 之间的关系。根据(41:3)，这一关系被表达为

(42:2) $\quad v_\Gamma(S\cup T)=v_\Delta(S)+v_H(T),\quad S\subseteq J, T\subseteq K$。

现在，如果我们以同样的 α_k^0 把(27:2)运用于博弈 Γ、Δ、H，那么，(42:2)显然不受干扰。惟一的麻烦是起始条件(27:1)。这是说，对于 Γ、Δ、H，分别有

$$\sum_{k\text{属于}I}\alpha_k^0=0,\quad \sum_{k\text{属于}J}\alpha_k^0=0,\quad \sum_{k\text{属于}K}\alpha_k^0=0。$$

而且，虽然我们现在假设第一个关系成立，另外两个则可能不成立。

因此，一个自然的办法是完全略去 27.1.1 中的(27:1)，即扩大博弈的范围，仅仅按照变换(27:2)，把策略地等价于一个零和博弈的所有博弈都包括进去，不要求(27:1)。

正如我们在 27.1.1 中看到的那样，这等于用一个新的函数取代后者的函数

$$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。$$

新的函数是

$$H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\alpha_k^0。$$

[$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 不再满足(27:1)]。以这一方式从满足 42.1

中的(42:1)的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的系得到的函数 $H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的系很容易描述。其特征是性质

(42:3)　　$$\sum_{k=1}^{n} H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv s。$$①

总之:

(42:B)　　我们正在扩大我们所考虑的博弈的范围,从零和博弈过渡到常数和博弈。② 348

42.2.3 我们的上述推广并不改变我们关于策略等价的主要概念。认识到这一点是基本的。我们最好通过考虑如下两点来做到这一点。

首先,我们在 25.2.2 中说过,我们准备仅仅用其特征函数理解一个博弈的所有定量性质。我们必须认识到,现在的博弈与最初的零和博弈一样,我们有充分理由这么做。理由是

(42:C)　　每一个常数和博弈策略等价于一个零和博弈。

证明:变换(27:2)显然用 $s+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0$ 取代了(42:3)中的 s。这样,我们有可能选择 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$,使 $s+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0$,即

---

① s 是任意一个常数。在把一个零和博弈变换成这一博弈的变换(27:2)中,显然存在着

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=s。$$——347,①

② 这使 42.1 开头的说法有了一个严格的意思,我们尚不具备考虑所有博弈的条件。与此同时,我们拓展了 27.1.1 中引入的策略等价的概念,将其按照变换(27:2)重新定义,但抛弃条件(27:1)。——347,②

把给定的常数和博弈变成一个(策略等价的)零和博弈。

第二,我们新的策略等价概念仅仅对于我们引入的新的(非零和)博弈是必要的。对于原来的(零和)博弈来说,它等价于原来的概念。换句话说:如果两个零和博弈都能够通过 27.1.1 的变换(27:2)相互得到,那么,(27:1)自动得到了满足。事实上,这是我们在第 246 页中已经看到的。

42.3 新理论中的特征函数

42.3.1 给定一个常数和博弈 $\Gamma'[H_k'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 满足(42:3)],我们能够通过重复 25.1.3 的定义引入其特征函数 $\mathrm{v}'(S)$。① 另一方面,我们可以引入 42.2.2 和 42.2.3 的论述所给出的方法:我们能够像 42.2.2 那样从零和博弈 Γ 的特征函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 得到 Γ' 的特征函数 $H'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$,即选择适当的 α_k^0,令

(42:4) $$H'(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv H(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\alpha_k^0,$$

然后,用 27.1.1 中的(27:2)定义 Γ' 的特征函数 $\mathrm{v}'(S)$,即

(42:5) $$\mathrm{v}'(S) \equiv \mathrm{v}(S)+\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k。$$

349 现在,这两种方法是等价的,即(42:4)和(42:5)的 $\mathrm{v}'(S)$ 与 25.1.3 重复应用所得到的 $\mathrm{v}'(S)$ 一致。事实上,25.1.3 的公式直接表明,那里(42:4)的替换的结果是

① 尽管 Γ' 不再是零和博弈,25.1.3 的整个内容几乎能够被逐字重复。存在两种例外情况。在 25.1.3 的(25:1)和(25:2)中,我们必须在极右端条件上加上 s。[所以如此,原因在于我们现在用(42:3)取代了(31:1)。]这一差异完全无关紧要。——348,①

(42:5)。[①②]

42.3.2 正如我们在 25.3.1 和 26.2 中指出过的那样，v(S)是一个零和博弈的一个特征函数，当且仅当它满足 25.3.1 的条件(25:3:a)—(25:3:c)。(其证明见 25.3.3和 26.1。)在常数和博弈情况下，这些条件变成什么呢？

为了回答这一问题，让我们牢记，(25:3:a)—(25:3:c)意味着 25.4.1 中的(25:4)。因此，我们能够把(25:4)添加到它们之中，并修改(25:3:b)，在其右边加上 v(I)[根据(25:4)，这并不带来任何变化]。因此，全部零和博弈的 v(S)的特征变成了：

(42:6:a)　　$\mathrm{v}(\ominus)=0$,

(42:6:b)　　$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(-S)=\mathrm{v}(I)$,

(42:6:c)　　$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)\leqq\mathrm{v}(S\cup T)$,

如果 $S\cap T=\ominus$，且

(42:6:d)　　$\mathrm{v}(I)=0$。

这样，所有常数和博弈的 v′(S)得自这些 v(S)，具体做法是使它们服从 42.3.1 的变换(42:5)。这一变换如何影响(42:6:a)—(42:6:d)呢？

---

① 不难发现这一分析口头上的等价说法。——349，①

② 假如我们决定仅仅用(42:2)和(42:5)来定义 v′(S)，会出现模糊性问题。事实上：一个给定的常数和博弈 Γ′显然能够通过(42:4)从很多不同的零和博弈 Γ 得到，那么，(42:5)总给出相同的 v′(S)吗？

在这种情况下，这一点是不难证明的。然而，没有必要这么做，因为我们已经证明了(42:5)的 v′(S)总等于 25.1.3 的 v′(S)。而且，v′是仅仅借助 Γ′毫无含糊地定义的。——349，②

你可以直接验证，(42:6:a)—(42:6:c)丝毫不受影响，而(42:6:d)被彻底破坏了。[①] 所以，我们看到：

(42:D)　　v(*S*)是一个常数和博弈的特征函数，当且仅当它满足条件(42:6:a)—(42:6:d)。

[从现在起，我们将 v′(*S*)写成 v(*S*)。]

如上所述，(42:6:d)不再成立。然而，我们有

(42:6:d*)　　$v(I) = s$。

事实上，考虑到25.1.3的方法，从(42:3)看，这是明显的。它也能够得自第347页的脚注①和上述脚注③[我们的 v(*S*)是那里的 v′(*S*)]之间的比较。另外，(42:6:d*)在直觉上也是清楚的：全部玩家的联盟获得这一博弈的固定和 *s*。

42.4 新理论中的分配、占优和解

350 **42.4.1** 从现在起，我们考虑任何常数和博弈的特征函数，即仅仅满足(42:6:a)—(42:6:c)的函数 v(*S*)。

在这个更为广阔的范围内，我们的第一个任务自然是把30.1.1中定义的分配、占优和解的概念推广到这一范围。

让我们从分配开始。我们能够继承30.1.1将其解释为向量：

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}。$$

条件(30:1)和(30:2)中，我们可以保留(30:1)：

---

① 根据(42:5)，(42:6:d)的右边变成了 $\sum_{i属于I} \alpha_i^0$，即 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0$，且这个和是完全随意的。——349，③

(42:7) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)]$$

不变——我们在那里提到的理由现在同样成立。[①] 然而，我们必须修改(30:2)。该博弈的常数和是s[见(42:3)和(42:6:d*)]，每一种分配都应该是这个数额的分配，即自然地假设

(42:8) $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = s。$$

由(42:6:d*)，这等价于(42:8*) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \mathrm{v}(I)$。[②]

我们不加改变地承接30.1.1中有效集、占优和解的定义[③]以及有关这些定义的理由。这些定义没有因我们当前的推广受到损伤。

42.4.2 这些分析借助如下观察得到证实：

(42:E) 对于我们的两个常数和博弈Γ、Γ'的新的策略等价概念[④]，存在着它们的分配的同构，即Γ的分配到Γ'的分配的一一映射，它保持30.1.1中的概念不变。[⑤]

这与31.3.3中(31:Q)相似，而且能够以相同方式得到证明。就像我们在那里做的那样，我们把Γ的分配$\vec{\alpha}=$

---

① $\alpha_i < \mathrm{v}[(i)]$是不可接受的，见29.2.1的开头。——350，①

② 对于零和博弈的特殊情况，$s=\mathrm{v}(I)=0$，所以(42:8)、(42:8*)与(30:2)一致。——350，②

③ 即(30:3)；(30:4:a)—(30:4:c)；(30:5:a)、(30:5:b)或(30:5:c)。——350，③

④ 如42.2.2末尾定义的那样，即用27.1.1中的(27:2)来定义，放弃(27:1)。——350，④

⑤ 如42.4.1中重新定义的那样。——350，⑤

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$与$\Gamma'$的分配$\vec{\alpha}'=\{\alpha_1',\cdots,\alpha_n'\}$之间的对应

(42:9) $$\vec{\alpha}\leftrightarrows\vec{\alpha}'$$

定义为

(42:10) $$\alpha_k'=\alpha_k+\alpha_k^0。$$

351 其中,$\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$由27.1.1中的(27:2)定义。

现在,31.3.3中(31:Q)的证明几乎可以一字不漏地照搬过来。一个不同之处是,30.1.1的(30:2)由(42:8)取代,但因27.1.1中(27:2)而给出$v'(I)=v(I)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0$,这一点也是不言自明的。① 回顾31.3,读者就会明白,那里所说的一切都同样适用于当前情况。

42.5 新理论中的本质性、非本质性和可分解性

42.5.1 42.2.3的(42:C)告诉我们,每个常数和博弈策略等价于一个零和博弈。因此,(42:E)允许我们把第31节中来自零和博弈的一般结果转移到常数和博弈,总是通过策略等价从后面的一类过渡到前面的一个。

这迫使我们借助一个常数和博弈与一个非本质零和博弈的策略等价来界定其非本质性。因此,我们可以说:

(42:F) 一个零和博弈是一个非本质博弈的充分

---

① 而且这是提到的证明中惟一一点,在该点处用到$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0=0$[即我们不再要求的27.1.1中(27:1)]。——351,①

必要条件是，它策略等价于 $\bar{v}(S) \equiv 0$ 的博弈［见 23.1.3 或 27.4.2 中的(27:C)］。根据上面的论述，对于一个常数和博弈来说，同样的说法正确。（但是，我们必须使用我们的新的非本质性和策略等价的定义。）

本质性当然被定义为非本质性的否定。

42.3.1 的变换公式(42:5)运用于 27.4 的准则表明，仅仅存在一些小的变化。

27.4.1 中的(27:8)必须换成

$$\gamma = \frac{1}{n}\left\{v(I) - \sum_{j=1}^{n} v[(j)]\right\}, \tag{42:11}$$

因为这一公式的右边在变换(42:5)下保持不变，而且，对于 $v(I) = 0$（即零和博弈），它就是(27:8)。

用(42:11)取代(27:8)要求 27.4.1 的准则(27:B)中的两个公式的右边的 0 换成 $v(I)$。27.4.2 的准则 352
(27:C)—(27:D)在(42:5)保持不变，从而不受影响。

42.5.2　现在，我们能够回头在较为广泛的常数和博弈范围内讨论 41.3—41.4 中的合成和分解了。

41.3 的所有内容能够被逐字重复。

当我们遇到 41.4 时，那里阐述的问题(41:A)再次出现。为了确定是否需要超出 41.3.2 的(41:6)即(41:7)的假设，我们必须［对于 $v_\Gamma(R)$，$v_\Delta(S)$，$v_H(T)$ 中的每一个］研究 41.3.2 中的(42:6:a)—(42:6:c)，而不是要研究 25.3.1 中的(25:3:a)—(25:3:c)。

完全像 41.4 中的(25:3:a)、(25:3:c)那样，(42:6:a)、(42:6:c)可直接得到证明。至于(42:6:b)和 41.4 中(25:

3:b)的证明基本上是适用的，不过，这里不需要(41:8)或(41:9)那样的额外条件。为简化问题，我们详细给出这一证明。

(42:6:b)的证明：我们将从其对 $v_\Gamma(R)$ 成立推出其对 $v_\Delta(S)$ 和 $v_H(T)$ 成立。由对称性，我们只需考虑 $v_\Delta(S)$。

要证明的关系是

(42:12) $$v_\Delta(S)+v_\Delta(J-S)=v_\Delta(J)。$$

由(41:4)，这意味着

(42:12*) $$v_\Gamma(S)+v_\Gamma(J-S)=v_\Gamma(J)。$$

要证明(42:12*)，对于 $v_\Gamma(R)$，将(42:6:b)运用于 $R=J-S$ 和 $R=J$。由此，$I-R=S\cup K$ 和 $I-R=K$。所以，(42:12*)变成

$$v_\Gamma(S)+v_\Gamma(I)-v_\Gamma(S\cup K)=v_\Gamma(I)-v_\Gamma(K),$$

即

$$v_\Gamma(S\cup K)=v_\Gamma(S)+v_\Gamma(K),$$

而且，这正是(41:6) $T=K$ 的特殊情况。

因此，我们把41.4的结果(41:6)改进如下：

(42:G) 在全部常数和博弈范围之内，博弈 Γ 是对于集合 J 和 K 来说可分解的(见41.3.2)，其充分必要条件是，它满足条件(41:6)，即(41:7)。

42.5.3 41.4中(41:C)与42.5.2中(42:G)之间的比较告诉我们，从零和博弈过渡到常数和博弈使我们避开了对于可分解性来说不需要的条件(41:8)，即(41:9)。

现在，可分解性仅仅由(41:6)即(41:7)定义，而且如

本来应该的那样，它在策略等价下保持不变。

我们还知道，当一个博弈 Γ 被分解为两个博弈 Δ 和 H(它们都是常数和博弈！)时，我们能够借助策略等价使这些博弈都是零和博弈。[对于 Γ，见 42.2.3 中(42:C)，对于 Δ 和 H，见 42.2.1 中(42:A)。]

因此，我们总能够根据问题需要方便地选择博弈的范 353
围——零和博弈或常数和博弈。

在本章余下的内容中，除非明确说明，我们继续分析常数和博弈。

43. 分解分拆

43.1　裂集和成分博弈

43.1　我们定义了博弈 Γ 的可分解性，不过，这不是就这一博弈本身定义的，而是针对全部玩家集合 I 分解为两个互补的集合 J 和 K 来定义的。

因此，我们可以采取如下态度：把博弈 Γ 看作是给定的，把 J 和 K 看作是可变的。由于 J 决定 K(事实上 $K=I-J$)，我们只需把 J 当作变量。这样，我们有如下问题：

给定一个博弈 Γ(有玩家集合 I)，对于什么的集合 $J\subseteq I$(和相应的 $K=I-J$)来说，Γ 是可分解的呢？

如果对于 $J(\subseteq I)$ 来说，博弈 Γ 是可分解的，我们称 J 是 Γ 的裂集。在这一分解中[见 41.2.1 和 41.3.2 的

(41:4)]得到的博弈 Δ 是 Γ 的 J－成分。[①]

因此，裂集 J 由 41.3.2 中的(41:6)即(41:7)定义，其中，$K=I-J$ 必须被代入。

读者将会注意到，这一概念有一个十分简单的直觉含义：一个裂集是一个自足的玩家集合，就规则而言，他们不影响其他玩家，也不受其他玩家影响。

43.2 全部裂集的系的性质

43.2.1 一个博弈的所有裂集整体上由一些简单的性质综合描述。这些性质中的绝大多数具有直接的直觉含义。这也许使得数学证明显得没有必要。不过，我们将系统地前进并给出证明，说明其直觉含义的说明放在脚注中。在随后的讨论中，我们把 Γ 的特征函数 $v_\Gamma(S)$ 写成 $v(S)$。

(43:A) J 是一个裂集，当且仅当其补集 $K=I-J$ 是一个裂集。[②]

证明：Γ 的可分解性对称地涉及 J 和 K。

(43:B) $\ominus$ 和 I 是裂集。[③]

证明：由于 $v(\ominus)=0$，在 $J=\ominus, K=I$ 的情况下，(41:6)或(41:7)显然成立。

43.2.2

354 (43:C) 如果 J'、J'' 是裂集，那么，$J'\cap J''$ 和 $J'\cup J''$

① 按照同一定义，博弈 H[见 41.2.1 和 41.3.2 中(41:5)]是 Γ 的 K 成分 ($K=I-J$)。——353,①

② 从 43.1 的意义上说，一个玩家集合是自足的，这显然等于说，其补集也是自足的。——353,②

③ 它们是自足集的说法是套套逻辑。——353,③

也是裂集。[①]

证明：关于 $J'\cup J''$：由于 J'、J'' 是裂集，对于 J、K 分别等于 J'、$I-J'$ 个 J、K，分别等于 J''、$I-J''$，我们有(41:6)。我们希望对于 $J'\cup J''$，$I-(J'\cup J'')$ 证明(41:6)成立。因此，考虑 $S\subseteq J'\cup J''$，$T\subseteq I-(J'\cup J'')$。令 S' 是 J' 中 S 的部分，那么，$S''=S-S'$ 落入 J' 的补集，且因 $S\subseteq J'\cup J''$，$S''\subseteq I-J'$ 和关于 J'，$I-J'$ 的(41:6)给出

(43:1) $$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(S')+\mathrm{v}(S'')。$$

接着，$S''\subseteq I-J'$，且 $T\subseteq I-(J'\cup J'')\subseteq I-J'$，所以，$S''\cup T\subseteq I-J'$。还有，$S'\subseteq J'$。显然，$S'\cup(S''\cup T)=S\cup T$。因此，对于 J'，$I-J'$，(41:6)还给出

(43:2) $$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S')+\mathrm{v}(S''\cup T)。$$

最后，$S''\subseteq J''$ 且 $T\subseteq I-(J'\cup J'')\subseteq I-J''$。所以，对于 J''，$I-J''$，(41:6)给出

(43:3) $$\mathrm{v}(S''\cup T)=\mathrm{v}(S'')+\mathrm{v}(T)。$$

现在，(43:3)代入(43:2)并应用(43:1)得

$$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T),$$

这正是我们想要的(41:6)。

---

① 交集 $J'\cap J''$：读者也许感到奇怪，两个自足的集合 J'、J'' 竟然有一个非空的交集。然而，正如 $J'=J''$ 的情况所表明的那样，这是可能的。更深层的理由是，一个自足的集合完全可以是一些更小的自足集合（真子集）的和。[见43.3中(43:H)。]我们当前的说法是，如果两个自足的集合 J'、J'' 有一个非空的交集 $J'\cap J''$，那么，这个交集也是这样的自足子集。以这种方式，它显得合理了。

并集 $J'\cup J''$：两个自足的集合的并集也是自足的集合的说法是合理的。当一个非空的交集 $J'\cap J''$ 存在时，这也许显得难以理解，但正如上面的讨论那样，这种情况的确无害。下面的证明实际上是这种情况的初步严格考虑。——354，①

关于 $J'\cap J''$:应用(43:A)和上述结果。由于 J',J''是裂集,所以 $I-J',I-J'',(I-J')\cup(I-J'')$都是裂集,后者显然是 $I-(J'\cap J'')$[1]和 $J'\cap J''$,这正是我们想要的表达式。

43.3 全部裂集的系的特征与分解分拆

43.3.1 也许,除了⊖和 I 之外,不存在其他裂集[见(43:B)]。在这种情况下,我们称博弈 Γ 为*不可分解博弈*。[2] 我们暂时将这一问题搁置一旁[3],继续研究 Γ 的裂集。

355 (43:D) 考虑 Γ 的一个裂集 J 和 Γ 的 J-成分 Δ。那么,$J'\subseteq J$ 是 Δ 的一个裂集,当且仅当它是 Γ 的一个裂集。[4]

证明:考虑(41:4),根据(41:6),当

(43:4) $\quad \mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T) \quad S\subseteq J',T\subseteq J-J'$

时,J'是 Δ 的一个裂集。[我们把 $\mathrm{v}_{\Gamma}(S)$写成 $\mathrm{v}(S)$。]根据(41:6),当

(43:5) $\quad \mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T) \quad S\subseteq J',T\subseteq I-J'$

时,J'是 Γ 的一个裂集。

我们必须证明(43:4)与(43:5)等价。因为 $J\subseteq I$,故

---

① 交集的补集等于补集的并集。——354,②

② 实际上,大多数博弈是不可分解的,不然的话 42.5.2 中的准则(42:G)要求 41.3.2 中的约束方程(41:6)和(41:7)。——354,③

③ 见脚注③及其中提到的内容。——354,④

④ 要在一个自足的集合之内成为一个自足的集合,这等于在最初的(总)集合中成为一个自足集合。这一说法似乎是显然的。从其证明来看,事情并非如此。——355,①

(43:4)显然是(43:5)的一个特例，从而我们只需证明(43:4)意味着(43:5)。

假设(43:4)成立。我们可以对有 J、$K = I - J$ 的 Γ 利用(41:6)。

考虑 $S \subseteq J'$，$T \subseteq I - J'$。令 T' 是 T 属于 J 的部分，那么，$T'' = T - T'$ 属于 $I - J$。所以，$T = T' \cup T''$，$T' \subseteq J$，$T'' \subseteq I - J$，且对于有 J、$I - J$ 的 Γ，(41:6)给出

(43:6)　　$$\mathrm{v}(T) = \mathrm{v}(T') + \mathrm{v}(T'')。$$

然后，$S \subseteq J' \subseteq J$ 且 $T' \subseteq J$，所以，$S \cup T' \subseteq J$。还有，$T'' \subseteq I - J$。显然，$(S \cup T') \cup T'' = S \cup T$。所以，对于有 J、$I - J$ 的 Γ，(41:6)还给出

(43:7)　　$$\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S \cup T') + \mathrm{v}(T'')。$$

最后，$S \subseteq J'$ 且 $T' \subseteq I - J'$，所以 $T' \subseteq J - J'$。因此，(43:4)给出

(43:8)　　$$\mathrm{v}(S \cup T') = \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T')。$$

现在，把(43:8)代入(43:7)并根据(43:6)简化右端就是我们想要的(43:5)。

43.3.2　(43:D)使得这样一些裂集 J 值得考虑，$J \neq \ominus$，但 J 的任何非空真子集 J' 都不是裂集。我们理所当然地称这样的集合 J 为**最小裂集**。

根据不可分解性和最小裂集的定义。(43:D)直接意味着：

(43:E)　　Γ 的 J 成分 Δ 是不可分解的，当且仅当 J 是一个最小裂集。

最小裂集是具有非常简单性质的一类集合，而且，它们决定着所有裂集的总和。我们有下述命题：

(43:F)　　任意两个不同的最小裂集不相交。

(43:G)　所有最小裂集的并集等于 I。

356 (43:H)　通过形成最小裂集的所有可能的聚合的所有并集，我们恰好得到全部裂集的总和。[1]

证明：(43:F)的证明：令 J'、J''是两个并非不相交的最小裂集。那么，根据(43:C)，$J'\cap J''\neq\ominus$是裂集，因为它 $\subseteq J'$且 $\subseteq J''$。这样，J'和 J''的最小性意味着 $J'\cap J''$等于 J'，也等于 J''。所以，$J'=J''$。

(43:G)的证明：只需证明 I 中每一个 k 属于某个最小裂集即可。

存在着包含玩家 k 的裂集（即 I）。令 J 是它们的交集。根据(43:C)，J 是裂集。如果 J 不是最小的，那么，存在一个裂集 $J'\neq\ominus$，$J'\subseteq J$。那么，根据(43:A)和(43:C)，$J''=J-J'=J\cap(I-J')$也是一个裂集，且显然有 $J''\neq\ominus$，J。J'、$J''=J-J'$之一必定包含 k。如 J'包含 k，那么，J'就是以 J 作为其交集的那些集合之一。所以，$J'\supseteq J$。但优于 $J'\subseteq J$ 且 $J'\neq J$，这是不可能的。

(43:H)的证明：根据(43:C)，最小裂集的并集总是裂集，所以，我们只须证明其逆命题。

令 K 是一个裂集。如果 J 是一个最小裂集，那么，根据(43:C)，$J\cap K$ 是裂集，且 $J\cap K\subseteq J$，从而，要么 $J\cap K=\ominus$，要么 $J\cap K=J$。在第一种情况下，J 和 K 不相交；在第二种情况下，$J\subseteq K$。我们看到：

(43:I)　每个最小裂集 J 要么与 K 不相交，要么 $\subseteq K$。

---

① 这些断言的直觉意思应该是相当清楚的。它们以一种合理的方式描述了 Γ 的分解的最大可能性的结构。——356，①

令 K' 是前者情况下的并集，K'' 是后者情况下的并集。$K' \cup K''$ 是所有最小裂集的并集，因此，根据(43:G)，

(43:9)　　$K' \cup K'' = I$。

根据它们来源，K' 与 K 不相交且 $K'' \subseteq K$。即

(43:10)　　$K' \subseteq I - K, \quad K'' \subseteq K$。

现在，(43:9)、(43:10)合起来要求 $K'' = K$。所以，K 是最小集合的一个适当聚合的并集。

43.3.3　(43:F)、(43:G)弄清楚了的一点是，最小裂集形成 8.3.1 意义上的分拆，其并集是 I。我们称之为 Γ 的分解分拆，记为 Π_Γ。现在，(43:H)能够被表达为：

(43:H*)　　一个裂集 $K \subseteq I$ 由下述性质描述：当 K 受到关注时，Π_Γ 的每一个元素的点都聚集在一起，即 Π_Γ 的元素要么完全在 K 之内，要么在 K 之外。

因此，Π_Γ 表达了，在 I 中，在不破坏 Γ 的规则所建立 357
的玩家关系的情况下，Γ 能够被分解到什么程度。① 由(43:E)，Π_Γ 的元素也可以由这样一个事实描述，即它们把 Γ 分解为不可分解的成分。

43.4　分解分拆的性质

43.4.1　分解分拆 Π_Γ 的本质已经得到证明，我们自然要研究这一分拆的精细程度的效应。我们只希望分析两个极端情况：一种情况是，Π_Γ 精细得不能再精细了，即它把 I 分拆成一元集；另外一种情况是，Π_Γ 粗糙得不能再

---

① 即不破坏结果集合的自足性。——357，①

粗糙了,即它根本不分拆 I。换句话说:在第一种情况下,Π_Γ 是(I 中)全部一元集的系;在第二种情况下,Π_Γ 仅仅由 I 组成。

这两个极端情况的含义不难得到说明:

(43:J) Π_Γ 是(I 中)全部一元集的系,当且仅当该博弈是一个本质博弈。

证明:根据(43:H)或(43:H*),显然 Π_Γ 的上述性质等于说所有集合 $J(\subseteq I)$ 都是裂集。也就是说,根据 43.1,对于任意两个互补的集合 J 和 $K(=I-J)$,该博弈是可分解的。这意味着,在这些情况下,(41:6)成立。然而,这意味着,(41:6)加在 S,T 上的条件(即 $S\subseteq J, T\subseteq K$)仅仅意味着 S 和 T 不相交而已。因此,我们的说法变成了

$$\mathrm{v}(S\cup T)=\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T),\quad S\cap T=\ominus。$$

这样,这恰好是 27.4.2 中(27:D)给出的非本质性的条件。

(43:K) Π_Γ 由 I 组成,当且仅当博弈 Γ 不可分解。

证明:根据(43:H)[或(43:H*)],Π_Γ 的上述性质显然等于说,惟有$\ominus$和 I 是裂集。但是,这正是 43.3 开头不可分解性的定义。

这些结果表明,对于一个博弈来说,不可分解性与非本质性是两个极端情况。尤其是,非本质性意味着,43.3 末尾描述的 Γ 的分解能够进行到单个玩家,且不破坏博弈 Γ 的规则建立的关系。[1] 读者应该将这一说法与我们最初在 27.3.1 中给出的非本质性的定义比较。

---

[1] 即这一博弈中的每一位玩家都是自足的。——357,②

43.4.2 非本质性、可分解性和玩家个数之间的联系是:

$n=1$:这种情况极少有实际意义。这样一个博弈显然是不可分解的①,与此同时,根据 27.5.2 中的第一项说明,它是非本质的。

应该注意的一点是,根据(43:J)、(43:K),当 $n\geqq 2$ 358
时,不可分解性与非本质性是不相容的,但 $n=1$ 时就不是这样。

$n=2$:根据 27.5.2 的第一点说明,这样一个博弈也必然是非本质博弈。因此,它是可分解的。

$n\geqq 3$:对于这些博弈,可分解性是一种例外情况。事实上,可分解性意味着(41:6)中有 $J\neq\ominus, I$。因此,$K=I-J\neq\ominus, I$。所以,我们能够在 J 中选择 j,在 K 中选择 k,那么,在(41:6)中令 $S=(j), K=(k)$,这给出

(43:11)　　$\mathrm{v}[(j,k)]=\mathrm{v}[(j)]+\mathrm{v}[(k)]$。

这样,$\mathrm{v}(S)$ 必须满足的方程式惟有 25.3.1 的(25:3:a)、(25:3:b),(如果考虑的是零和博弈)或 42.3.2 的(42:6:a)、(42:6:b)。(43:11)不属于这两种情况任何一个,因为(43:11)中只有集合 (j)、(k) 和 (j,k),且当 $n\geqq 3$ 时,②这些集合不是那些方程式中出现的集合——即,$\ominus$、I 或互补的集合。因此,(43:11)是一般来说得不到满足的额外条件。

根据上述论述,一个不可分解的博弈不可能有 $n=2$,

---

① 因为 I 是一个一元集,惟有 $\ominus$ 和 I 是其子集。——357,③

② 对于 $n=2$,情况则不同。$(j,k)=I$ 且 (j) 与 (k) 互补。——358,①

因此它有 $n=1$ 或 $n\geqq 3$。结合(43:E),我们得到下述结果:

(43:I) 分解分拆 Π_{Γ} 的每一个元素要么是一个一元集,要么有 $n\geqq 3$ 个元素。

注意,Π_{Γ} 中的一元集是一元裂集[①]——即它们对应着这样一些玩家,(从联盟策略的角度看)他们是自足的,与该博弈中其他玩家分离的。从 35.2.3 和第 340 页脚注①的意义上说,他们是"哑玩家"。所以,我们的结果(43:L)表达了这样一个事实:那些不是"哑玩家"的玩家被分组为不可分解的、有 $n\geqq 3$ 个玩家成分博弈。

这似乎也是社会组织的一般原理。

44. 可分解博弈:理论的进一步推广

44.1 一个可分解的博弈的解及其成分的解

359 **44.1** 我们已经完成了关于合成和分解的描述工作。接下来,让我们进入这一问题的核心:研究一个可分解的博弈的解。

考虑一个博弈 Γ,它是对于 J 和 $I-J=L$ 来说可分解的,有 J- 和 K- 两个成分博弈 Δ、H。正如 42.5.3 开头解释的那样,我们能够用策略等价将三个博弈都变成零和博弈。

假设 Δ 的解和 H 的解是已知的,那么,Γ 的解是确定

① 这样一个裂集自然是最小裂集。——358,②

的吗？换句话说：一个可分解的博弈的解如何得自其成分的解？

这方面存在着一个看似合理的猜测，我们下面的任务是严格证明这一猜测。

44.2 分配和分配集的合成与分解

44.2.1 让我们使用41.3.1中的符号。但是，由于我们把 $v_\Gamma(S)$ 写成了 $v(S)$，根据(41:4)、(41:5)，这也取代 $v_\Delta(S)$、$v_H(S)$。

另一方面，我们要就 Γ、Δ、H 区别分配。① 在表达这一区别时，我们最好指明一个分配所涉及的玩家集合，而不是这些玩家所参与的博弈。也就是说，我们将记为 I、J、K，而不是 Γ、Δ、H。在这个意义上说，我们把对于 I 来说（即 Γ）的分配记为

$$(44:1)\qquad \vec{\alpha}_I = \{\alpha_{1'},\cdots,\alpha_{k'},\alpha_{1''},\cdots,\alpha_{l''}\},$$

而且对于 J,K（即 Δ,H）来说的解分别记为

$$(44:2)\qquad \vec{\beta}_J = \{\beta_{1'},\cdots,\beta_{k'}\},$$

$$(44:3)\qquad \vec{\gamma}_K = \{\gamma_{1''},\cdots,\gamma_{l''}\}。$$

如果这三个分配通过如下关系联系着，

$$(44:4)\qquad \begin{aligned} \alpha_{i'} &= \beta_{i'}, & i' &= 1',\cdots,k', \\ \alpha_{j''} &= \gamma_{j''}, & j'' &= 1'',\cdots,l'', \end{aligned}$$

那么，我们说，$\vec{\alpha}_I$ 得自 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 的合成，$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 得自 $\vec{\alpha}_I$（就 J 和 K 而言）的分解，而且 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 分别是 $\vec{\alpha}_I$ 的（J,K）成分。

---

① 这里，重新引入41.3.1中的玩家符号能够带来方便。——359，①

由于我们正在研究的是零和博弈，所有这些分配必定满足30.1.1中条件(30:1)、(30:2)。你可以直接验证，$\vec{\alpha}_I$、$\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 的确满足(44:4)。

30.1.1的(30:1)的证明：对于 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 来说，这一结果的成立显然等价于其对于 $\vec{\alpha}_I$ 成立。

30.1.1的(30:2)的证明：对于 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 来说，[利用(44:4)]这是说，

$$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} = 0, \tag{44:5}$$

$$\sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = 0。 \tag{44:6}$$

对于 $\vec{\alpha}_I$ 来说，它等于

$$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} + \sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = 0。 \tag{44:7}$$

360 因此，其对 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 成立意味着其对 $\vec{\alpha}_I$ 成立，但其对 $\vec{\alpha}_I$ 成立并不意味着其对 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 成立。事实上，(44:7)意味着(44:5)和(44:6)的等价，但它并不意味着其中之一成立。

我们有：

(44:A) 任何两个分配 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$ 都能够被合成为一个 $\vec{\alpha}_I$，而一个分配 $\vec{\alpha}_I$ 能够被分解为 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$，当且仅当它满足(44:5)，即(44:6)

我们称这样一个分配 $\vec{\alpha}_I$（对于 J、K）可分解。

44.2.2 这种情况类似于有关博弈本身的情况：合成总是可能的，而分解则未必。可分解性再次成了例

外情况。[①]

最后，还应该注意的是，分配的合成有着简单的直觉含义。它对应着“把两个独立出现的分配看作一个”的运算，这一运算在 41.2.1、41.2.3、41.2.4 中对于博弈来说也发挥着相应的作用。$\vec{\alpha}_I$ 分解（为 $\vec{\beta}_J,\vec{\gamma}_K$）是可能的，当且仅当两个自足的玩家集合 J,K 由分配 $\vec{\alpha}_I$ 的玩家集合给定它们“应得的数额”——它们等于 0。这正是条件（44:A）[即（44:5）、（44:6）]的含义。

44.2.3　考虑分配 $\vec{\beta}_J$ 的集合 V_J，分配 $\vec{\gamma}_K$ 的集合 W_K。令 U_I 是这样一些分配 $\vec{\alpha}_I$ 组成的集合，这些分配 $\vec{\alpha}_I$ 得自 V_J 中所有分配 $\vec{\beta}_J$ 与 W_K 中所有分配 $\vec{\gamma}_K$ 的合成。我们说，U_I 得自 V_J 与 W_K 的合成，V_J、W_K 得自 U_I（对于 J、K）的分解，V_J、W_K 是 U_I 的（J－、K－）成分。

显然，无论 V_J、W_K 是什么，合成运算总能够进行，然而，一个给定的 U_I 未必允许（对 J、K）的分解。如果 U_I 能够被分解，那么，我们将其称为（对于 J、K 来说的）可分解。

注意，U_I 的这一可分解性是一个十分强的约束条件。这意味着，其他事情不说，U_I 的所有元素 $\vec{\alpha}_I$ 必须是可分解的（见 44.2.2 末尾的解释）。

为了就分配集 U_I、V_J、W_K 更为详细地解释这些概念，一个方便的做法是仅仅讨论博弈 Γ、Δ、H 的解。

---

① 对于博弈而言的可分解性与对于分配而言的可分解性之间存在着巨大差异。然而，我们还是要看到 41.3.2 中（41:4）、（41:5）；41.4.2 中（41:8）、（41:9）、（41:10）；（44:4）、（44:5）、（44:6）、（44:7）之间的相似性。——360，①

44.3 解的合成与分解:主要结果

361 **44.3.1** 令 V_J、W_K 分别是博弈 Δ、H 的解。它们的合成生成一分配集 U_I,我们期望 U_I 是博弈 Γ 的一个解。事实上,U_I 是我们在下面能够表述的一个行为标准的表达。我们将在(44:B:a)—(44:B:c)中给出口头表述,在脚注中给出等价数学描述,正如读者将会验证的那样,这补充了我们的合成定义。

(44:B:a) *J* 的玩家总是恰好得到其"应得的数额"(0),对于 *K* 的玩家来说也是这样。①

(44:B:b) 集合 *J* 中玩家的命运与集合 *K* 中玩家的命运之间没有任何联系。②

(44:B:c) *J* 中玩家的命运受制于行为标准 V_J③,*K* 中玩家的命运受制于行为标准 W_K。④

如果两个成分博弈被设想为完全相互独立地进行,那么,这显然是将它们的独立解 V_J、W_K 看作合成博弈 Γ 的一个解 U_I 的一个合理方式。

然而,由于一个解是一个严格的概念,这一断言需要证明,也就是说,我们必须证明:

---

① U_I 的每个元素 $\vec{\alpha}$ 都可分。——361,①

② 通过合成,建立 U_I 时使用的任一 $\vec{\beta}_J$ 和建立 U_I 时使用的任一 $\vec{\gamma}_K$ 给出 U_I 的一个元素 $\vec{\alpha}_I$。——361,②

③ 上面提到的 $\vec{\beta}_J$ 恰好是 V_J 的元素。——361,③

④ 上述 $\vec{\gamma}_K$ 恰好是 W_K 的元素。——361,④

(44:C)　　如果 V_J、W_K 分别是 Δ、H 的解，那么，它们的合成 U_I 是 Γ 的一个解。

44.3.2 这是常识与数学严格性之间的典型关系的一个例子。基于常识的断言（当前情况中，只要 V_J、W_K 是解，那么，U_I 就是一个解）固然是需要的，但除非在数学上得到证明，它在理论（当前情况中的定义 30.1.1）上就是站不住脚的。从这个意义上说，严格比常识更重要。然而，这进一步受到另一种考虑的限制，如果数学证明未能证明常识性的结果，那么，我们就更有理由拒绝整个理论。因此，数学方法的主要任务是以一种非常识的方式对理论进行验证。

我们将证明，(44:C)虽然不十分重要，却是正确的。 *362*

我们也许预计(44:C)的逆命题也是正确的，即希望证明：

(44:D)　　如果 U_I 是一个解，那么，它能够被分解为 Δ、H 的解 V_J、W_K。

表面上看，这是相当合理的：由于 Γ 是两个完全独立的博弈的合成，Γ 的解怎么会不表现出这个合成结构呢？

然而，令人吃惊的是，(44:D)一般来说并不成立。读者也许会想，如果我们真的接受上述方法论说明，那么，我们就应该放弃我们的理论，至少做出实质性的修改。然而，我们将证明，对于(44:D)来说，“常识”基础相当可疑。事实上，我们的结果与(44:D)矛盾，我们将提供一个十分合理的解释，从而成功地将其与社会组织中众所周知的现象联系起来。

44.3.3 我们要做出相当详细的分析才能正确理解(44:D)和用于取代它的理论的正确性。为此,我们首先指出(44:D)如何不成立。

一个自然的做法是,把(44:D)分成两个断言:

(44:D:a) 如果 U_I 是 Γ 的一个解,那么,它是(对于 J,K)可分解的。

(44:D:b) 如果 Γ 的一个解 U_I 是(对于 J,K)可分解的,那么,它的成分 V_J、W_K 分别是 Δ、H 的解。

我们将会看到,(44:D:b)是正确的,而(44:D:a)是错误的。也就是说,能够发生这样的事情,一个可分解的博弈 Γ 有一个不可分解的解。①

然而,一个解(或任何一个分配集)的可分解性是由44.3.1 中的(44:B:a)—(44:B:c)表达的。所以,这些条件中的某些必定对于上述不可分解的解不成立。我们将会看到(见 46.11),未得到满足的条件是(44:B:a)。这也许令人十分灰心,因为(44:B:a)是基本条件,如果它不成立,条件(44:B:b)、(44:B:c)甚至无法描述。

分解的概念有一定的弹性。这在 42.2.1、42.2.2、42.5.2 中有所表现,那里,通过修改概念,我们成功地避开了一个不方便的辅助条件,它与博弈的可分解性联系着。我们还将看到,按照这种方法,我们将再次遇到困难,所以,(44:D)将由一个正确且令人满意的定理取代。

① 这类似于这样一个现象:一个对称的博弈可以有一个不对称的解。——362,①

因此，我们必须修改我们的方案，使条件(44:B:a)能够被忽略。

我们将在这方面取得成功，从而(44:B:b)、(44:B:c)不会给我们制造困难，一个完美的结果将展现在我们面前。

44.4　理论的推广：外部来源

44.4.1　现在是略去我们在44.1中(暂时)引入的正规化的时候了：我们考虑的博弈是零和博弈。我们回到42.2.2的观点，根据那里的观点，博弈是常数和博弈。 363

理解这些之后，考虑一个博弈Γ，它是(对于J,K)可分解的，其两个成分是J-成分Δ和K-成分H。

如44.2.1、44.2.2中给定的那样，分配的可合成性和可分解性理论能够无显著改动地在这里重复。(44:1)—(44:4)可以一字不漏地照搬过来，而(44:5)—(44:7)也只须修改其右边。由于30.1.1的(30:2)已经被42.4.1的(42:8*)取代，公式(44:5)—(44:7)现在变成

(44:5*)　$$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} = \mathrm{v}(J),$$

(44:6*)　$$\sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = \mathrm{v}(K),$$

且

(44:7*)　$$\sum_{i'=1'}^{k'} \alpha_{i'} + \sum_{j''=1''}^{l''} \alpha_{j''} = \mathrm{v}(I) = \mathrm{v}(J) + \mathrm{v}(K)。$$

[最后一个方程的右边来自42.3.2中(42:6:b)或41.3.2中(41:6)中令$S=J, T=K$。]这种情况恰似44.2.1，事实

上，它来自与 42.4.2 同构的情况。因此，$\vec{\alpha}_I$ 满足(44:7*)，但其可分解性需要条件(44:5*)、(44:6*)。而且，(44:7*)的确意味着(44:5*)和(44:6*)的等价，但它并不意味着其中之一成立。

这样，44.2.1 中的可分解性准则(44:A)再次成立，只不过我们的(44:5*)、(44:6*)取代了(44:5)、(44:6)。而且，44.2.2 的最终结论可以被重述为：$\vec{\alpha}_I$ 的分解(为 $\vec{\beta}_J$、$\vec{\gamma}_K$)是可能的，当且仅当两个自足的玩家集合 J、K 恰好按照这个 $\vec{\alpha}_I$ 获得应得的数额，现在，这些数额是 $\mathrm{v}(J)$、$\mathrm{v}(K)$。[①]

由于我们知道分配的可分解性的这一限制——44.3.1 中(44:B:a)的理由——是困难来源之一，我们不得不将其去除。这意味着条件(44:5*)、(44:6*)的去除，即最初来自 42.4.1 中的条件(42:8*)的去除。

44.4.2 根据上面的论述，我们将用一个新的分配概念构筑常数和博弈 Γ 的理论。这个新的分配概念的基础仅仅是 42.4.1 的(42:7)[即 30.1.1 的(30:1)]，不再要求 42.4.1 中的(42:8*)。换句话说，[②]

364 一个扩展的分配是数 $\alpha,\cdots,\alpha_n$ 的一个系，它具有如下性质：

(44:8) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n。$$

我们不对 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ 施加任何约束条件。我们也将这些扩展的

① 不再是原来情况下的零。——363，①

② 我们重新用 1，…，n 记玩家。——363，②

分配看作向量

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}。$$

44.4.3 现在，我们必须充分考虑以分配的概念为基础的定义，即 30.1.1 和 44.2.1 的那些定义。不过，在此之前，我们最好解释一下扩展的分配这个概念。

这一概念的实质是，它代表着玩家之间特定数额的分布，但不要求它们的和应该等于博弈 Γ 的常数和。

对于仅仅相互打交道的玩家来说，这样的安排是外来的。然而，我们已经把一个分配想像为提交给全部玩家的一个分配方案。（这种想法到处可见，例如，在 4.4、4.5 中；其在 4.4.1 中相当明确。）这样一个建议也许来自某个玩家①，不过，这无关紧要。我们同样能够想像的是，外部来源向 Γ 的玩家们提交各种各样的分配供其考虑。所有这些与我们过去的分析协调，不过，这些“外部来源”只是在提出建议时才出现，不对博弈成果做出贡献，也不参与成果分享。

44.5 剩余

44.5.1 现在，扩展的分配概念可以被用于表达，“外部来源”能够提出建议，做出贡献或分享成果，即转移成果。对

---

① 他试图建立一个联盟。由于我们把整个分配看作他的建议，这必然要求我们假设他甚至正在向他一些玩家提出他的建议，这些玩家将不被包括在这个联盟之中。对于这些玩家，他可能提议给他们各自的最小值 v[(i)]（也可能更多，见 38.3.2 和 38.3.3）。也许还存在着介于“被接纳和被排斥”之间的玩家（见 37.1.3 的第二种情况）。当然了，那些不那么受青睐的玩家有可能使其不满显效，这导致占优的概念等。——364，①

于扩展的分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 来说，这一转移数额是

$$(44:9)\qquad e=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I),$$

并被称为 $\vec{\alpha}$ 的剩余。因此，

$$(44:10)\qquad \begin{array}{ll} e>0, & \text{做出贡献,} \\ e=0, & \text{不发生转移,} \\ e<0, & \text{分享成果。} \end{array}$$

365 为了使提出的问题切合实际，我们要对此做出适当限制，而且我们将赋予其应得的数额。

重要的一点是，要认识到这些转移与该博弈如何相互影响。这些转移是来自外部的建议的部分，通过权衡，按照占优准则等，它们可能被玩家们接受或拒绝。① 在这一方法的进程中，没有得到满足的玩家集合可以回到博弈 Γ，这是它们关于（扩展的）分配的偏好的有效性的惟一准则。② 因此，博弈——我们考虑中的社会过程的物质背景——决定着组织的各个方面的稳定性，但借助外部建立起来的初始状态，受上面提到的剩余的约束。

44.5.2 剩余受到的最简单"约束"是明确描述其取值 e。在对此做出解释时，我们应该牢记(44:10)。

---

① 这当然是社会过程的一个狭隘的、甚至可能是有点随意的描述。不过，应该牢记，我们仅仅将其用于实现如下确定的和有限的目的：为了确定稳定的均衡状态，即解。4.6.3 末尾的总结说明应该已经把这一点讲清楚了。——365，①

② 我们当然暗指有效性和占优的定义，见 4.4.1 和 4.4.3 开头，其严格形式见 30.1.1。44.7.1 中，我们将把严格定义扩展到我们的当前概念。——365，②

当 $e>0$ 或 <0 时，存在着的情况似乎是自相矛盾的。

尤其当 $e<0$ 的时候，即当试图从外部抽取博弈成果时。为什么能够回到一个常数和 $\mathrm{v}(I)$ 博弈的玩家应该接受一个更小的和呢？也就是说，基于这样一个准则的“行为标准”，一个“社会秩序”，怎么能够是稳定的呢？然而，答案是有的：如果所有玩家形成一个联盟，统一行动，该博弈的值是 $\mathrm{v}(I)$。但是，如果他们分列为敌对的组，那么，每个组就必须较悲观地估计它的机会，而且这样的划分有可能使一个比 $\mathrm{v}(I)$ 更小的总和稳定存在。[①]

当 $e>0$，即当外部干预是一个免费的礼物时，这种情况似乎不那么难以令人接受。但是，在这种情况下，为了 366
理解这个礼物在玩家们中间的分配如何能够服从一个稳定的安排，我们必须研究该博弈。由于他们有可能参与各种联盟的可能性，它们的机会的乐观估计将决定玩家的要求。我们的理论必须考虑到他们的调整能够得到

---

① 就最初的试探性定量分析来看，如果这些玩家被分成不相交的集合(联盟)$S_1,\cdots,S_p$，那么，它们的值的和是 $\mathrm{v}(S_1)+\cdots+\mathrm{v}(S_p)$。根据 42.3.2 中的(42:6:c)，这个和 $\leq \mathrm{v}(I)$。

奇怪的是，根据 42.3.2 中的(42:6:b)，当 $p=2$ 时，这个和实际上 $=\mathrm{v}(I)$。也就是说，在这个模型中，三个或多个组之间的相互不和是造成破坏的实际原因。

显然，根据 42.3.2 中的(42:6:c)，上述之和 $\mathrm{v}(S_1)+\cdots+\mathrm{v}(S_p)\geq \sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]$。另一方面，后者是前者中的一个[令 $p=n, S_i=(i)$]。所以，当每位玩家都独立于其他玩家时，破坏最大。

当 $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]=\mathrm{v}'(I)$ 时，即当博弈是非本质博弈时，上述现象消失。[见 42.5.1 中(42:11)。]——365，③

的和。

44.6 对剩余的限制:新结构中一个博弈的非孤立特征

44.6.1 这些分析表明,剩余 e 既不能太小($e<0$ 时),也不能太大($e>0$ 时)。在前一种情况下,有可能出现的局面是,其中每个玩家都倾向于重来,即便最坏的情况发生,即如果他不得不独立行动。[①] 在后一种情况下,将会发生"免费礼物""太大"的事情,即任何可以想像的联盟中的玩家都不可能提出如此高的要求以至分净这个总和。这样,礼物过大成了现有社会秩序的破坏成分了。

我们将在第45节中看到,这些定性分析是正确的,而且我们将通过严格演绎来得到它们发挥作用的细节,并得到严格有效剩余值。

44.6.2 在所有这些分析中,博弈 Γ 不能够再被看作一个独立发生的事情,原因在于剩余是一个外部来源的贡献或抽取。这使我们想到,这些概念应该与博弈 Γ 的分解理论联系起来。成分博弈 Δ 和 H 的确不再是完全独立的,而是相互依存的。[②] 因此,我们应该以原来的方式看待合成博弈 Γ(即将其看作一个独立的博弈),还是以新的

---

① 当提议的总数额 $v(I)+e<\sum_{i=1}^{n}v[(i)]$ 时,这种事情就会发生。根据42.5.1中的(42:11),后一个表达式等于 $v(I)-n\gamma$,这意味着 $e<-n\gamma$。

我们将在45.1中看到,这恰好是 e"太小"的准则。——366,①

② 尽管就规则而言,不存在"相互影响"。见41.2.3和41.2.4。——366,②

方式来看待它，这是一个值得争议的问题，不过，我们有充分理由如此看待 Δ 和 H。然而，我们将看到，对于 Γ 来说，这一含糊性并不从根本上影响结果，有关 Δ 和 H 的较宽容的态度的确是必要的(见 46.8.3 和 46.10)。

当一个博弈 Γ 在上述意义上被看作一个非独立的事情时，在有着外来贡献或抽取的情况下，我们会试图采取如下做法：将这一外部来源也当作一个玩家，将其与其他玩家合起来构造一个更大的博弈 Γ′。(包括 Γ 的)Γ′的规则必须设计得为希望发生的转移提供一个机制。借助我们的最终结果，我们应该能够满足这一要求，不过，这一问题有一定的难度，不适合放在这里讨论。

44.7 新结构 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的讨论

44.7.1 重新考虑 44.4.3 开头提到的旧定义是一件十分简单的事情。 *367*

对于扩展的分配来说，我们有 44.4.2 的新定义和我们从 30.1.1 一成不变地继承过来的有效性和占优定义[①]——那里的讨论中提出的这些定义的理由似乎不会因为我们这里的推广而被削弱。这同样适用于解的定义[②]，不过，需要小心的一点是：一个解的定义使解的概念尤其依赖于从中求解的所有分配组成的集合。现在，在我们目前的扩展的分配的结构中，我们将不得不考虑44.5.1中指出的有关它们的约束——尤其关于它们的剩余。这

① 即(30:3)；(30:4:a)—(30:4:c)。—367，①

② 即(30:5:a)、(30:5:b)或(30:5:c)。——367，②

些约束将决定将要受到考虑的所有扩展的分配组成的集合以及解的概念。

44.7.2 特别地，我们将考虑两种类型的约束。

第一，我们将考虑剩余值预先给定的情况。这样，我们有一个等式

$$e=e_0, \tag{44:11}$$

其中，e_0 是给定的。这一约束的含义是，从 44.5.2 的讨论的意义上说，来自外部的转移是预先给定的。

第二，我们将考虑剩余的一个上限被预先给定的情况。这样，我们有一个不等式

$$e \leqq e_0, \tag{44:12}$$

其中，e_0 是给定的。这一约束的含义是，来自外部的转移被赋予一个最大值（从收到转移的玩家的角度看）。

我们真正感兴趣的情况是第一种情况，即 44.5.2 那样的情况。第二种情况从技术上说对于澄清第一种情况来说是有用的——虽然其引入初看似乎是随意的。我们不考虑其他情况，因为我们将仅能够以这两种情况来完成上述讨论。

用 $E(e_0)$ 记满足（44:11）的全部扩展分配组成的集合（第一种情况）。考虑到 44.5.1 中的（44:9），我们能够把（44:11）写成

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\mathrm{v}(I)+e_0。 \tag{44:11*}$$

用 $F(e_0)$ 记满足（44:12）的全部扩展分配组成的集合（第二种情况）。考虑到 44.5.1 中的（44:9），我们能够把（44:12）写成

(44:12*)　　$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(I)+e_0。$$

为了完美，我们重述一个扩展分配的特征，这必须添加于 368
(44:11*)及(44:12*)：

(44:13)　　$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)]$，　$i=1,\cdots,n$。

注意，定义(44:9)以及定义(44:11*)、(44:12*)和(44:13)在 42.4.2 的同构下保持不变。

44.7.3 现在，我们能够继承 30.1.1 中解的定义。由于这一概念的核心作用，我们重述这一定义，并根据现在的条件进行调整。从今以后，如[ ]中指明的那样，定义 $E(e_0)$能够由 $F(e_0)$取代。

一个集合 $\mathrm{V}\subseteq E(e_0)[F(e_0)]$对于 $E(e_0)[F(e_0)]$来说是一个解，当且仅当它具有如下性质：

(44:E:a)　　V 中不存在一个 $\vec{\beta}$ 被 V 中的一个 $\vec{\alpha}$ 占优。

(44:E:b)　　$E(e_0)[F(e_0)]$的每个不属于 V 的 $\vec{\beta}$ 都被 V 中某个 $\vec{\alpha}$ 占优。

(44:E:a)和(44:E:b)能够被重述为一个条件：

(44:E:c)　　V 的元素是 $E(e_0)[F(e_0)]$的这样一些元素，它们不被 V 的任何元素占优。

你会注意到，$E(0)$使我们回到最初的 30.1.1(零和博弈)和 42.4.1(常数和博弈)。

44.7.4 扩展分配的合成、分解和成分的概念再次能够由 44.2.1 的(44:1)—(44:4)定义。如 44.4.2 中指出过的那样，我们扩展分配概念的技术目的至此得到实现。

分解和合成可以进行了。

这些概念与集合 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 之间的联系并非如此简单。我们将在必要的时候研究它。

对于扩展分配所组成的集合的合成、分解和成分来说，44.2.3 的定义现在能够被一字不漏地重复。

45. 对剩余的限制和扩展的理论结构

45.1 剩余的下限

45.1 在 30.1.1 和 42.4.1 的结构中，分配总是存在的。现在的情况则不同：对于特定的 e_0，集合 $E(e_0)$、$F(e_0)$ 都有可能是空集。显然，当 44.7.2 的 $(44:11^*)$ 或 $(44:12^*)$ 与 $(44:13)$ 冲突时，这类事情就会发生，而且

$$\mathrm{v}(I)+e_0<\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]$$

时，情况就是这样。根据 42.5.1 中的 (42:11)，右边等于 $\mathrm{v}(I)-n\gamma$，这意味着

$$(45:1)\qquad e_0<-n\gamma。$$

369 如果 $E(e_0)[F(e_0)]$ 是空的，那么，对于一个空集来说，空集显然是一个解，而且，又因为它是它的惟一子集，它也是其惟一的解。① 另一方面，如果 $E(e_0)[F(e_0)]$ 不

① 尽管它无足轻重，这种情况却不应被忽略。这里的正文实际上是第 278 页脚注②的重复。——369，①

是空集，那么，其解不可能是空集。此后是 31. 2. 1 中(31:J)的证明的重复。

不等式(45:1)的右边由博弈 Γ 决定。我们引入下述记号[正负号相反且利用 42. 5. 1 中的(42:11)]：

$$(45:2)\qquad |\Gamma|_1 = n\gamma = \mathrm{v}(I) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}[(i)]。$$

我们把我们的结果总结如下：

(45:A)　　如果

$e_0 < |\Gamma|_1$，

那么，$E(e_0)$、$F(e_0)$是空集，而且空集是其惟一解。不然的话，$E(e_0)$、$F(e_0)$和它们的解都不会是空集。

这一结果给出了第一个信号，即 44. 6. 1 意义上“太小”的 e_0(即 e)值存在。实际上，它证实了第 366 页脚注①的定量估计。

45.2　剩余的上限：独立分配和完全独立分配

45. 2. 1　现在，让我们转向这样的 e_0(即 e)值，从 44. 6. 1意义上说，它们“太大”。在什么情况下，e 的大小的扰乱影响显现出来？

正如 44. 6. 1 中指明的那样，一个重要的现象是：剩余可能太大，大于任何联盟提出的要求。下面，我们对这一想法进行定量描述。

我们最好考虑扩展分配 $\vec{\alpha}$ 本身，而不是其剩余。如果 $\vec{\alpha}$ 给予每一(非空)集合 $S\subseteq I$ 的玩家的数额超过这些玩家们通过在 Γ 中结盟来得到的数额，即如果

(45:3) $\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i > \mathrm{v}(S)$　$S \subseteq I$ 是非空集，

那么，这样一个 $\vec{\alpha}$ 超过任何联盟有可能提出的要求。将其与 30.1.1 中(30:3)比较表明，我们的准则等于要求每一个非空集 S 是一个对于 $\vec{\alpha}$ 而言的无效集。

在我们的具体演绎中，把等号这一极限情况包括进去，扩大(45:3)的确是有好处的。这样，上述条件变成

370 (45:4) $\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S)$　$S \subseteq I$。①

为了方便，我们给这样的 $\vec{\alpha}$ 一个名字，称(45:3)的 $\vec{\alpha}$ 为完全独立的分配，称(45:4)的那些 $\vec{\alpha}$ 为独立的分配。如上所述，后者的确是我们的证明中需要的概念，两者都意味着，这里的扩展分配独立于博弈，即它不可能在该博弈之内得到任何联盟的有效支持。

45.2.2 另外一点有益的说明是：

扩展分配受到的惟一限制是 44.7.2 的(44:13)：

(45:5) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], i = 1, \cdots, n$。

现在，如果独立性条件(45:4)得到满足，从而如果完全独立性条件(45:3)得到满足，那么，假设(45:5)是不必要的。事实上，(45:5)是(45:4)$S = (i)$ 的特殊情况。这个说明将在下面的证明隐含地用到。

45.2.3 现在，我们能够回到剩余，即描述那些属于独立(或完全独立)分配的性质。正式的描述是：

(45:B) 博弈 Γ 决定一个数 $|\Gamma|_2$，它有如下性质：

---

① 没有必要排除 $S = \ominus$ 的情况，因为，不像(45:3)那样，当 $S = \ominus$ 时，(45:4)成立。事实上，此时，两边都等于零。——370，①

(45:B:a)　　一个有剩余 e 的完全独立的分配存在的必要条件是，

$$e > |\Gamma|_2。$$

(45:B:b)　　一个有剩余 e 的独立分配存在的完全必要条件是，

$$e \geqq |\Gamma|_2。①$$

证明：独立分配 $\vec{\alpha}$ 的存在性：②令 α^0 是所有 $\mathrm{v}(S)$ 的最大值，$S \subseteq I$[所以 $\alpha^0 \geqq \mathrm{v}(\ominus) = 0$]。令 $\vec{\alpha}^0 = \{\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0\} = \{\alpha^0, \cdots, \alpha^0\}$。这样，对于每个非空的 $S \subseteq I$，我们有 $\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i^0 \geqq \alpha^0 \geqq \mathrm{v}(S)$。这正是(45:4)，所以 $\vec{\alpha}^0$ 是独立的。

独立的 $\vec{\alpha}$ 的性质：根据上面的论述，独立的 371

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

是存在的，而且它们有剩余 $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I)$。根据(45:4)($S = I$)，这些 $e \geqq 0$。因此，根据连续性，这些 e 有最小值 e^0。选择一个 $\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$，使其有这一剩余。③

---

① 这些说法直觉上的意思相当简单：显然，为了产生一个独立的或完全独立的分配，一个(正的)最小剩余是必需的。$|\Gamma|_2$ 就是这个最小值，或下限。由于"独立"与"完全独立"之间的不同只是一个极限情况[(45:4)的等号]，说它们有相同下限是站得住脚的。这些情况在(45:B)中得到了严谨的表达。——370，②

② 注意，这一证明是必要的！我们在这里给出的估计是粗糙的，较精确的估计见(45:F)。——370，③

③ 由于(45:4)包括等号"="情况，连续性是成立的。——371，①

我们令

(45:6) $$|\Gamma|_2 = e^*。$$

(45:B:a)和(45:B:b)的证明:如果 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是独立的,那么,按照定义,$e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \mathrm{v}(I) \geqq e^*$。如果 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是完全独立的,那么,如果从每个 α_i 中减去一个充分小的数 $\delta > 0$,(45:3)仍然保持成立。这样,$\vec{\alpha}' = \{\alpha_1 - \delta, \cdots, \alpha_n - \delta\}$ 是独立的。因此,按照定义,$e - n\delta = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \delta) - \mathrm{v}(I) \geqq e^*, e > e^*$。

现在,考虑独立的 $\vec{\alpha}^* = \{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$,它满足

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* - \mathrm{v}(I) = e^*。$$

那么,对于 $\vec{\alpha}^*$ 来说,(45:4)成立。因此,如果我们在每个 α_i^* 上加上一个 δ,那么,(45:3)成立。所以,$\vec{\alpha}' = \{\alpha_1^* + \delta, \cdots, \alpha_n^* + \delta\}$ 是完全独立的。其剩余是 $e = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^* + \delta) - \mathrm{v}(I) = e^* + n\delta$。所以,每个 $e = e^* + n\delta, \delta > 0$,即每个 $e > e^*$,是一个完全独立分配的剩余——对于一个独立分配来说更是如此。而且,e^* 当然地是一个独立分配 $\vec{\alpha}^*$ 的剩余。

故,对于(45:6)、(45:B:a)和(45:B:b)的各个部分都成立。

45.2.4 完全独立的扩展分配和独立的扩展分配还与占优的概念有密切联系。其中涉及的性质将在(45:C)和(45:D)中给出。它们相互形成对照。这是引人注目的,因为这两个概念十分相似——事实上,前者去掉其极

限情况就是后者。

(45:C)　一个完全独立的扩展分配 $\vec{\alpha}$ 不占优其他扩展分配 $\vec{\beta}$。 372

证明：如果 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，那么，$\vec{\alpha}$ 必定有一个非空有效集。

(45:D)　一个扩展分配 $\vec{\alpha}$ 是独立的，当且仅当它不被其他扩展分配 $\vec{\beta}$ 占优。

证明：充分性：令 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是独立的。假设 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$，有有效集 S。那么，S 不是空集。对于 S 中的 i，$\alpha_i < \beta_i$。所以，$\sum_{i属于S} \alpha_i < \sum_{i属于S} \beta_i \leqq \mathrm{v}(S)$，这与(45:4)矛盾。

必要性：假设 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 不是独立的，令 S 是一个（非空）集合，对于 S 来说，(45:4)不成立，即 $\sum_{i属于S} \alpha_i < \mathrm{v}(S)$，那么，对于一个充分小的 $\delta > 0$，

$$\sum_{i属于S} (\alpha_i + \delta) \leqq \mathrm{v}(S)。$$

令 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} = \{\alpha_1 + \delta, \cdots, \alpha_n + \delta\}$，那么，总有 $\alpha_i < \beta_i$ 且 S 是 $\vec{\beta}$ 的有效集：$\sum_{i属于S} \beta_i \leqq \mathrm{v}(S)$。从而，$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。

45.3　关于两个界限的讨论：它们的比率

45.3.1　正如 45.1 的(45:2)和 45.2.3 的(45:B)中定义的那样，数 $|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$ 都定量地衡量 Γ 的本质性。更确切地说：

(45:E)　如果 Γ 是非本质博弈，那么，$|\Gamma|_1 = 0$，$|\Gamma|_2 = 0$。

如果 Γ 是本质博弈，那么，$|\Gamma|_1 > 0$，$|\Gamma|_2 > 0$。

证明：有关 $|\Gamma|_1$ 的说法是得自 45.1 中的(45:2)

$|\Gamma|_1 = n\gamma$，如42.5.1中强调的那样，这与27.3的非本质博弈和本质博弈的定义相符。

根据(45:F)的可用于这里的不等式，有关$|\Gamma|_2$的说法得自有关$|\Gamma|_1$的那些说法。

45.3.2 $|\Gamma|_1$与$|\Gamma|_2$之间的数量关系是

(45:F) $$\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1 \leqq |\Gamma|_2 \leqq \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1。$$

373 证明：如我们所知，$|\Gamma|_1$和$|\Gamma|_2$是策略等价下的不变量，因此我们可以假设博弈Γ是零和博弈，甚至有27.1.4意义上的简化型。这样，我们就能够使用27.2的记号和关系了。

因为$|\Gamma|_1 = n\gamma$，我们要证明的是

(45:7) $$\frac{1}{n-1}\gamma \leqq |\Gamma|_2 \leqq \frac{n(n-2)}{2}\gamma。$$

(45:7)的第一个不等式的证明：令$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$是独立的。那么，对于$(n-1)$元集$S = I - (k)$，(45:4)给出

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \alpha_k = \sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) = \gamma,$$

即

(45:8) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \alpha_k \geqq \gamma。$$

就$k = 1, \cdots, n$加总(45:8)给出

$$n\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \geqq n\gamma。$$

即

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq n\gamma,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq \frac{n}{n-1}\gamma。$$

由于 $\mathrm{v}(I)=0$，故 $e=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$。因此，对于所有独立分配，$e \geqq \frac{n}{n-1}\gamma$，从而 $|\Gamma|_2 \geqq \frac{n}{n-1}\gamma$。

(45:7)的第二个不等式的证明：

$$令\ \alpha^{00}=\frac{n-2}{2}\gamma,\ \vec{\alpha}^{00}=\{\alpha_1^{00},\cdots,\alpha_n^{00}\}=\{\alpha^{00},\cdots,\alpha^{00}\}.$$

$\vec{\alpha}^{00}$ 是独立的，即对于所有 $S\subseteq I$，它满足(45:4)。事实上：令 p 是 S 的元素个数。我们有：

$p=0$：$S=\ominus$，(45:4)是无所谓的；

$p=1$：$S=(i)$，(45:4)变成 $\alpha^{00}\geqq \mathrm{v}[(i)]$，即显然成立的 $\frac{n-2}{2}\gamma\geqq-\gamma$。

$p\geqq 2$：(45:4)变成 $p\alpha^{00}\geqq \mathrm{v}(S)$，但是，根据 27.2 中的(27:7)，

$$\mathrm{v}(S)\leqq(n-p)\gamma,$$

所以，只需 $p\alpha^{00}\geqq(n-p)\gamma$，即 $p\frac{n-2}{2}\gamma\geqq(n-p)\gamma$。这等于 $p\frac{n}{2}\gamma\geqq n\gamma$，当 $n\geqq 2$ 时，该式成立。

因此，$\vec{\alpha}^{00}$ 的确是独立的。因为 $\mathrm{v}(I)=0$，剩余是

$$e^{00}=n\alpha^{00}=\frac{n(n-2)}{2}\gamma。$$

所以，$|\Gamma|_2\leqq\frac{n(n-2)}{2}\gamma$。

45.3.3 值得就 $n=1,2,3,4,\cdots$ 逐一考虑(45:F)的 374
不等式。

$n=1,2$：在这两种情况下，该不等式的下界的系数

$\frac{1}{n-1}$大于上界的系数$\frac{n-2}{2}$。① 这似乎是荒谬的。但是，由于 $n=1,2$ 时，Γ 必然是非本质博弈（见 27.5.2 中第一点说明），在这两种情况下，我们的 $|\Gamma|_1=0$，$|\Gamma|_2=0$，这样，矛盾就消失了。

$n=3$：在这种情况下，两个系数$\frac{1}{n-1}$和$\frac{n-2}{2}$相等：两者都是$\frac{1}{2}$。这样，该不等式变成一个等式：

(45:9) $$|\Gamma|_2=\frac{1}{2}|\Gamma|_1。$$

$n\geqq 4$：在这些情况下，下界的系数$\frac{1}{n-1}$肯定小于上界的系数$\frac{n-2}{2}$。② 这样，该不等式为 $|\Gamma|_2$ 留下了一个非空区间。

下界 $|\Gamma|_2=\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$ 是精确的，即对于每个 $n\geqq 4$，存在一个本质博弈，对于这一博弈来说，$|\Gamma|_2=\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$。对于每个 $n\geqq 4$，还存在着 $|\Gamma|_2>\frac{1}{n-1}|\Gamma|_1$ 的本质博弈，不

---

① 对于 $n=1$，它们是 ∞ 和 $-\frac{1}{2}$；对于 $n=2$，它们是 1 和 0。还要注意到相悖的值 ∞ 和 $-\frac{1}{2}$！——374，①

② $\frac{1}{n-1}<\frac{n-2}{2}$意味着 $2<(n-1)(n-2)$，当 $n\geqq 4$ 时，该不等式显然成立。——374，②

过,我们的不等式的上界 $|\Gamma|_2 = \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1$ 可能永远也达不到。上界的精确值尚未被确定。我们不在这里更多地讨论这些事情。①

45.3.4 以较定性分析的方式,我们可以说,$|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$ 都是博弈 Γ 的本质性的定量测度。它们以两种不同且在一定程度上独立的方式衡量它。事实上,对于 $n=1,2$(没有本质博弈 1),比率 $|\Gamma|_2/|\Gamma|_1$ 不存在;对于 $n=3$(其值等于 $\frac{1}{2}$),它是一个常数;对于 $n \geqq 4$ 的博弈,它是可变的。

我们在 45.1 和 45.2 中看到,这两个数量实际上度量着两个界限,从 44.6.1 意义上说,在这两个界限范围之内,一个强加的剩余将不会"扰乱"玩家。按我们的结果判断,一个剩余 $< -|\Gamma|_1$"太小",而一个剩余 $e > |\Gamma|_2$"太大"。这一观点将在 46.8 中从更精确意义上得到证实。

45.4　独立分配与各种解

联系 $E(e_0)$、$F(e_0)$ 的定理

45.4.1 44.7.3 中解的定义中的(44:E:c)和 45.2.4 375
中的结果(45:D)直接给出:

(45:G)　　对于 $E(e_0)$[$F(e_0)$]来说,一个解 V 必须

---

① 对于 $n=4$,我们的不等式是 $\frac{1}{3}|\Gamma|_1 \leqq |\Gamma|_2 \leqq |\Gamma|_1$。如上所述,我们知道一个有 $|\Gamma|_2 = \frac{1}{3}|\Gamma|_1$ 的本质博弈和一个有 $|\Gamma|_2 = \frac{1}{2}|\Gamma|_1$ 的本质博弈。——374,③

包含 $E(e_0)[F(e_0)]$ 的每个独立扩展分配。

这一结果的重要性在于其在以下分析中的作用。

根据 44.7.2 开头关于 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 的作用的讨论，建立这两种情况的完备相互关系的重要性是显然的。也就是说，我们必须确定对于 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 而言的解之间的联系。

现在，$E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 以及它们的解之间的联系难以从直觉上进行评价。很难先验地看出为什么应该存在着任何差异：在第一种情况下，玩家们得自外部的“礼物”有预先给定的值 e_0；在第二种情况下，它有预先给定的最大值 e_0。很难看出，在一个“稳定的”行为标准（即解）中，愿意贡献 e_0 的这一“外部来源”怎么能够被允许贡献得少于 e_0。然而，我们过去的经验将再次警告我们，不要在这方面鲁莽下结论。因此，我们在 33.1 和 38.3 中看到，三人和四人博弈有这样的解，其中一个孤立的和失败的玩家没有被“剥夺”到物质上允许的极限，目前的情况有类似之处。

45.4.2 (45:G) 允许我们做出一项较为具体的陈述：

根据(45:G)，如果一个独立扩展分配 $\vec{\alpha}$ 属于 $F(e_0)$，那么，它属于每个对于 $F(e_0)$ 而言的解。另一方面，如果 $\vec{\alpha}$ 不属于 $E(e_0)$，那么，它显然不可能属于对于 $E(e_0)$ 而言的解。我们定义：

(45:10) $D^*(e_0)$ 是属于 $F(e_0)$ 但不属于 $E(e_0)$ 的所有独立扩展分配 $\vec{\alpha}$ 的集合。

这样，我们看到：$F(e_0)$ 的任何解包含 $D^*(e_0)$ 的全部元素；

$E(e_0)$的任何解不包含$D^*(e_0)$的元素。所以，如果$D^*(e_0)$不是空集，那么，$F(e_0)$和$E(e_0)$肯定无共同解。

现在，$D^*(e_0)$的独立$\vec{\alpha}$的特征是，它有一个剩余$e \leqq e_0$，但没有$e = e_0$，即

(45:11) $$e < e_0。$$

由此，我们有如下结论：

(45:H) $D^*(e_0)$是空集的充分必要条件是

$$e_0 \leqq |\Gamma|_2。$$

证明：由(45:B)和(45:11)，$D^*(e_0)$不是空集等价于一个满足$|\Gamma|_2 \leqq e < e_0$的e的存在。即等价于$e_0 > |\Gamma|_2$。因此，$D^*(e_0)$是空集等于说$e_0 \leqq |\Gamma|_2$。 376

当$e_0 > |\Gamma|_2$时，$F(e_0)$和$E(e_0)$的解肯定不同。这进一步证实了，当$e_0 > |\Gamma|_2$时，e_0对于正常行为来说"太大了"。

45.4.3 现在，我们能够证明，上边指出的不同是$E(e_0)$和$F(e_0)$的解之间的惟一不同。更确切地说：

(45:I) 关系

(45:12) $$\mathrm{V} \leftrightarrows \mathrm{W} = \mathrm{V} \cup D^*(e_0)$$

在$E(e_0)$的所有解V与$F(e_0)$的所有解W之间建立一个一一对应关系。

这将在下一节中得到证明。

45.5 定理证明

45.5.1 我们先证明几个辅助引理。

第一个引理是一个十分明显的结果，但其用途十分广泛：

(45:J) 设两个扩展分配 $\vec{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 和 $\vec{\delta}=\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 有如下关系：

(45:13) $\gamma_i\geqq\delta_i,\quad i=1,\cdots,n,$

那么，对于每个 $\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\succ\vec{\gamma}$ 意味着 $\vec{\alpha}\succ\vec{\delta}$。

这一结果的含义是，(45:13)表达了 $\vec{\gamma}$ 较 $\vec{\delta}$ 的某种低劣性——尽管占优的缺乏传递性。然而，这一低劣性并不像我们期望的那么完备。因此，我们不能从 $\vec{\delta}\succ\vec{\beta}$ 推断 $\vec{\gamma}\succ\vec{\beta}$，因为对于 $\vec{\delta}$ 来说，一个集合 S 的有效性并不意味着对于 $\vec{\gamma}$ 来说同样的有效性。（请读者回忆 30.1.1 的基本定义。）

还应该看到的一点是，(45:J)出现仅仅因为我们有扩展的分配概念。对于我们原有的概念（见 42.4.1）来说，我们有 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_i$。因此，对于所有 $i=1,\cdots,n$，$\gamma_i\geqq\delta_i$ 必然要求对于所有 $i=1,\cdots,n$，$\gamma_i=\delta_i$，即 $\vec{\gamma}=\vec{\delta}$。

45.5.2 接下来，我们的四个引理直接给出(45:I)的证明。

(45:K) 如果 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$ 是独立的且属于 $F(e_0)$，$\vec{\beta}$ 属于 $E(e_0)$，那么，存在一个 $\vec{\alpha}'\succ\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}'$ 是独立的且属于 $E(e_0)$。

377 证明：令 S 是 30.1.1 中关于占优 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 的(30:4:a)—(30:4:c)的集合。$S=I$ 意味着 $\alpha_i>\beta_i$，$i=1,\cdots,n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I)>\sum_{i=1}^{n}\beta_i-\mathrm{v}(I)。$$

但是，$\vec{\alpha}$ 属于 $F(e_0)$ 且 $\vec{\beta}$ 属于 $E(e_0)$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \mathrm{v}(I) \leqq e_0 = \sum_{i=1}^{n}\beta_i - \mathrm{v}(I)$，矛盾。

所以，$S \neq I$。选择一个不属于 S 的 $i_0 = 1, \cdots, n$。定义 $\vec{\alpha}' = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_n'\}$，它满足

$$\alpha_{i_0}' = \alpha_{i_0} + \varepsilon,$$
$$\alpha_i' = \alpha_i, \quad i \neq i_0,$$

选择 $\varepsilon \geqq 0$，使 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' - \mathrm{v}(I) = e_0$。从而，所有 $\alpha_i' \geqq \alpha_i$。所以，$\vec{\alpha}'$ 是独立的，而且它显然属于 $E(e_0)$。由于对于 $i \neq i_0$，$\alpha_i' = \alpha_i$，所以，对于所有属于 S 的 i，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 意味着 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$。

(45:L) 对于惟一的 $\mathrm{V} \subseteq E(e_0)$，$F(e_0)$ 的每个解 W 具有(45:I)的(45:12)那样的形式。①

证明：显然，问题中的 V，如果存在的话，是交集 $\mathrm{W} \cap E(e_0)$，所以它是惟一的。为使(45:12)对于

$$\mathrm{V} = \mathrm{W} \cap E(e_0)$$

来说成立。我们只需 W 的其余部分等于 $D^*(e_0)$，即

(45:14) $$\mathrm{W} - E(e_0) = D^*(e_0)。$$

因此，我们要证明的是(45:14)。

$D^*(e_0)$ 的每个元素是独立的且属于 $F(e_0)$，所以，按照(45:G)，它属于 W。又因它不属于 $E(e_0)$，所以它属于

① 我们尚未断定这个 V 就是 $E(e_0)$ 的一个解——这是(45:M)中的事情。——377，①

$W - E(e_0)$。故

(45:15) $$W - E(e_0) \supseteq D^*(e_0)。$$

如果也有

(45:16) $$W - E(e_0) \subseteq D^*(e_0),$$

那么,(45:15)、(45:16)合起来给出(45:14)。

用反证法。假设(45:16)不成立。相应地,考虑一个
378 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$,它属于 $W - E(e_0)$ 且不属于 $D^*(e_0)$。这样,$\vec{\alpha}$ 属于 $F(e_0)$,但不属于 $E(e_0)$,从而 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - v(I) < e_0$。由于 $\vec{\alpha}$ 不属于 $D^*(e_0)$,这就排除了它是独立的。因此,存在着一个非空集合 S,有 $\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i < v(S)$。

现在,构造 $\vec{\alpha}' = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_n'\}$,使

$$\alpha_i' = \alpha_i + \varepsilon, \quad i \text{ 属于 } S,$$
$$\alpha_i' = \alpha_i, \quad i \text{ 不属于 } S,$$

选择 $\varepsilon > 0$,使 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' - v(I) \leqq e_0$ 且 $\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i' \leqq v(S)$。故,$\vec{\alpha}'$ 属于 $F(e_0)$。如果它不属于 W,那么,(由于 W 是 $F(e_0)$ 的一个解)W 中存在一个 $\vec{\beta}$ 有 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}'$。因为所有 $\alpha_i' \geqq \alpha_i$,按照(45:J),这意味着 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。这是不可能的,因为 $\vec{\beta}$ 和 $\vec{\alpha}$ 都属于(解)W。所以,$\vec{\alpha}'$ 必定属于 W。这样,对于 S 中所有的 i,$\alpha_i' > \alpha_i$,且 $\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i' \leqq v(S)$。所以,$\vec{\alpha}' \succ \vec{\alpha}$。但是,$\vec{\alpha}$、$\vec{\alpha}'$ 都属于(解)W,这是一个矛盾。

(45:M) (45:L)的 V 是 $E(e_0)$ 的一个解。

证明:$V \subseteq E(e_0)$ 是显然的事情,且因为 $V \subseteq W$,V 和 W

[$F(e_0)$的一个解]一样满足 44.7.3 的(44:E:a)。所以，我们只需验证 44.7.3 的(44:E:b)。

考虑一个属于 $E(e_0)$但不属于 V 的 $\vec{\beta}$。那么，$\vec{\beta}$ 也属于 $F(e_0)$但不属于 W，因此，W 中存在一个 $\vec{\alpha}$，有 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。[W 是 $F(e_0)$的解！]如果这个 $\vec{\alpha}$ 属于 $E(e_0)$，那么，它属于 $W \cap E(e_0) = V$，即我们有一个属于 $E(e_0)$的 $\vec{\alpha}$，满足$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。

如果 $\vec{\alpha}$ 不属于 $E(e_0)$，那么，它属于 $W - E(e_0) = D^{*}(e_0)$，且它是独立的。因此，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$ 独立且属于 $E(e_0)$。根据(45:G)，这个 $\vec{\alpha}'$ 属于 W。[$E(e_0) \subseteq F(e_0)$，W 是 $F(e_0)$的一个解！]所以它属于 $W \cap E(e_0) = V$。这样，我们有一个 $\vec{\alpha}'$，它属于 $E(e_0)$且满足 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$。

故，44.7.3 的(44:E:b)成立。

(45:N)　　如果 V 是 $E(e_0)$的一个解，那么，(45:I)中(45:12)的 W 是 $F(e_0)$的一个解。

证明：显然，$W \subseteq F(e_0)$。所以，我们必须证明的是 44.7.3 的(44:E:a)、(44:E:b)。

(44:E:a)的证明：假设 W 中两个分配 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 且(45:D)排除了 $\vec{\beta}$ 是独立的。这样，$\vec{\beta}$ 不属于 $D^{*}(e_0)$，从而它属于

$$W - D^{*}(e_0) = V。$$

进而，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 排除了 $\vec{\alpha}$ 也属于(解)V。这样，$\vec{\alpha}$ 属于 379

$$W - V = D^{*}(e_0)。$$

所以，$\vec{\alpha}$ 是独立的。

现在，(45:K)产生一个 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$，它是独立的且属于 $E(e_0)$。作为一个独立的分配，按照(45:G)，$\vec{\alpha}'$ 属于［$E(e_0)$的解］V。因为 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}$ 都属于(解)V，且 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}$，这是一个矛盾。

(44:E:b)的证明：考虑 $F(e_0)$ 中的一个 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，但它不属于 W。现在，构造 $\vec{\beta}(\varepsilon) = \{\beta_1(\varepsilon), \cdots, \beta_n(\varepsilon)\} = \{\beta_1 + \varepsilon, \cdots, \beta_n + \varepsilon\}$，$\varepsilon \geqq 0$。令 ε 从 0 开始增加，直至下述两件事情之一第一次出现：

(45:17)　　$\vec{\beta}(\varepsilon)$属于 $E(e_0)$①，

(45:18)　　$\vec{\beta}(\varepsilon)$是独立的②。

我们区别以下两种可能结果：

(45:17)首先发生，如对于 $\varepsilon = \varepsilon_1 \geqq 0$：$\vec{\beta}(\varepsilon_1)$属于 $E(e_0)$，但它不是独立的。

如果 $\varepsilon_1 = 0$，那么 $\vec{\beta} = \vec{\beta}(0)$属于 $E(e_0)$。由于 $\vec{\beta}$ 不属于 $V \subseteq W$，［$E(e_0)$的解］V 中存在一个 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。W 中当然也存在这样的 $\vec{\alpha}$。

接下来，令 $\varepsilon_1 > 0$，且 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$属于 V。由于 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$不独立，存在着一个(非空的)$S \subseteq I$，有 $\sum\limits_{i\text{属于}S} \beta_i(\varepsilon_1) < \mathrm{v}(S)$。另外，$\beta_i(\varepsilon_1) > \beta_i$ 总成立。所以，$\vec{\beta}(\varepsilon_1) \succ \vec{\beta}$。而且，$\vec{\beta}(\varepsilon_1)$属

---

① 即 $\vec{\beta}(\varepsilon)$的剩余等于 e_0。由于 $\vec{\beta}(0) = \vec{\beta}$ 属于 $F(e_0)$，即其剩余 $\leqq e_0$，且 $\vec{\beta}(\varepsilon)$随 ε 增加。——379，①

② 即对于所有 $S \subseteq I$，$\sum\limits_{i\text{属于}S} \beta_i(\varepsilon) \geqq \mathrm{v}(S)$。每个 $\sum\limits_{i\text{属于}S} \beta_i(\varepsilon)$随 ε 增加。——379，②

于 V，它当然也属于 W。

最后，假设 $\varepsilon_1>0$ 且 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 不属于 V。因为 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 属于 $E(e_0)$，[$E(e_0)$ 的解] V 中存在一个 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}(\varepsilon_1)$。因为 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)>\beta_i$ 总成立，根据(45:J)，$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}(\varepsilon_1)$ 意味着 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。而且，$\vec{\alpha}$ 属于 V，它当然也属于 W。

(45:18) 首先发生，或与 (45:17) 同时发生，如 $\varepsilon=\varepsilon_2\geqq 0$：$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 仍然属于 $F(e_0)$，而且是独立的。

如果 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 属于 $E(e_0)$，那么，根据(45:G)，它属于 [$E(e_0)$ 的解] V。如果 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 不属于 $E(e_0)$，那么，它属于 $D^{*}(e_0)$。这样，$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 必定属于 W。

这排除了 $\varepsilon_2=0$，因为 $\vec{\beta}=\vec{\beta}(0)$ 不属于 W。所以，$\varepsilon>0$。 380

对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_2$，$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 不是独立的，所以存在一个非空集 $S\subseteq I$，有 $\sum\limits_{i\text{属于}S}<\mathrm{v}(S)$。从而，根据连续性，存在一个非空集 $S\subseteq I$，甚至有 $\sum\limits_{i\text{属于}S}\leqq\mathrm{v}(S)$。另外，$\beta_i(\varepsilon_2)\leqq\mathrm{v}(S)$ 总成立，从而 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)\succ\vec{\beta}$ 且 $\vec{\beta}(\varepsilon_2)$ 属于 W。

总结：在每一种情况下，W 中都存在一个 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。[这个 $\vec{\alpha}$ 分别是上述 $\vec{\beta}(\varepsilon_1)$，$\vec{\beta}(\varepsilon_2)$。] 所以，(44:E:b) 得到满足。

现在，我们能够给出上面许诺的证明了：

(45:I) 的证明：把(45:L)、(45:M)和(45:N)结合起来就是我们要的证明。

45.6　总结

45.6.1　我们已有的主要结果可以总结如下：

(45:O) 如果

(45:O:a) $e_0 < |\Gamma|_1$,

那么,$E(e_0)$、$F(e_0)$是空集,而且这个空集是它们惟一的解。

如果

(45:O:b) $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$,

那么,$E(e_0)$、$F(e_0)$不是空集,它们有共同的解,且这些解不是空集。

如果

(45:O:c) $e_0 > |\Gamma|_2$,

那么,$E(e_0)$、$F(e_0)$不是空集,它们没有共同解,它们的解都不是空集。

证明:把(45:A)、(45:I)和(45:H)结合起来可直接给出证明。

这一结果弄清楚了 e_0 的两个典型的关键点 $e_0 = -|\Gamma|_1$, $|\Gamma|_2$。而且,它强化了 45.1 末尾和 45.4.2 中(45:H)之后有关这两个点的看法:即正是在这两个点处,从 44.6.1 意义上说,e_0"太小"或"太大"。

45.6.2 我们还能够证明在后面(46.5 中)有用的一些关系。

(45:P) 令 W 是 $F(e_0)$的一个非空解,即假设 $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$。那么,

(45:P:a) $\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$,

381 (45:P:b) $\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Min}(e_0, |\Gamma|_2)$。[①]

---

① 我们的断言包括 $\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}$ 和 $\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}$ 存在的说法。——381,①

(45:P:c) $\quad \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) - \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha})$

$= \mathrm{Max}(0, e_0 - |\Gamma|_2)$。[1]

证明:(45:P:c)得自(45:P:a)、(45:P:b),因为

$$e_0 - \mathrm{Min}(e_0, |\Gamma|_2) = \mathrm{Max}(e_0 - e_0, e_0 - |\Gamma|_2)$$
$$= \mathrm{Max}(0, e_0 - |\Gamma|_2)。$$

接下来,我们证明(45:P:a)、(45:P:b)。

令 $W = V \cup D^*(e_0)$,V 是 $E(e_0)$的一个解,它来自(45:I)。由于 $e_0 \geqq -|\Gamma|_1$,所以,根据(45:A)或(45:O),V 不是空集。正如我们所知,V 中总有 $e(\vec{\alpha}) = e_0$,且 $D^*(e_0)$中总有 $e(\vec{\alpha}) < e_0$。

现在,对于 $e_0 \leqq |\Gamma|_2$,根据(45:H),$D^*(e_0)$是空集,所以

(45:19) $\quad \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$,

(45:20) $\quad \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$。

对于 $e_0 > |\Gamma|_2$,同样根据(45:H),$D^*(e_0)$不是空集,它是满足 $e(\vec{\alpha}) < e_0$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合。所以,根据45.2.3中的(45:B:b),这些 $e(\vec{\alpha})$有最小值$|\Gamma|_2$。故,在这种情况下,我们有

(45:19*) $\quad \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\, e(\vec{\alpha}) = e_0$,

(45:20*) $\quad \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}W}\, e(\vec{\alpha}) = \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}D^*(e_0)}\, e(\vec{\alpha}) = |\Gamma|_2$。

(45:19)、(45:19*)合起来给出(45:P:a);(45:20)、(45:20*)合起来给出(45:P:b)。

---

① 口头上说:解 W 中的最大剩余是 $F(e_0)$中允许的最大剩余:e_0。解 W 中的最小剩余也是 e_0,除非 $e_0 > |\Gamma|_2$,在这种情况下,最大值只是$|\Gamma|_2$。也就是说,最小值最大可能地接近 e_0,同时它永远不会超过$|\Gamma|_2$。

W 中剩余的取值区间的"长度",如果存在的话,就等于 e_0 超过$|\Gamma|_2$ 的剩余。——381,②

46. 一个可分解的博弈全部解的决定

46.1 分解的基本性质

46.1.1 让我们回到一个博弈 Γ 的分解。

令 Γ 是就 J、$K(J=I-K)$ 可分解的，Δ、H 分别是其 J 成分和 K 成分。

给定任一就 I 而言的扩展分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，我们构造其 J 成分和 K 成分 $\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$（对于 J 中的 i，$\beta_i=\alpha_i$；对于 K 中 i，$\gamma_i=\alpha_i$），它们的剩余是

382

$$(46:1)\qquad \begin{cases} I\text{ 中 }\vec{\alpha}\text{ 的剩余}: e=e(\vec{\alpha})=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-\mathrm{v}(I), \\ J\text{ 中 }\vec{\beta}\text{ 的剩余}: f=f(\vec{\alpha})=\sum\limits_{i\text{属于}J}\alpha_i-\mathrm{v}(J), \\ K\text{ 中 }\vec{\gamma}\text{ 的剩余}: g=g(\vec{\alpha})=\sum\limits_{i\text{属于}K}\alpha_i-\mathrm{v}(K)\text{。①} \end{cases}$$

根据 42.3.2 中的（42:6:b），或 41.3.2 有 $S=J$，$T=K$ 的（41:6），

$$(46:2)\qquad \mathrm{v}(J)+\mathrm{v}(K)=\mathrm{v}(I),$$

所以，

$$(46:3)\qquad e=f+g\text{。}$$

（46:A） 我们有

---

① 在此之前，没有必要明确表达 $\vec{\alpha}$ 的剩余对 $\vec{\alpha}$ 的依赖性。这里，我们就 e、f 和 g 明确这一点。——382，①

(46:A:a)　　$|\Gamma|_1 = |\Delta|_1 + |\mathrm{H}|_1$,

(46:A:b)　　$|\Gamma|_2 = |\Delta|_2 + |\mathrm{H}|_2$。

(46:A:c)　　Γ 是一个非本质博弈的充分必要条件是，Δ、H 都是非本质博弈。

证明：(46:A:a)的证明：把 45.1 中的定义(45:2)依次应用于 $\Gamma, \Delta, \mathrm{H}$。

(46:4)　　$|\Gamma|_1 = \mathrm{v}(I) - \sum_{i\text{属于}I} \mathrm{v}[(i)]$,

(46:5)　　$|\Delta|_1 = \mathrm{v}(J) - \sum_{i\text{属于}J} \mathrm{v}[(i)]$,

(46:6)　　$|\mathrm{H}|_1 = \mathrm{v}(K) - \sum_{i\text{属于}K} \mathrm{v}[(i)]$。

根据(46:2)，将(46:4)与(46:5)、(46:6)之和比较给出(46:A:a)。

(46:A:b)的证明：令 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 是上述三个扩展分配。如果

$$\sum_{i\text{属于}R} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(R), \quad R \subseteq I,$$

那么，$\vec{\alpha}$(在 I 中)是独立的。

回忆 41.3.2 中(41:6)，我们可以将其写成

(46:7) $\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i + \sum_{i\text{属于}T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T), \quad S \subseteq J, T \subseteq K$。

如果

(46:8)　　$\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(S), \quad S \subseteq J$,

(46:9)　　$\sum_{i\text{属于}T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(T), \quad T \subseteq K$,

那么，$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$(分别在 j、k 中)是独立的。 383

现在，(46:7)等价于(46:8)、(46:9)。事实上：(46:7)

得自(46:8)与(46:9)相加,而且,(46:8)是(46:7)的 $T=\ominus$ 时的特殊情况,(46:9)是(46:7)$S=\ominus$时的特殊情况。

因此,$\vec{\alpha}$ 独立的充分必要条件是,其(J、K)成分 $\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 都是独立的。由于它们的剩余 e、f、g 之间有(46:3)那样的关系,这就给出了其最小值[见(45:B:b)]

$$|\Gamma|_2=|\Delta|_2+|H|_2,$$

即我们的公式(46:A:b)。

(46:A:c)的证明:将(46:A:a)或(46:A:b)与(45:E)结合起来直接给出(46:A:c)。

从 45.3.1 的意义上说,$|\Gamma|_1$、$|\Gamma|_2$ 都是博弈 Γ 的本质性的数字度量。我们的上述结果说明,对于博弈分解来说,两者是可加的。

46.1.2 我们以后的讨论要用到的另一个引理是:

(46:B) 如果(就 Γ 而言)$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$,那么 30.1.1 的对于这一占优关系来说的集合 S 能够被选为 $S\subseteq J$ 或 $S\subseteq K$ 而不失一般性。[①]

证明:考虑 30.1.1 的对于占优关系 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 而言的集合 S。如果偶然地 $S\subseteq J$ 或 $S\subseteq K$,那么,没有什么值得证明的东西,所以我们可以假设 $S\subseteq J$ 或 $S\subseteq K$ 都不成立。所以,$S=S_1\cup T_1$,其中 $S_1\subseteq J$,$T_1\subseteq K$,且 S_1 和 T_1 都不是空集。

对于 S 中所有的 i,我们有 $\alpha_i>\beta_i$,即对于 S_1 中所有的 i 和 T_1 中所有的 i,该不等式成立。

① 对 S 的这一额外约束(在这种情况下)并不改变占优的概念。——383,①

最后，

$$\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S)。$$

左边显然等于 $\sum_{i\text{属于}S_1} \alpha_i + \sum_{i\text{属于}T_1} \alpha_i$；根据 41.3.2 中的(41:6)，右边等于 $\mathrm{v}(S_1) + \mathrm{v}(T_1)$。因此，

$$\sum_{i\text{属于}S_1} \alpha_i + \sum_{i\text{属于}T_1} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S_1) + \mathrm{v}(T_1),$$

故，

$$\sum_{i\text{属于}S_1} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S_1), \quad \sum_{i\text{属于}T_1} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(T_1)$$

中至少有一个成立。

所以，30.1.1 中的占优关系的三个条件中，(30:4:a)、(30:4:c)都对 S_1、T_1 成立，且(30:4:b)至少对它们中的一个成立。因此，我们可以用 $S_1(\subseteq J)$ 或 $T_1(\subseteq K)$ 中的一个取代我们原来的集合 S。

证明完成。

46.2　分解及其与解的关系：有关 $F(e_0)$ 的初步结果

46.2.1　现在，我们转向这部分理论的主要目标：可 384
分解博弈 Γ 的全部解的决定。这将在 46.6 中实现，其中包括七个引理。

我们首先给出一些纯粹描述性结果。

考虑 Γ 的对于 $F(e_0)$ 而言的解 U_I。如果 U_I 是空集，没有值得证明的东西。所以，我们假设，U_I 不是空集。根据(45:A)[或(45:O)]，这等价于

$$e_0 \geqq -|\Gamma|_1 = -|\Delta|_1 - |\mathrm{H}|_1。$$

使用 46.1.1 中(46:1)的符号，我们构造

$$(46:10)\quad \begin{cases} \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}U_I} f(\vec{\alpha}) = \overline{\varphi}, \\ \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}U_I} f(\vec{\alpha}) = \underline{\varphi}, \\ \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}U_I} g(\vec{\alpha}) = \overline{\psi}, \\ \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}U_I} g(\vec{\alpha}) = \underline{\psi}。\text{①} \end{cases}$$

---

① 所有这些都能够建立，即问题中的最大值和最小值存在并得到实现。这一点能够用简单的连续性分析予以确认。

事实上，$f(\vec{\alpha}) = \sum_{i\text{属于}J} \alpha_i - v(J)$ 且 $f(\vec{\alpha}) = \sum_{i\text{属于}K} \alpha_i - v(K)$ 都是 $\vec{\alpha}$ 的连续函数，即其分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的连续函数。因此，它们的最大值和最小值的存在性是 $\vec{\alpha}$——即集合 U_I——的值域的连续性的一个众所周知的结果。

对于有着必要数学基础——拓扑学——的读者来说，我们给出严格陈述及其证明。（基本数学结果见前面提到的卡拉西奥德利的著作，第 343 页脚注①。见第 136—140 页，尤其是定理 5）。

U_I 是 n 维线性空间中 L_n 的一个集合（见 30.1.1）。为保证 U_I 中每个连续函数有一个最大值和最小值，我们必须知道 U_I 是有界的和封闭的。

下面，我们证明：

（*） n 人博弈 Γ 的对于 $F(e_0)[E(e_0)]$ 而言的解 U 是 L_n 中的一个有界且封闭集。

证明：有界性：如果 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 属于 U，那么，每个 $\alpha_i \geq v[(i)]$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - v(I) \leq e_0$，从而 $\alpha_i \leq v(I) + e_0 - \sum_{j\neq i} \alpha_j \leq v(I) + e_0 - \sum_{j\neq i} v[(j)]$。所以，每个 α_i 都落入一个固定的区间

$$v[(i)] \leq \alpha_i \leq v(I) + e_0 - \sum_{j\neq i} v[(j)],$$

而且这些 $\vec{\alpha}$ 形成一个有界集。

封闭性：这等价于 U 的补集是一个开集。根据 30.1.1 中的(30:5:c)，U 的补集是这样一些 $\vec{\beta}$ 组成的集合，它们被 U 的任一 $\vec{\alpha}$ 占优。（注意，我们正在引入 U 的解特征！）

对于任意的 $\vec{\alpha}$，用 $D_{\vec{\alpha}}$ 记满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的 $\vec{\beta}$ 组成的集合，那么，U 的补集是所有 $D_{\vec{\alpha}}$ 并集，$D_{\vec{\alpha}}$ 属于 U。

给定 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，存在惟一一个 $\vec{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$，它与 $\vec{\alpha}$ 有相同 J 分量，与 $\vec{\beta}$ 有相同 K 分量： 385

(46:11)
$$\gamma_i=\alpha_i,\quad i \text{ 属于 } J,$$
$$\gamma_i=\beta_i,\quad i \text{ 属于 } k。$$

46.2.2 下面，我们证明：

(46:C)　如果 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 U_l，那么，(46:11)的 $\vec{\gamma}$ 属于 U_l 的充分必要条件是

(46:C:a)　$f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})\leqq e_0$。

附带有：

(46:C:b)　$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})$。

证明：公式(46:C:b)：由 46.1.1 中的(46:3)，$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\gamma})+g(\vec{\gamma})$，且显然 $f(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})$，$g(\vec{\gamma})=g(\vec{\beta})$。

(46:C:a)的必要性：因为 $U_l\subseteq F(e_0)$，$e(\vec{\gamma})\leqq e_0$ 是必要的，而且，根据(46:C:b)，这与(46:C:a)一致。

(46:C:a)的充分性：$\vec{\gamma}$ 显然是一个扩展分配，$\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 也是，且(46:C:a)，(46:C:b)保证 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。[①]

由于任意个数（甚至无穷多）的开集的并集仍然是开集，我们只须证明每个 $D_{\vec{\alpha}}$ 是开集，即：如果 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，那么，对于每个充分接近 $\vec{\beta}$ 的 $\vec{\beta}'$ 来说，我们也有 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}'$。在占优 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 的定义中，根据 30.1.1 中的(30:4:a)(30:4:c)，$\vec{\beta}$ 只出现在(30:4:c)中。而且(30:4:c)的成立性显然不会被 β_i 一个充分小的变化破坏，因为(30:4:c)是一个 < 关系。

［注意，对于 $\vec{\alpha}$ 来说，相同的说法不成立，这是因为，$\vec{\alpha}$ 也出现在(30:4:b)中，而(30:4:b)有可能被随意小的变化破坏，因为(30:4:b)是一个 ≦ 关系。但是，对于 $\vec{\beta}$ 来说，我们需要这一性质，而对于 $\vec{\alpha}$ 来说不需要！］——384，①

① 这是(46:C:a)的惟一用途。——385，①

现在,假设 $\vec{\gamma}$ 不属于 U_I,那么,U_I 中存在一个 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$。30.1.1 的对于这一占优关系而言的集合 S 可以按照(46:B)选择,使 $S \subseteq J$ 或 $S \subseteq K$。当 $S \subseteq J$ 时,$\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 显然意味着
386 $\vec{\delta} \succ \vec{\alpha}$;当 $S \subseteq K$ 时,它意味着 $\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$。由于 $\vec{\delta}$、$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都属于 U_I,两种选择都不可能。

所以,$\vec{\gamma}$ 必定属于 U_I。

我们以一种显然等价的方式重述(46:C):

(46:D) 令 V_J 是 U_I 的所有 J 成分的集合,W_K 是 U_I 的所有 K 成分的集合。

那么,U_I 以如下方式得自 V_J 和 W_K:

U_I 是这样的 $\vec{\gamma}$ 组成的集合,它们在 V_J 中有一个 J 成分 $\vec{\alpha}'$ 且在 W_K 中有一个 K 成分 $\vec{\beta}'$ 使

(46:12) $$e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0。$$①

46.3 连续性

46.3 回忆 44.3.1 的(44:B)中 U_I(对于 J、K 而言)的可分解性的定义,不难看出,它等价于:

像那里描述的那样,U_I 得自(46:D)的 V_J、W_K,但没有条件(46:12)。

因此,(46:12)可以被解释为是对 U_I 在什么程度上不

① 注意,这里的 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 不是(46:C)的 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$——它们是 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的 J 成分、K 成分以及那些 $\vec{\gamma}$。$e(\vec{\alpha}')$、$e(\vec{\beta}')$ 分别是 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 在 J、K 中的剩余。但是,它们等于 $f(\vec{\alpha})$、$g(\vec{\beta})$,并等于 $f(\vec{\gamma})$、$g(\vec{\gamma})$。[所有这些都联系到(46:C)。]——386,①

可分解的描述。就 44.3.3 中关于(44:D:a)的讨论而言，这一点是有些意思的。

你甚至可以走得更远：(46:D)中(46:12)的必要性容易得到证明。[它对应着(46:C:a)，即(46:C)的证明中十分简单的最初两步。]因此，(46:D)表达了，U_I 接近于可分解，但未必可分。

结合 44.3.3 中的(44:D:b)，所有这些强烈暗示着，V_J、W_K 应该是 Δ、H 的解。然而，按照我们目前对所有概念的扩展，我们必须决定取 $F(f_0)$、$F(g_0)$ 中的哪一个，这里 f_0 是我们准备在 J 中使用的剩余，g_0 是在 K 中使用的剩余。[①] 你将看到，46.2.1 的 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 正是这里的 f_0、g_0。

事实上，我们能够证明：

(46:E)

(46:E:a)　　V_J 是 Δ 的对于 $F(\overline{\varphi})$ 而言的一个解，

(46:E:b)　　W_K 是 H 的对于 $F(\overline{\psi})$ 而言的一个解。

为了方便，我们首先给出另一个结果：

(46:F) 387

(46:F:a)　　$\overline{\varphi}+\underline{\psi}=e_0$，

(46:F:b)　　$\underline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

注意，在(46:E)和(46:F)中，通过 J、Δ、$\overline{\varphi}$、$\underline{\varphi}$ 与 K、H、$\overline{\psi}$、$\underline{\psi}$ 对换，(46:E:a)变成(46:E:b)、(46:E:b)变成(46:E:a)、(46:F:a)变成(46:F:b)、(46:F:b)变成(46:F:a)。因此，我们必须证明其中的一个，且我们选择对应于 a 的

---

① 读者将注意到，这类似于把 I 中给定的剩余 e_0 在 J 和 K 之间的分配问题。——386，②

结果。

(46:F:a)的证明:选择 U_I 中的一个 $\vec{\alpha}$,$f(\vec{\alpha})$ 取得其最大值 $\overline{\varphi}$。必然有 $e(\vec{\alpha}) \leqq e_0$,而且按照定义 $g(\vec{\alpha}) \geqq \underline{\psi}$,从而 46.1.1 中的(46:3)给出

(46:13) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi} \leqq e_0。$$

假设(46:F:a)不正确,那么,(46:13)进一步意味着

(46:14) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi} < e_0。$$

使用上述 U_I 中的 $\vec{\alpha}$,有 $f(\vec{\alpha})=\overline{\varphi}$,而且在 U_I 中选择一个 $\vec{\beta}$,使 $g(\vec{\beta})$ 取得其最小值 $\underline{\psi}$。根据(46:13)或(46:14),$f(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})=\overline{\varphi}+\underline{\psi} \leqq e_0$。因此,(46:C)的 $\vec{\gamma}$ 也属于 U_I。再次将(46:C)与(46:14)结合,得

$$e(\vec{\gamma})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})=\overline{\varphi}+\underline{\psi} < e_0,$$

即 $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i < v(I)+e_0$。现在,定义

$$\vec{\delta}=\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}=\{\gamma_1+\varepsilon\cdots,\gamma_n+\varepsilon\},$$

选择 $\varepsilon>0$,使 $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = v(I)+e_0$。因此,$\vec{\delta}$ 属于 $F(e_0)$。

如果 $\vec{\delta}$ 不属于 U_I,那么,U_I 中存在一个 $\vec{\eta} \succ \vec{\delta}$。根据(45:J),$\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$,这是不可能的,因为 $\vec{\eta}$、$\vec{\gamma}$ 都属于 U_I。所以,$\vec{\delta}$ 属于 U_I。现在,$\sum_{i属于J} \delta_i - v(J) > \sum_{i属于J} \gamma_i - v(J) = \sum_{i属于J} \alpha_i - v(J)$,即 $f(\vec{\delta}) > f(\vec{\alpha}) = \overline{\varphi}$,这与 $\overline{\varphi}$ 的定义矛盾。

所以,(46:F:a)必定是正确的。证明完成。

(46:E:a)的证明:如果 $\vec{\alpha}'$ 属于 V_J,那么,它是 U_I 的一个 $\vec{\alpha}$ 的 J 成分。因此,$e(\vec{\alpha}')=f(\vec{\alpha}) \leqq \overline{\varphi}$,从而 $\vec{\alpha}'$ 属于

$F(\overline{\varphi})$。所以，$V_J \subseteq F(\overline{\varphi})$。

这样，我们的任务是证明 44.7.3 的(44:E:a)和(44:E:b)。 388

(44:E:a)的证明：假设 V_J 中有 $\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}'$。那么，$\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 是 U_I 中 $\vec{\gamma}$、$\vec{\delta}$ 的 J 成分。但是，$\vec{\alpha}' \succ \vec{\beta}'$ 显然意味着 $\vec{\gamma} \succ \vec{\delta}$，这是不可能的。

(44:E:b)的证明：考虑一个属于 $F(\overline{\varphi})$ 但不属于 V_J 的 $\vec{\alpha}'$。那么，根据定义，$e(\vec{\alpha}') \leqq \overline{\varphi}$。利用(46:F:a)的证明中提到的属于 U_I 的 $\vec{\beta}$，对于 $\vec{\beta}$，$g(\vec{\beta}) = \underline{\psi}$。令 $\vec{\beta}'$ 是这个 $\vec{\beta}$ 的 K 成分，以至 $\vec{\beta}'$ 属于 W_K 且 $e(\vec{\beta}') = g(\vec{\beta}) = \underline{\psi}$。因此，$e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$[利用(46:F:a)]。对于 I，构造 $\vec{\gamma}$，它有 J 成分、K 成分 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$。那么，$e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0$，即 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。

$\vec{\gamma}$ 不属于 U_I，因为其 J 成分 $\vec{\alpha}'$ 不属于 V_J。因此，[$F(e_0)$的解]U_I 中存在一个 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$。

令 S 是 30.1.1 的对于占优关系 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 而言的集合。根据(46:B)，我们可以假设 $S \subseteq J$ 或 $S \subseteq K$。

首先假设 $S \subseteq K$。因为 $\vec{\gamma}$ 与 $\vec{\beta}$ 有相同 K－成分 $\vec{\beta}'$，我们能够根据 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 得出结论，$\vec{\delta} \succ \vec{\beta}$。由于 $\vec{\delta}$、$\vec{\beta}$ 都属于 U_I，这是不可能的。

所以，$S \subseteq J$。$\vec{\delta}$ 的 J 成分记为 $\vec{\delta}'$。由于 $\vec{\delta}$ 属于 U_I，所以 $\vec{\delta}'$ 属于 V_J。$\vec{\gamma}$ 有 J 成分 $\vec{\alpha}'$。所以，我们能够由 $\vec{\delta} \succ \vec{\gamma}$ 得出结论，$\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$。

因此，我们有来自 V_J 的 $\vec{\delta}'$，$\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$。

46.4 连续性

46.4.1 (46:D)、(46:E)用 Δ、H 的 V_J、W_K 的恰当的解表达 Γ 的一般解 U_I。一个自然的想法是，将这一过程颠倒过来：从 V_J、W_K 出发并获得 U_I。

然而，必须牢记的一点是，(46:D)的 V_J、W_K 并不是完全随意的。如果我们在(46:D)的帮助下考虑46.2.1的定义(46:10)，那么，我们发现，它们也能够被表述为：

$$(46:15)\qquad \begin{cases} \mathrm{Max}_{\vec{\alpha}'\text{属于}V_J}\, e(\vec{\alpha}') = \overline{\varphi}, \\ \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}'\text{属于}V_J}\, e(\vec{\alpha}') = \underline{\varphi}, \\ \mathrm{Max}_{\vec{\beta}'\text{属于}V_J}\, e(\vec{\beta}') = \overline{\psi}, \\ \mathrm{Min}_{\vec{\beta}'\text{属于}V_J}\, e(\vec{\beta}') = \underline{\psi}。 \end{cases}$$

389 而且，(46:F)表达了由 V_J、W_K 决定的 $\overline{\varphi}$、$\underline{\varphi}$、$\overline{\psi}$、$\underline{\psi}$之间的关系——它们之间的相互关系以及它们与 e_0 的关系。

46.4.2 我们将证明，这是 V_J、W_K 必须受到的惟一约束。为此，我们从 Δ、H 的任意非空解 V_J、W_K 开始(它们不必得自 Γ 的解 U_I)，并给出如下断言：

(46:G) 令 V_J 是 Δ 的对于 $F(\overline{\varphi})$而言的一个非空解，W_K 是 H 的对于 $F(\overline{\psi})$而言的一个非空解。假设 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 满足(46:15)，且有(46:15)的 $\underline{\varphi}$、$\underline{\psi}$，那么，

$$(46:16)\qquad \overline{\varphi} + \underline{\psi} = \underline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0。$$

对于满足

$$(46:17)\qquad e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leqq e_0$$

的 V_J 的任一 $\vec{\alpha}'$，W_K 的任一 $\vec{\beta}'$，构造 $\vec{\gamma}$，使其有 J 成分 $\vec{\alpha}'$ 和 K 成分 $\vec{\beta}'$。

用 U_I 记这些 $\vec{\gamma}$ 组成的集合。

以这一方式获得的 U_I 正是 Γ 的对于 $F(e_0)$ 而言的全部解。

证明：具有我们在前面指出过特征的所有 U_I 是以这一方式得到的：把(46:D)运用于 U_I，形成其 V_J、W_K。然后，我们的全部断言就包含在(46:D)、(46:E)、(46:F)和(46:15)之中。

以这一方式得到的 U_I 具有上述特征：设 U_I 是上面描述的借助 V_J、W_K 建立起来的。我们要证明的是，U_I 是 Γ 的对于 $F(e_0)$ 而言的解。

对于 U_I 的每个 $\vec{\gamma}$，我们的(46:17)给出 $e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') \leq e_0$，所以 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。故，$U_I \subseteq F(e_0)$。

这样，我们的任务变成了证明 44.7.3 的(44:E:a)和(44:E:b)。

(44:E:a)的证明：假设 U_I 中有 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$。令 $\vec{\alpha}'$，$\vec{\beta}'$ 是 $\vec{\gamma}$ 的 J 成分和 K 成分；$\vec{\delta}'$、$\vec{\varepsilon}'$ 是 $\vec{\eta}$ 的 J 成分和 K 成分，如上面描述的那样，$\vec{\gamma}$、$\vec{\eta}$ 来自它们的成分。令 S 是 30.1.1 的对于占优关系 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ 而言的集合 S。根据(46:B)，我们可以假设，$S \subseteq J$ 或 $S \subseteq K$。现在，$S \subseteq J$ 会造成 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ 意味着 $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$，这是不可能的，因为 $\vec{\delta}'$、$\vec{\alpha}'$ 都属于 V_J。而且，$S \subseteq K$ 会导致 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$ 意味着 $\vec{\varepsilon}' \succ \vec{\beta}'$，这也是不可能的，因为 $\vec{\varepsilon}' \succ \vec{\beta}'$ 都属于 W_K。

(44:E:b)的证明：假设存在一个 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$ 但不属

于 U_I，以至 U_I 中不存在 $\vec{\eta}$ 使 $\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$。令 $\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$ 分别是 $\vec{\gamma}$ 的 J 成分和 K 成分。

390 首先，假设 $e(\vec{\alpha}') \leqq \overline{\varphi}$。那么，$\vec{\alpha}'$ 属于 $F(\overline{\varphi})$。因此，要么 $\vec{\alpha}'$ 属于 V_J，要么 V_J 中存在一个 $\vec{\delta}'$，有 $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$。在后一种情况下，在 W_K 中选择一个 $\vec{\varepsilon}'$，$e(\vec{\varepsilon}')$ 取得其最小值 $\underline{\psi}$。用 J 成分、K 成分 $\vec{\delta}'$、$\vec{\varepsilon}'$ 构造 $\vec{\eta}$。因为 $\vec{\delta}'$、$\vec{\varepsilon}'$ 分别属于 V_J、W_K，且 $e(\vec{\delta}') + e(\vec{\varepsilon}') \leqq \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0$，所以 $\vec{\eta}$ 属于 U_I。另外，由于 $\vec{\delta}' \succ \vec{\alpha}'$（它们是 J 成分和 K 成分），$\vec{\eta} \succ \vec{\gamma}$。所以，$\vec{\eta}$ 与我们最初关于 $\vec{\gamma}$ 的假设矛盾。这样，我们证明了，在这种情况下，$\vec{\alpha}'$ 必定属于 V_J。

换句话说：

(46:18) 要么 $\vec{\alpha}'$ 属于 V_J，要么 $e(\vec{\alpha}') > \overline{\varphi}$。

要看到，在第一种情况下，必然有 $e(\vec{\alpha}') \geqq \underline{\varphi}$，且在第二种情况下当然有 $e(\vec{\alpha}') > \overline{\varphi} \geqq \underline{\varphi}$。所以：

(46:19) 在任何情况下，$e(\vec{\alpha}') \geqq \underline{\varphi}$。

交换 J 和 K 使(46:18)、(46:19)变成：

(46:20) 要么 $\vec{\beta}'$ 属于 W_K，要么 $e(\vec{\beta}') > \vec{\eta}$。

(46:21) 在任何情况下，$e(\vec{\beta}') \geqq \underline{\psi}$。

现在，如果我们有(46:18)的第二种选择，那么，这与(46:21)结合起来给出

$$e(\vec{\gamma}) = e(\vec{\alpha}') + e(\vec{\beta}') > \overline{\varphi} + \underline{\psi} = e_0,$$

这是不可能的，因为 $\vec{\gamma}$ 属于 $F(e_0)$。(46:20)的第二种选择同样是不可能的。

所以，在(46:18)和(46:20)中我们都有第一种选择，即$\vec{\alpha}'$、$\vec{\beta}'$属于V_J、W_K。由于$\vec{\gamma}$属于$F(e_0)$，从而

$$e(\vec{\alpha}')+e(\vec{\beta}')=e(\vec{\gamma})\leqq e_0。$$

所以，$\vec{\gamma}$必定属于U_I——与我们最初的假设矛盾。

46.5 $F(e_0)$中的全部结果

46.5.1 尽管有着完备性，结果(46:G)却有不令人满意的一面：作为其基础的条件(46:16)和(46:17)全然是隐性的。我们将用等价的但更为明确的条件取代之。

为此，我们从两个假定的数$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$开始。那么，从 391
(46:G)意义上说，我们能够使用Δ、H 的分别对于$F(\overline{\varphi})$、$F(\overline{\psi})$而言的什么样的解V_J、W_K呢？

首先，V_J、W_K绝不能是空集。对Δ、H 运用(45:A)或(45:O)表明，这意味着

(46:22) $$\overline{\varphi}\geqq -|\Delta|_1,\overline{\psi}\geqq -|H|_1。$$

然后，考虑(46:15)。把 45.6.1 的(45:P)运用于Δ、H。那么，(45:P:a)保证(46:15)的两个关于最大值的方程而(45:P:b)把(46:15)中两个关于最小值的方程变成

(46:23) $$\underline{\varphi}=\mathrm{Min}(\overline{\varphi},|\Delta|_2),\underline{\psi}=\mathrm{Min}(\overline{\psi},|H|_2)。$$

因此，我们可以按照(46:23)来定义$\underline{\varphi}$、$\underline{\psi}$。

现在，我们写出(46:16)，即

(46:16) $$\overline{\varphi}+\underline{\psi}=\underline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0。$$

(46:16)的第一个方程也可以写为

$$\overline{\varphi}-\underline{\varphi}=\overline{\psi}-\underline{\psi},$$

即，根据(46:23)

(46:24) $\mathrm{Max}(0,\overline{\varphi}-|\Delta|_2)=\mathrm{Max}(0,\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2)$。①

46.5.2 现在,有两种可能的情况:

情况(a):(46:24)的两边都等于零。那么,在(46:24)两边的最大值计算中,0那一项≧另一项,即 $\overline{\varphi}-|\Delta|_2\leqq 0,\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2\leqq 0$,即

(46:25) $\overline{\varphi}\leqq|\Delta|_2,\overline{\psi}\leqq|\mathrm{H}|_2$。

反过来:如果(46:25)成立,那么,(46:24)成了 $0=0$,即它是自动地成立的。现在,定义(46:23)变成了

(46:26) $\underline{\varphi}=\overline{\varphi},\underline{\psi}=\overline{\psi}$,

且(46:16)的完全条件变成了②

(46:27) $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

(46:25)和(46:27)还给出

(46:28) $e_0\leqq|\Delta|_2+|\mathrm{H}|_2=|\Gamma|_2$。

情况(b):(46:24)两边都不等于零。那么,在(46:24)的每个最大值计算中0那一项总是小于其他项,即 $\overline{\varphi}-|\Delta|_2>0,\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2>0$,即

(46:29) $\overline{\varphi}>|\Delta|_2,\overline{\psi}>|\mathrm{H}|_2$。③

392 反过来:如果(46:29)成立,那么,(46:24)变成 $\overline{\varphi}-|\Delta|_2=\overline{\psi}-|\mathrm{H}|_2$,即它不是自动地满足的。我们能够把

① 见(45:P:c)及其证明。——391,①

② 其中,我们只用到第一部分以得到(46:24),我们这里的讨论的基础。——391,②

③ 注意,重要的一点是,(46:25)、(46:29)穷尽了所有可能性,即我们不可能有 $\overline{\varphi}\leqq|\Delta|_2,\overline{\psi}>|\mathrm{H}|_2$,或 $\overline{\varphi}>|\Delta|_2,\overline{\psi}\leqq|\mathrm{H}|_2$。当然,这是因为(46:24),它使得两边要么都等于零,要么都不等于零。

这一结果的含义将出现在接下来的引理中。——391,③

(46:24)写成

$$(46:30)\qquad \overline{\varphi}=|\Delta|_2+w,\quad \overline{\psi}=|H|_2+w,$$

且(46:29)简单变成

$$(46:31)\qquad w>0。$$

现在,定义(46:23)变成了

$$(46:32)\qquad \underline{\varphi}=|\Delta|_2,\underline{\psi}=|H|_2,$$

而且,完全条件(46:16)[①]变成

$$|\Delta|_2+|H|_2+w=e_0,$$

即

$$(46:33)\qquad e_0=|\Gamma|_2+w。$$

(46:31)和(46:33)还给出

$$(46:34)\qquad e_0>|\Gamma|_2。$$

46.5.3 总结:

(46:H) (46:G)的条件(46:16)、(46:17)等于说:

下述(a)、(b)两种情况之一必定成立:

情况(a):(1) $-|\Gamma|_1\leqq e_0\leqq|\Gamma|_2$,

(2) $-|\Delta|_1\leqq\overline{\varphi}\leqq|\Delta|_2$,

(3) $-|H|_1\leqq\overline{\psi}\leqq|H|_2$,

(4) $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=e_0$。

情况(b):(1) $e_0>|\Gamma|_2$,

(2) $\overline{\varphi}>|\Delta|_2$,

(3) $\overline{\psi}>|H|_2$,

① 见第 391 页脚注②。——392,①

(4) $e_0-|\Gamma|_2=\overline{\varphi}-|\Delta|_2=\overline{\psi}-|H|_2$。①

证明情况(a)：我们知道，$e_0\geqq-|\Gamma|_1$ 且 $\overline{\varphi}\geqq-|\Delta|_1$，$\overline{\psi}\geqq-|H|_1$。其他条件与(46:28)、(46:25)、(46:27)一致，它们包含着这一情况的完全描述。

情况(b)：这些条件与(46:34)、(46:34)、(46:29)、(46:30)、(46:33)一致，它们包含着对这一情况完全的描述[去掉服从(46:31)的 w]。

46.6 $E(e_0)$中的完全结果

393 46.6 (46:G)和(46:H)完全而明确地描述了 Γ 对 $F(e_0)$而言的解。现在，同样清楚的是，(46:H)的(a)和(b)与 45.6.1 中的(45:O:b)、(45:O:c)一致：的确，(46:H)的(a)、(b)的不同在于其条件(1)，它们正是(45:O:b)、(45:O:c)。

现在，我们把(46:G)、(46:H)的结果与(45:I)、(45:O)的结果结合起来。这将为我们提供这一情况的一个全面的描述：

(46:I) 如果

(46:I:a) (1) $e_0<-|\Gamma|_1$，

那么，对于 $E(e_0)$和对于 $F(e_0)$来说，空集都是 Γ 的惟一解。

如果

---

① 读者应该注意的是，(a)中的(1)—(3)与(b)中的(1)—(3)较为相似，但两者中的条件(4)则完全不同。不过，所有这些都是一个一直理论(one consistent theory)的严格讨论的结果！

我们将在后面对此进行更为详细的讨论。——392，②

(46:I:b)　(1)　$-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$,

那么,对于 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 来说,Γ 有相同的解 $\overline{\mathrm{U}}_I$。这些 $\overline{\mathrm{U}}_I$ 恰好是以如下方式得到的集合:

选择 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$,使

(2)　$-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$,

(3)　$-|\mathrm{H}|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |\mathrm{H}|_2$,

(4)　$\overline{\varphi} + \overline{\psi} = e_0$。

对于 $E(\overline{\varphi})$、$E(\overline{\psi})$,分别选择 Δ、H 的解 $\overline{\mathrm{V}}_J$、$\overline{\mathrm{W}}_K$。

那么 $\overline{\mathrm{U}}_I$ 是 $\overline{\mathrm{V}}_J$ 与 $\overline{\mathrm{W}}_K$ 的 44.7.4 意义上的合成。

如果

(46:I:c)　(1)　$e_0 > |\Gamma|_2$,

那么,对于 $E(e_0)$ 来说,Γ 没有相同的解 $\overline{\mathrm{U}}_I$,对于 $F(e_0)$ 来说,没有相同的解 U_I。这些 $\overline{\mathrm{U}}_I$ 和 U_I 是以如下方式得到的集合:选择两个数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$,使

(2)　$\overline{\varphi} > |\Delta|_2$,

(3)　$\overline{\psi} > |\mathrm{H}|_2$,

它们由下式界定:

(4)　$e_0 - |\Gamma|_2 = \overline{\varphi} - |\Delta|_2 = \overline{\psi} - |\mathrm{H}|_2$。

对于 $E(\overline{\varphi})$、$E(\overline{\psi})$,分别选择 Δ、H 的解 $\overline{\mathrm{V}}_J$、$\overline{\mathrm{W}}_K$。

那么,$\overline{\mathrm{U}}_I$ 是如下集合的并集:$\overline{\mathrm{V}}_J$ 与(K 中)满足 $e(\vec{\beta}') = |\mathrm{H}|_2$ 的所有独立的 $\vec{\beta}'$ 组成的集 394

合的合成；（J 中）满足 $e(\vec{\alpha}')=|\Delta|_2$ 的独立 $\vec{\alpha}'$ 组成的集合与 $\overline{\mathrm{W}}_K$ 的合成；（J 中）满足 $e(\vec{\alpha}')=\varphi$ 的独立的 $\vec{\alpha}'$ 组成的集合与（K 中）满足 $e(\vec{\beta}')=\psi$ 的独立的 $\vec{\beta}'$ 组成的集合的合成，其中 φ、ψ 满足

(5)　$|\Delta|<\varphi<|\mathrm{H}|<\overline{\varphi},\quad |\mathrm{H}|_2<\psi<\overline{\psi}$，

且

φ、ψ 满足

(6)　$\varphi+\psi=e_0$。

U_I 得自同一过程，只需把条件(6)换成

(7)　$\varphi+\psi\leqq e_0$。

证明：(46:I:a)：这与(45:O:a)相同。

(46:I:b)：这基本上是(46:H)中情况(a)的重述，有如下改动：

第一：对于 Γ、Δ、H 来说，E 和 F 的解有所变化。这通过把(45:O:b)应用于 Γ、Δ、H 来验证，根据(46:I:b)的(1)、(2)、(3)，这样做是合理的。

第二：只要我们忽略条件(46:17)，我们从 $\overline{\mathrm{V}}_J=\mathrm{V}_J$，$\overline{\mathrm{W}}_K=\mathrm{W}_K$ 构造 $\overline{\mathrm{U}}_I=\mathrm{U}_I$ 的方式就不同于(46:H)中描述的方式。要证明这一点，只需注意到，(46:17)是自动地得到满足的：$\mathrm{V}_J=\overline{\mathrm{V}}_J\subseteq E(\overline{\varphi})$，$\mathrm{W}_K=\overline{\mathrm{W}}_K\subseteq E(\overline{\psi})$，因此，对于 V_J 中的 $\vec{\alpha}'$ 和 W_K 中的 $\vec{\beta}'$ 来说，总有 $e(\vec{\alpha}')=\overline{\varphi}$，$e(\vec{\beta}')=\overline{\psi}$，且根据(4)，$e(\vec{\alpha}')+e(\vec{\beta}')=e_0$。

(46:I:c)：这基本上是(46:H)中情况(b)的重述，有如下修改：

对于 Γ，我们考虑 E 和 F 解［而不像在(46:H)中那样仅仅考虑 F 解］，而且，对于 Δ、H，只使用 E 解［而不像(46:H)中那样还使用 F 解］。前者 Γ 的 $\overline{U}_I$，U_I 从后者(Δ 的 $\overline{V}_J$，H 的 $\overline{W}_K$)的方式相应地不同于(46:H)中所描述的方式。

为了消除这些差异，我们不得不做如下工作：根据(46:I:c)的(1)、(2)、(3)，将(45:I)和(45:O:c)合理地运用于 Γ、Δ、H。然后，用现在定义的东西取代(46:H)中定义的东西。如果对(46:H)［目前的(46:I:c)］完成这些运算，那么，结果就是上面描述的结果。[①]

46.7 部分结果的图示

46.7 (46:I)的结果看似十分复杂，但它们实际上只不过是几个简单定性原理的严格表达。我们进行数学推导的理由在于，这些原理并非完全是显然的，而且这也是发现并证明它们的方式。另一方面，我们的结果能够用简单图示进行讨论。

我们首先给出一个较为形式化的说明。 395

看一下(46:I:a)—(46:I:c)这三种情况就会发现：关于(46:I:a)，没有太多值得说的东西；另外两种情况，(46:I:b)和(46:I:c)有一些共同特点。事实上，在这两种情况中，我们想要的 Γ 的解 $\overline{U}_I$、U_I 是分别借助两个数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 和 Δ、H 的特定相应解 $\overline{V}_J$、$\overline{W}_K$ 来得到的。$\overline{U}_I$、U_I 的描述中的定量成分是数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$。正如第 386 页脚注②指出的那样，它

① 如果读者完成这一工作，他将看到，虽然有些烦琐，但这个变换并不困难。——394，①

们代表着 I 中给定的剩余 e_0 在 J 和 K 之间的分配一类的东西。

在(46:I:b)和(46:I:c)情况下，$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 分别由条件(2)—(4)描述。对于(46:I:b)和(46:I:c)，让我们比较这些条件。

它们有一个共同特点：它们迫使 Δ、H 的剩余 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 类似于 Γ 的剩余 e_0。

然而，它们也有着十分不同的一个方面：在(46:I:b)中，它们只对 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 施加一个等式，而在(46:I:c)中它们施加两个等式。[1] 当然，这些不等式可能偶尔退化为等式[见 46.8.3 中(46:J)]，但一般情况是上述情况。

e_0 与 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的关系如图 69 所示。

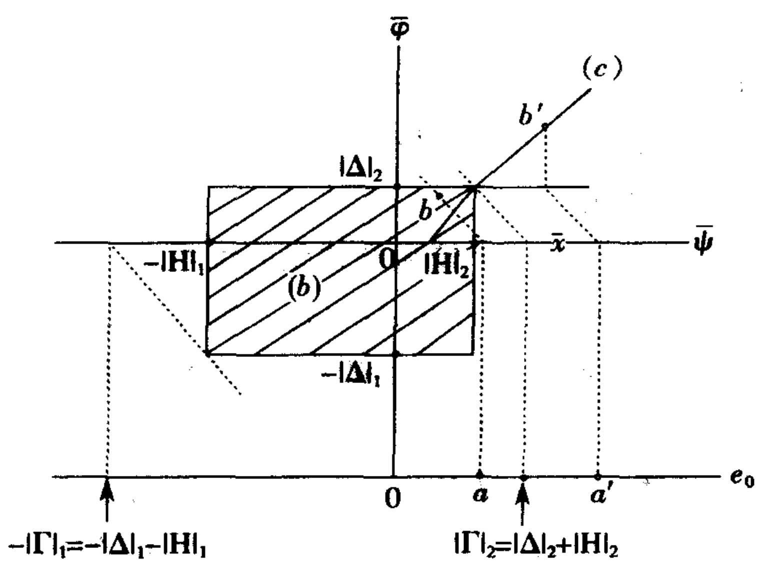


图 69

[1] 两种情况下(2)、(3)都是不等式。(4)在(46:I:b)中是一个等式且在(46:I:c)中是两个等式。——395，①

该图表明了$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$平面和它下面的 e_0 线。在 e_0 线上,点 $-|\Gamma|_1$、$|\Gamma|_2$ 把这条线分成三个区域,分别对应着(46:I:a)—(46:I:c)三种情况。属于情况(46:I:b)的$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$值域是$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$平面中矩形区域($b$)。属于情况(46:I:c)的$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$值域是$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$平面中的直线($c$)。 396

任意给定两个$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$点,沿着图中虚线走向 e_0 值,b、b'分别给出 α、α'。任意给定一个 e_0 值,相反的过程说明其所有$(\overline{\varphi},\overline{\psi})$点,因此 α 产生一个区间,而 α'产生惟一的 b'。[1]

46.8 解释:正常区域和各种性质的遗传性

46.8.1 我们要对图 69 做进一步评论,这有助于我们更加充分地理解(46:I)。

首先:已经多次出现过的一个迹象[最后一次是在(45:O)之后的评论]是,情况(46:I:a)和(46:I:c)——$e_0 < -|\Gamma|_1$,和 $e_0 > |\Gamma|_2$——是 44.6.1 意义上 e_0 的“太小”或“太大”值;即情况(46:I:b),$-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$,从某种意义上说属于正常区域。现在,我们的图形表明,当 Γ 的剩余 e_0 落入正常区域时,那么,Δ、H 的剩余值 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 也都分别落入它们的正常区域。[2] 换句话说:

从 Γ 到 Δ 和 H,正常行为[(46:I:b)中剩余的位置]是可遗传的。

---

① 我们请读者验证,图 69 的几何安排的确表达了(46:I:b)、(46:I:c)的条件。——396,①

② 即 $-|\Gamma|_1 \leqq e_0 \leqq |\Gamma|_2$ 意味着 $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$,$-|H|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |H|_2$,见(46:I:b)。——396,②

第二：在情况(46：I：b)——正常区域——中，正如我们在前面一再看到过的那样，$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 并不完全由 e_0 决定。不过，在情况(46：I：c)中，它们是完全由 e_0 决定的。如图69所示，前者区域是($\overline{\varphi}$，$\overline{\psi}$)平面中的矩形(b)，而后者只是一条直线(c)。

然而，值得注意的是，在情况(46：I：b)的两个端点——$e_0 = -|\Gamma|_1, |\Gamma|_2$，$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的取值区间变成了一个点。① 因此，从(46：I：b)的可变的 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 到(46：I：c)的固定的值的转变是连续的。

第三：我们的第一项说明指出，正常行为[即与(46：I：b)对应着的剩余的位置]能够由 Γ 遗传给 Δ、H。令人吃惊的是，一般来说，在剩余等于零不具有可遗传性，即一般来说，$e_0 = 0$② 并不意味着 $\overline{\varphi} = 0$，$\overline{\psi} = 0$。正是剩余消失使(44.7)我们目前的理论特殊化为(42.4.1的)旧理论(我们知道，它等价于30.1.1的最初理论)。我们将在最后一项说明中更为详细地研究 $e_0 = 0$ 时 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的可变性。在此之前，我们要关注的是我们当前的理论与旧理论之间的联系。

397 第四：显然，现在的较为宽泛的理论形式是必要的，即便我们最初的兴趣只是原有的理论形式。事实上，为了找到当初意义上($e_0 = 0$)的可分解博弈 Γ 的解，我们需要更宽泛意义上($\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 不等于零)的成分 Δ、H 的解。

这使44.6.2的说明有了更为准确的含义：现在尤为清楚的是，当博弈(Δ，H)被看作非独立博弈时，从旧理论

① 这是46.7末尾提到的退化情况之一。——396，③

② $e_0 = 0$ 当然落入正常情况(46：I：b)：$-|\Gamma|_1 \leq e_0 \leq |\Gamma|_2$。——396，④

到新论理的过渡变得多么必要。我们把这一想法的严格阐述放在46.10。

46.8.2 第五：现在，我们能够证明有关44.3.2中(44:D)和44.3.3中(44:D:a)、(44:D:b)的最终说法。(46:I:b)表明，如果我们用新理论取代旧理论，那么，在情况(44:I:b)下，(44:D)是成立的。(44:I:c)表明，在情况(44:I:c)下，即便付出同样代价，(44:D)是不成立的。因此，为了保证明显成立的(44:D)，我们从旧理论过渡到新理论并引入了约束条件(44:I:b)——正常情况。

如果我们坚持按照原有理论来解释(44:D)、(44:D:a)、(44:D:b)，那么，(44:D)、(44:D:a)不成立，[①]然而，(44:D:b)的有条件说法仍然成立。[②]

46.8.3 第六：我们已经看到，一般来说，$e_0=0$ 并不意味着 $\overline{\varphi}=0,\overline{\psi}=0$。这里，“一般来说”是什么意思呢？$\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 服从(46:I:b)的条件(2)—(4)。由于 $e_0=0$，故(4)意味着 $-\overline{\psi}=\overline{\varphi}$ 且允许我们惟一地用 $\overline{\varphi}$ 表达余下的(2)和(3)。它们变成：

$$(46:35)\qquad \left\{\begin{matrix} -|\Delta|_1 \\ -|\mathrm{H}|_2 \end{matrix}\right\} \leqq \overline{\varphi} \leqq \left\{\begin{matrix} -|\Delta|_2 \\ -|\mathrm{H}|_1 \end{matrix}\right\}$$

现在，把(45:E)运用于 Δ、H。我们有：

如果 Δ、H 都是本质博弈，那么，(46:35)的下限 <0，

① 这是因为，我们可以有 $e_0=0,\overline{\varphi}\neq0,\overline{\psi}\neq0$。这样，正如44.3.3中指出的那样，44.3.1的可分解性条件(44:B:a)就被破坏了。——397，①

② 这代表着 $e_0=0,\overline{\varphi}=0,\overline{\psi}=0$ 的特殊情况。——397，②

而且上限 >0,这样 $\overline{\varphi}$ 能够真的 ≠0。如果两者之一是非本质博弈,那么,(46:35)意味着 $\overline{\varphi}=0$,从而 $\overline{\psi}=0$。

我们把这一点明确表述为:

(46:J) $e_0=0$ 意味着 $\overline{\varphi}=0$,$\overline{\psi}=0$,即 44.3.2 的(44:D)甚至在旧理论的意义上也成立,其充分必要条件是,Δ 和 H 之一是非本质博弈。

46.9 哑玩家

46.9.1 现在,我们能够解决第 340 页脚注①中描述的更窄类型的分解——给一个博弈添加"哑玩家"。

考虑玩家 $1',\cdots,k'$ 的博弈 Δ。[①] 通过添加一系列"哑玩家"K 使其"膨胀",即将 Δ 与玩家 $1'',\cdots,l''$ 的一个非本质博弈 H 合成。那么,这个合成博弈是 Γ。

398 对于这些博弈,我们将使用旧的理论。根据 31.2.1 中的(31:I),对于非本质博弈 H 来说,恰好存在一个分配,如 $\overrightarrow{\gamma_K^0}=\{\gamma_{1''}^0,\cdots,\gamma_{l''}^0\}$。[②] 根据 31.2.3 中的(31:O)或(31:P),H 有惟一一个解:一个一元集($\overrightarrow{\gamma_K^0}$)。

现在,根据(46:J)和(46:I:b),Γ 的一般解得自 Δ 的一般解与 H 的一般解的合成,而且后者是惟一的!

换句话说:

通过与 $\overrightarrow{\gamma_K^0}$ 合成,即通过添加分量 $\gamma_{1''}^0,\cdots,\gamma_{l''}^0$,把 J(即 Δ)的每个分配 $\overrightarrow{\beta}_J=\{\beta_{1'},\cdots,\beta_{k'}\}$"膨胀"为 I(即 Γ)的一个

① 这里,重新引入 41.3.1 中的符号是有益的。——397,③

② 请回忆 44.2 的符号。——398,①

解 $\vec{\alpha}_I:\vec{\alpha}_I=\{\beta_{1'},\cdots,\beta_{k'},\gamma^0_{1''},\cdots,\gamma^0_{r''}\}$。那么，这一“膨胀”过程——即合成——从 Δ 的一般解产生 Γ 的一般解。

这一结果能够被总结为：通过添加“哑玩家”，一个博弈的“膨胀”基本上不影响其解——没有必要给每个分配添加代表“哑玩家”的分量，而且这些分量的值是显然的：每个“哑玩家”在非本质博弈 H 中本可以得到的数额，这描述了它们的相互关系。

46.9.2 最后，(46:J) 说明，当且仅当合成不是上述特殊类型的合成时，旧理论才不具有新理论的简单性质，而且，正如 46.8.1 的第三项说明中指出的那样，其遗传性也消失。

46.10 博弈的嵌入

46.10.1 在 46.8.1 的第四项说明中，我们重新强调了 44.6.2 的结果，根据这些结果，当一个博弈被看作非独立博弈时，我们必须从旧理论过渡到新理论。现在，我们给出这一想法的严格表述。

这里，为了方便，我们用 Δ 记考虑中的博弈，用 J 记其玩家集合。应该理解，Δ 是一般的博弈——我们没有假设 Δ 的可分解性。

我们首先引入一些概念，把一个给定的博弈当作一个非独立的博弈来对待：这等于不加修改地将其嵌入更宽松的结构，为了方便而将其描述为另外一个博弈 Γ。相应地，我们定义：如果 Γ 是 Δ 与另一个博弈 H 的合成，[①]我们说 Δ *被嵌入* Γ，或 Γ 是 Δ 的一个*嵌入*。换句话说，Δ 被嵌

---

① 除了 K 和 J 不相交，博弈 H 及其玩家集合 K 是完全随意的。——398，②

入了以其作为一个成分的所有博弈。[①]

399 **46.10.2** 现在，让我们研究 Δ 的解，把 Δ 看作一个非孤立的事情。根据上面的讨论，这等于枚举 Δ 的所有嵌入博弈 Γ 的全部解，并且仅仅在 Δ 的范围内来解释它们。最后一个运算必定是取 44.7.4 意义上的 J－成分。我们从 46.8.2 中的第五项说明知道，如果我们不考虑来自正常区域范围(b)之外的解，这是惟一可行的办法。

我们也许犹豫，Γ 的解应该是旧理论意义上的解还是新理论意义上的解呢？根据 44.6.2，前者似乎有更加充分的理由：该博弈受到的外部影响已经在从 Δ 到 Γ 的过渡中受到考虑，再也没有理由跳出旧理论了。[②] 然而，事实上，我们根本不需要停留在这一点上，因为对于 Δ 来说，结果将是相同的，与我们对 Γ 使用哪一个理论无关。但是，正如我们上面讨论的那样，如果我们对 Γ 使用新理论，我们必须把自己限制于情况(46:I:b)。

因此，问题最终变成了：

(46:K) 考虑 Δ 的所有嵌入博弈 Γ 和这些 Γ 的全部解：

(*a*)从旧理论意义上说，对于 $E(0)$ 来说，

(*b*)在正常区域中，从新理论意义上说，即就(46:I:b)的任一 $E(e_0)$ 来说，

---

① 因为一个成分博弈的成分博弈是其自身[回忆其准确定义，尤其是 43.3.1 中的(43:D)]，一个嵌入的嵌入仍然是一个嵌入。换句话说：嵌入是一个具有可递性的关系，这使我们可以不考虑以其为基础的间接关系。——398，③

② 另外，第 398 页脚注③中指出的传递性表明，Γ 进一步嵌入能够直接被看作 Δ 的一个嵌入。——399，①

哪些是这些解的 J 成分？

46.10.3 答案十分简单：

(46:L)　　(46:K)中所指(Γ 解的)J 成分正是如下集合：正常区域内 Δ 的全部解，即对于(46:I:b)的 $E(\overline{\varphi})$ 而言的全部解。对于(46:K)的(a)和(b)来说，这一点都是正确的。

证明：e_0 属于情况(46:I:b)(见第 396 页脚注④)，所以(a)较(b)窄。因此，我们只须证明得自(b)的所有集合都属于上述集合之列，而且所有这些集合甚至能够借助(a)来得到。

第一个命题不过是正常区域(b)的可遗传性。

在如下条件下，第二个命题得自(46:I:b)：给定一个满足 $-|\Delta|_1 \leqq \overline{\varphi} \leqq |\Delta|_2$ 的 $\overline{\varphi}$，找一个博弈 H 和一个满足 $-|\mathrm{H}|_1 \leqq \overline{\psi} \leqq |\mathrm{H}|_2$ 的 $\overline{\psi}$，使 $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=0$ 且 H 有对于 $E(\overline{\psi})$ 来说的解。现在，这样一个 H 存在，它甚至能够被当作一个三人博弈来选择。

事实上：令 H 是一个本质三人博弈，有一般的 $\gamma>0$。那么，根据 45.1 中的(45:2)，$|\mathrm{H}|_2=\frac{1}{2}|\mathrm{H}|_1=\frac{3}{2}\gamma$。我们已经要求 $\overline{\psi}=-\overline{\varphi}$，而且我们现在所知结果等于

$$-3\gamma \leqq \overline{\psi} \leqq \frac{3}{2}\gamma。$$

显然，通过选择充分大的 γ，这是能够得到满足的。那么，400
我们还需要 H 的对于 $E(\overline{\psi})$ 而言的一个解。这样一个解(对于 $-3\gamma \leqq \overline{\psi} \leqq \frac{3}{2}\gamma$)的存在性将在第 47 节中得到证明。

46.10.4 对于这一结果，我们要补充两点：

第一:如果我们要掌握嵌入的过程使旧理论保有遗传性,我们就必须明白:从 Δ 和 H 合成 Γ,必须使 $e_0=0$ 意味着 $\overline{\varphi}=0$(和 $\overline{\psi}=0$)。根据(46:J),这意味着 Δ、H 之一是非本质博弈。后者意味着(见上),添加到 Δ 上的只是"哑玩家"。

总之:

(46:M) 旧理论保有遗传性的充分必要条件是,最初的博弈 Δ 是非本质博弈,或嵌入运算仅限于向 Δ 添加"哑玩家"。

第二:44.6.2 中已经暗示着把外部来源当作另外一位玩家,它带来了剩余,并且为我们从旧理论向新理论的转变铺平了道路。

上述结果(44:L)证明了一个略微不同的观点:44.6.2 的外部来源是添加到 Δ 上的博弈 H——或其玩家集 K。

现在,我们已经看到,博弈 H 必须是本质博弈,只有这样我们才能得到想要的结果。另外,我们知道,一个本质博弈必须有 $n\geqq 3$ 个参与者,且(44:L)的证明表明,一个适当的有 $n=3$ 个参与者的 H 的确存在。

所以,我们看到:

(46:N) 44.6.2 的外部来源能够被看作一组新的玩家——但不作为一位玩家。事实上,这个组的成员的个数的最小值是 3。

46.10.5 上面的分析证明了我们从旧理论向新理论的过渡(在正常区域之内),并且澄清了这一转变的本质。现在,我们明白了 44.3 的"常识"性预见在旧理论中不成立,但是,它恰恰在我们修改过的定义域中成立。这样,我们的理论变得更加丰富了。

44.4.3—46.10.4 的讨论的主要原理是：我们考虑的博弈最初被看作一件孤立的事情，但是，之后这一孤立性被去掉了，并且以各种可能的方式、不加修改地被嵌入到一个更大的博弈之中。在自然科学，尤其在力学中，这样的思路是常见的。第一个观点对应着所谓封闭系统分析，第二个观点对应着它们被嵌入到一个更大的、没有相互影响的封闭系统。

这一过程方法论上的重要性在当代理论物理文献中 *401*
得到了各种各样的强调，尤其在量子力学结构分析中。尤其值得注意的是，它能够在我们当前的研究中有如此基本的应用。

46.11 正常区域的意义

46.11.1 结果(46:I:b)为正常区域内的合成博弈 Γ 的每个解——即为旧理论意义上的每个解——界定数 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$。这一点以及与解有关的 $\overline{\varphi}$、$\overline{\psi}$ 的性质是如此重要，需要更充分的非数学阐述。

我们正在考虑两个博弈 Δ、H，它们分别由两个不相交的玩家集合 J 和 K 参与。这些博弈的规则规定它们之间没有任何物质上的联系。不过，我们把它们看作一个博弈，当然是一个合成博弈，有两个孤立的成分 Δ、H。

现在，让我们找出这整个安排，即合成博弈 Γ 的全部解。由于我们不希望考虑 Γ 之外的任何事情，我们固守 30.1.1 和 42.4.1 的旧理论。① 我们已经证明，任意一个

① 即 $e_0=0$。——401,①

这样的解 U_I 决定一个数 $\overline{\varphi}$,[①]它有如下性质:对于 U_I 中的每个分配 $\vec{\alpha}$,Δ(即 J 中)的玩家总共得到的数额是 $\overline{\varphi}$,而且 H(即 K 中)的玩家总共得到的数额是 $-\overline{\varphi}$。因此,(撇开其他不说),嵌入 U_I 的组织原理必须规定 H 的玩家在联盟下向 Δ 的玩家转移数额 $\overline{\varphi}$。

U_I——即嵌入其中的组织原理或行为标准的其余特征是:

第一:Δ 的玩家,在他们的相互关系中,必须遵守一个稳定的行为标准,假如从其他组转移来的数额 $\overline{\varphi}$ 超出了有争议的区域。[②]

第二:H 的玩家,在他们的相互关系中,也必须遵守一个稳定的行为标准,假如向其他玩家转移的数额 $\overline{\varphi}$ 超出了有争议的区域。[③]

第三:"入市税"转移数额 $\overline{\varphi}$ 必须位于 46.8.3 的(46:35)的两个界限值之间

$$(46:35)\qquad \left\{\begin{matrix} -|\Delta|_1 \\ -|H|_2 \end{matrix}\right\} \leqq \overline{\varphi} \leqq \left\{\begin{matrix} -|\Delta|_2 \\ -|H|_1 \end{matrix}\right\}$$

46.11.2 显然,这些规则的含义是,任何一个解,即任何稳定社会秩序的基础都是一个组向另一个组的较为有限进贡。这一进贡的数额是解的组成部分。可能的数
402 额,即能够出现在解中的那些数额,由(46:35)严格决定。这个条件尤其说明:

① 因为 $\overline{\varphi}+\overline{\psi}=0$,我们没有引入 $\overline{\psi}=-\overline{\varphi}$。——401,②

② 即 U_I 的 J 成分 V_J 是 Δ 的就 $E(\overline{\varphi})$ 而言的解。——401,③

③ 即 U_I 的 K 成分 W_K 是 H 的对 $E(-\overline{\varphi})$ 而言的解。——401,④

第一：进贡等于 0，即不存在进贡总是可能情况之一。

第二：进贡等于 0 成为惟一可能结果的充分必要条件是，博弈 Δ、H 都是非本质博弈（见 46.8.3 的第六项说明）。

第三：在所有其他情况中，正的和负的进贡都是可能的，即 Δ 的玩家和 H 的玩家都有可能成为进贡者。

（46:35）的界限值由博弈 Δ、H 共同决定，即由两组玩家的客观物质可能性决定。[①] 这些极限表达了，每个组有一个最小值，低于这些最小值—— $-|\Delta|_1$ 和 $|H|_1$，不存在能够接受的社会组织形式；每个组也都有一个最大值，大于这个值—— $|\Delta|_2$ 和 $|H|_2$，在任何社会组织形式下，它都不可能出现。

因此，对于特定的物质背景，即一个博弈，如 Δ，两个数字 $|\Delta|_1$ 和 $|\Delta|_2$ 能够被解释为：$-|\Delta|_1$ 是任何联盟下能够忍受的最差结果，$|\Delta|_2$ 是任何联盟下的有可能为外部接受的最大要求。[②]

45.3.1—45.3.2 的结果（45:E）和（45:F）获得了一个新的意义：根据这些结果，这两个数只有当 Δ 是非本质博弈时才会同时等于 0，而且它们的比率总是位于明确的界限范围之内。

---

① 不过，位于两个界限之间的实际数额 $\bar{\varphi}$ 并不由这些客观材料决定，而是由解，即实际接受的行为标准决定。——402，①

② 需要回忆的是，所有这些都取 Δ 的握有玩家的联盟的值 $v(J)$ 为 0；也就是说，我们正在讨论的是纯粹因缺乏组内合作和不利的一般社会组织而遭受的损失，以及纯粹因外部组织的缺乏合作和有利的一般社会组织而带来的收益。——402，②

46.12 转移现象的首次出现：$n=6$

46.12 我们已经多次看到[见 46.8.3. 中的(46:J)，46.11.2 中的第二和第三项说明]，一个合成博弈 Γ 的理论的新的特征因素只有在 Δ 和 H 都是本质博弈时才表现出来。这时，$e_0=0$，但

$$\overline{\varphi}=-\overline{\psi}\neq 0,$$

即 46.11 意义上的非零进贡。

现在，我们知道，一个本质博弈必定有 $n\geqq 3$ 个玩家。如果这一点对于 Δ 和 H 来说都是正确的，那么，合成博弈 Γ 必定有 ≧6 个玩家。

正如下面的分析表明的那样，6 个实际上足够了：令 Δ、H 都是本质三人博弈，有 $\gamma=1$。那么，$|\Delta|_1=|\mathrm{H}|_1=3$，$|\Delta|_2=|\mathrm{H}|_2=\frac{3}{2}$。（见 46.10.3。）因此，对于 $-\frac{3}{2}\leqq\overline{\varphi}\leqq\frac{3}{2}$，$\overline{\varphi}$ 和 $\overline{\psi}=-\overline{\varphi}$ 都落在 -3 与 $\frac{3}{2}$ 之间。如我们即将在第 47 节中证明的那样，这意味着 Δ、H 的对于 $E(\overline{\varphi})$、$E(\overline{\psi})$ 而言的解 V_J、W_K 的存在性。它们的合成 U_I 是 $\overline{\varphi}$ 被给定的

403 合成博弈 Γ 的一个解。由于 $\overline{\varphi}$ 受到的约束只是 $-\frac{3}{2}\leqq\overline{\varphi}\leqq\frac{3}{2}$，我们能够选择它不等于零。

因此，我们证明了：

(46:O) 要观察到合成博弈（$e_0=0$，$\overline{\varphi}=-\overline{\psi}\neq 0$，见上）理论的新的特征，玩家个数至少为 $n=6$。

我们一再表明的一个信念是，玩家个数的增加未必只带来小个数玩家时所涉及的复杂计算，它还引起本质上新的现象。当玩家个数依次增加到2、3、4时，我们都看到了这类现象。有趣的是，当玩家达到6个时，我们再次观察到这一现象。①

47. 新理论中的本质三人博弈

47.1 讨论的必要性

47.1 下面，我们要根据新理论讨论本质三人博弈的解。

这一讨论的必要性在于，我们已经在46.10和46.12中利用了这些解的存在性，不过，这里的讨论本身也是有意义的。按照46.12中引导我们得出这些解的那些说明以及它们在分解理论中的核心作用②，我们希望获得有关它们的结构的详细知识。另外，熟悉这些细节将带来一些有意义的其他解释。（见47.8和47.9。）最后，我们将发现，在确定问题中的解时，我们使用的原理有着广泛的用途。（见60.3.2和60.3.3。）

47.2 预备性分析

47.2.1 我们考虑本质三人博弈，将其记为Γ，它有

① 当玩家个数等于6时，关于其他的新现象，见53.2。——403，①

② 这只是绝对一般特征问题，我们即将有完全解！——403，②

着正规型 $\gamma=1$。因此，$|\Gamma|_1=3$，$|\Gamma|_2=\frac{3}{2}$（见 46.12）。我们希望确定这个 Γ 对于 $E(e_0)$ 而言的解。[①] 如前面指出的那样，在应用中，我们只需要正常区域 $-3 \leqq e_0 \leqq \frac{3}{2}$，但我们要讨论所有 e_0。

我们将用几何方法进行讨论，这一方法是第 32 节中处理旧理论时使用过的。因此，我们将在若干方面遵循第 32 节的方案。

404 特征函数与 32.1.1 中的特征函数相同：

$$(47:1)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{个元素时}，\mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\1\\0\end{cases}。$$

一个（扩展的）分配是一个向量

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$

它的三个分量必须满足 44.7.2 中的（44:13），其现在的形式是：

$$(47:2)\qquad \alpha_1 \geqq -1,\quad \alpha_2 \geqq -1,\quad \alpha_3 \geqq -1。$$

另外，根据 44.7.2 中的（44:11*），在 $E(e_0)$ 中，剩余必定是 e_0，且现在有：

$$(47:3)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=e_0。$$[②]

---

① 尽管前面使用的符号是 Δ、$\overline{\varphi}$ 和 H、$\overline{\psi}(=-\overline{\varphi})$，我们写 Γ、e_0。当然，这里的 Γ 与前面考虑的可分解的 Γ 没有任何关系。——403，③

② 读者应该把（47:1）—（47:3）与（32:1）—（32:3）进行比较，惟一不同在于（47:3）。——404，①

47.2.2 我们想用 32.1.2 的几何方法描述这些 $\vec{\alpha}$。但是，那里的方法只描述了零和三维数组。因此，我们定义

$$(47:4)\quad \alpha^1=\alpha_1-\frac{e_0}{3},\quad \alpha^2=\alpha_2-\frac{e_0}{3},\quad \alpha^3=\alpha_3-\frac{e_0}{3}。$$

那么，(47:2)、(47:3)变成

$$(47:2^*)\quad \alpha^1 \geqq -\left(1+\frac{e_0}{3}\right)\alpha^2 \geqq -\left(1+\frac{e_0}{3}\right)\alpha^3 \geqq -\left(1+\frac{e_0}{3}\right),$$

$$(47:3^*)\quad \alpha^1+\alpha^2+\alpha^3=0。$$①

现在，32.1.2 的描述变得可用了，我们只需用 α^1、α^2、α^3 取代 α_1、α_2、α_3。有了这一保留说明，图 52 就能够被使用了。

出于这些理由，我们不仅要构造 $E(e_0)$ 的每个向量 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的普通意义上的分量，我们还要构造其(47:4)意义上的准分量：α^1、α^2、α^3。而且，借助这些准分量，我们利用图 52 的几何图示。

这样，这个平面图形恰好表达了条件(47:3*)。因此，条件(47:2*)等价于在图 52 的平面之内对点 $\vec{\alpha}$ 施加
一个约束。这个约束是以 32.1.2 中类似方式得到的：$\vec{\alpha}$ 405
必须落在三条直线 $\alpha^1=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$，$\alpha^2=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$，$\alpha^3=-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$ 形成的三角形之内。除了相差一个比例因子

---

① 将(47:2*)、(47:3*)与 32.1.1 的(32:2)、(32:3)相比，可以看出，(47:3*)与(32:3)一致，(47:2*)与(32:2)的不同仅仅在于一个比例因子 $1+\frac{e_0}{3}$。——404，②

$1+\frac{e_0}{3}$之外①,这恰好是图 53 中的情形,如图 70 所示。阴影区域是所谓的基本三角形,代表着满足(47:2*)和(47:3*)的 $\vec{\alpha}$,即 $E(e_0)$ 中的那些 $\vec{\alpha}$。

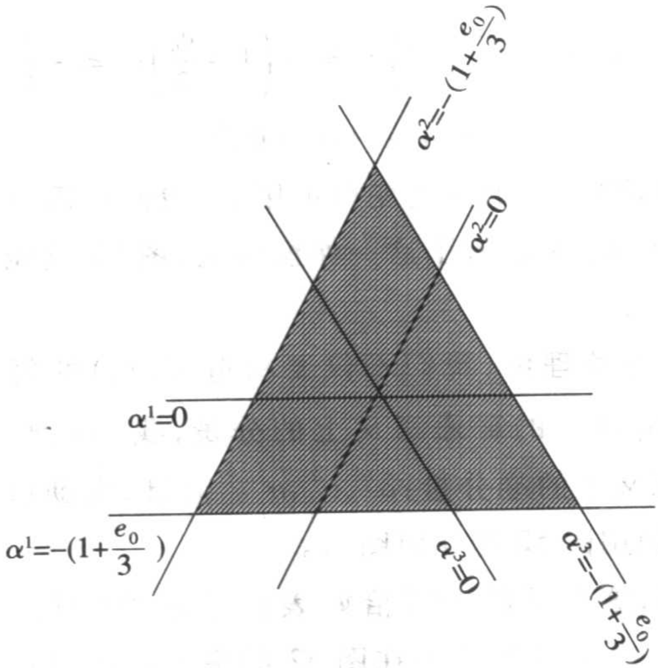


图 70

47.2.3 我们要在这个集合图示中表达占优关系。由于我们正使用着新理论,31.1 中关于 30.1.1 的对于占优关

---

① 见第 404 页脚注②。这里,我们假设 $1+\frac{e_0}{3}\geqq 0$,即

$$e_0 \geqq -3=-|\Gamma|_1。$$

如果 $1+\frac{e_0}{3}<0$,即 $e_0<-3=-|\Gamma|_1$,那么,(47:2*)和(47:3)的条件相互冲突,而且事实上(45:A)告诉我们,在这种情况下,$E(e_0)$ 是空集。——405,①

系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 来说的集合 S——即关于其肯定必要性或肯定不必要性的分析——不再适用。因此，我们要重新讨论 S。

S 不可能是一个一元集或三元集，这一点仍然正确。在第一种情况下，$S=(i)$，根据 30.1.1，$\alpha_i \leqq \mathrm{v}[(i)]=-1$，$\alpha_i>\beta_i$，从而 $\beta_i<-1$，根据(47:2)，这与 $\beta_i \geqq -1$ 矛盾。在第二种情况下，$S=(1,2,3)$，根据 30.1.1，$\alpha_1>\beta_1, \alpha_2>\beta_2, \alpha_3>\beta_3$，从而 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3>\beta_1+\beta_2+\beta_3$，根据(47:3)，这与 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3=e_0$ 矛盾。

因此，S 必须是一个二元集，$S=(i,j)$。[1] 那么，占优意味着 $\alpha_i+\alpha_j \leqq \mathrm{v}[(i,j)]=1$ 和 $\alpha_i>\beta_i, \alpha_j>\beta_j$，即 406

$$\alpha^i+\alpha^j \leqq 1-\frac{2e_0}{3},$$

且 $\alpha^i>\beta^i, \alpha^j>\beta^j$。根据(47:3*)，第一个条件可以重写为

$$\alpha^k \geqq -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)。$$

我们重述如下：占优

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

意味着

$$(47:5)\begin{cases}\text{要么 } \alpha^1>\beta^1, \alpha^2>\beta^2 \text{ 且 } \alpha^3 \geqq -\left(1-\dfrac{2e_0}{3}\right), \\ \text{或者 } \alpha^1>\beta^1, \alpha^3>\beta^3 \text{ 且 } \alpha^2 \geqq -\left(1-\dfrac{2e_0}{3}\right), \\ \text{或者 } \alpha^2>\beta^2, \alpha^3>\beta^3 \text{ 且 } \alpha^1 \geqq -\left(1-\dfrac{2e_0}{3}\right)。[2]\end{cases}$$

---

① i,j,k 是 1,2,3 的一个排列。——406,①

② 这与 32.1.3 中相应的(32:4)的不同之处仅在于每行末的额外条件。——406,②

47.3 六种情况讨论:情况(I)—(III)

47.3.1 有了这些准备,我们现在能够讨论 Γ 对于 $E(e_0)$ 而言的解 V,其中 e_0 取任意值。

我们最好分六种情况进行讨论。这些情况中,情况(I)对应着(45:O:a);情况(II)—(IV)和(V)的一个点对应着(45:O:b)(正常区域);情况(V)和(VI)(不包括前面那个点)对应着(45:O:c)。(这些都在 45.6.1 中。)

47.3.2 情况(I):$e_0 < -3$。在这种情况下,$1+\frac{e_0}{3}<0$,所以(47:2*)和(47:3*)相互冲突且 $E(e_0)$ 是空集(见第 405 页脚注①),故 V 也必定是空集。

情况(II):$e_0=-3$。在这种情况下,$1+\frac{e_0}{3}=0$,所以(47:2*)和(47:3*)意味着 $\alpha^1=\alpha^2=\alpha^3=0$,即 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{e_0}{3}=-1$,

$$\vec{\alpha}=\{-1,-1,-1\}。$$

所以,$E(e_0)$ 是个一元集,且根据 31.2.3 中(31:O)的证明中给出的同样论述,V 必定 $=E(e_0)$。因此,这些条件十分类似于一个非本质博弈中枚举的那些条件。

407 情况(III):$-3<e_0\leqq 0$。在这种情况下,$1+\frac{e_0}{3}>0$,所以我们能够使用图 70。又 $1+\frac{e_0}{3}\leqq 1-\frac{2e_0}{3}$,所以 47.2.3 中(47:5)的额外条件在整个基本三角形中自动得到满足。这样,(47:5)与 32.1.3 中的(32:4)一致(见第 406 页脚注

②)。所以,把比例因子 $1+\frac{e_0}{3}$ 插入进去,那么,32.1.3—32.2.3 的全部讨论再次适用。

因此,在这种情况下,取 32.2.3 中描述的那些解,用 $1+\frac{e_0}{3}$ 乘其每一个分量并加上 $\frac{e_0}{3}$(从 α^i 过渡到 α_i),我们就简单得到了 $E(e_0)$ 的解。

47.4　情况(IV):第一部分

47.4.1　情况(IV):$0<e_0<\frac{3}{2}$。 在这种情况下,$0<1-\frac{2e_0}{3}<1+\frac{e_0}{3}$。所以,如图 71 所示,直线

$$\alpha^1=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),$$

$$\alpha^2=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),$$

$$\alpha^3=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$$

[它们是(47:5)的额外条件的边界]的位置服从图 70 的基本三角形。它们把基本三角形分成七个区域,其中的每一个都能够通过指出其内(47:5)意义上的二元有效集 S 而得到描述。图 71 的下方给出一个列表。现在,我们能够画出与图 54 类似的图,对于基本三角形的每个点,指明该点占优的阴影区域。① 图 72 中根据(47:5)完成了这一

① 不包括其边界点。——407,①

工作。我们必须分别研究图 71 中的七个区域的每一个，而且图 72 的每个阴影区域必须连续穿过整个基本三角形。

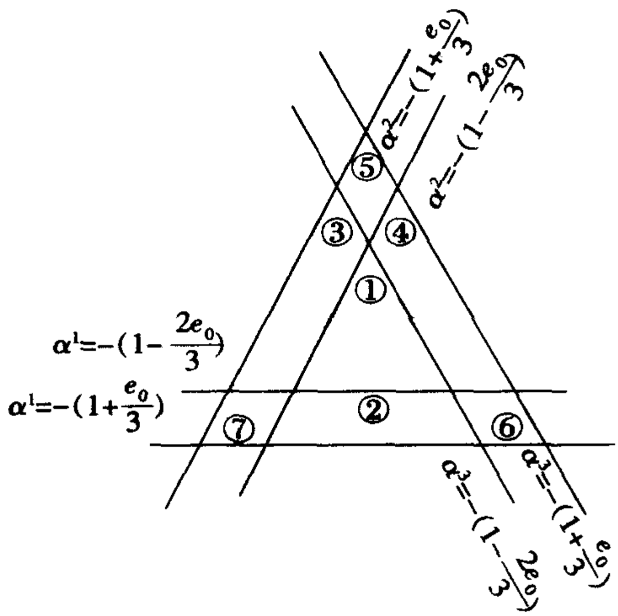


图 71

区域	有效三元集 S:		
①	(1,2),	(1,3),	(2,3)
②	(1,2),	(1,3)	
③	(1,2),		(2,3)
④		(1,3),	(2,3)
⑤			(2,3)
⑥		(1,3)	
⑦	(1,2)		

显然，根据图 72，区域①没有被该区域之外的点占优的点。[①] 因此，当把区域①看作整个基本三角形即 $E(e_0)$

① 包括其边界点。——407，②

时，描述 $E(e_0)$ 即整个基本三角形的解 V 的 44.7.3 的条件(44:E:c)也必须对于 V 在区域①中的那部分成立。但是，除了比例因子 $1-\frac{2e_0}{3}$ 之外，区域①是一个类似于图 53 的基本三角形的三角形。[①] 图 54 与图 72 中区域①的比较告诉我们，占优的条件是相同的。

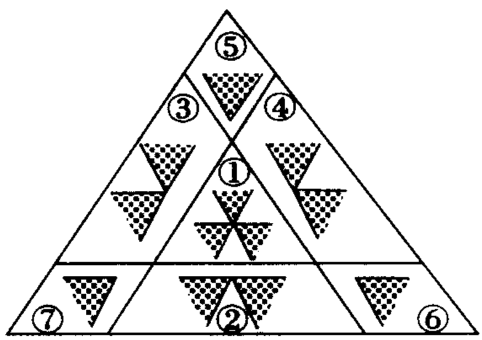


图 72

47.4.2 因此，如果把比例因子 $1-\frac{2e_0}{3}$ 插入进去， 408
32.1.3—32.2.3 的全部讨论适用于 V 在区域①中的那一部分。从而，V 落入区域①的那一部分要么是图 73 中的虚圆点组成的集合，要么是闪烁线所代表的集合（闪烁 409
线—·—·—·—可以位于上面两个虚圆点下方的任何位置）。然而，闪烁线必须是 1,2,3 的所有置换，即按照 0°、60°、120°旋转以产生所有解。[见 32.2.3，虚圆点是那里的(32:B)，而闪烁线是那里的(32:A)。]

---

① 注意，$1-\frac{2e_0}{3}>0$。——407，③

找出了V落入区域①中的部分之后，我们接着确定V的其余部分。由于V是一个解，其余部分必定位于这样一个区域，该区域不被V落入区域①的部分占优。图73与图72的比较告诉我们，这个不被占优的区域是如下区域：

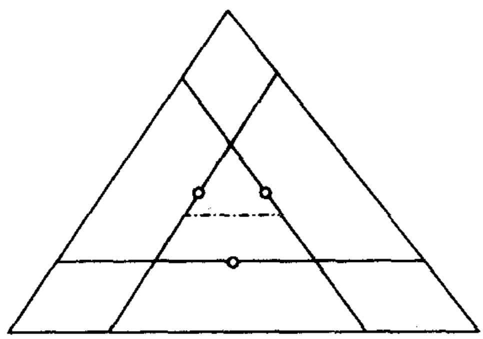


图 73

对于三个虚圆点组成的集合来说，它由图74中三个阴影三角形组成；对于闪烁线集合来说，它由图75中的三个三角形组成。[①] 图72清楚告诉我们，这些三角形内的任何点都不会被另一个三角形中的点占优。[②] 因此，

---

① 所有这些三角形的位置都在图中明确画出来了，例外情况是图75中下方的那个三角形。这个三角形肯定落在内三角（区域①）之外，这等价于32.2.2中的约束(32:8)，见那里的图60。其相对外部（基本）三角形的位置不那么确定：它有可能缩小为一个点或完全消失。

不难看出，后一种现象被排除了，除非内三角形的大小≧外三角形的$\frac{1}{4}$，这意味着$1-\frac{2e_0}{3}\geqq\frac{1}{4}\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$，即$e_0\leqq 1$。我们不打算更深入讨论这个题目。——409，①

② 指图74或图75——但不可能在同一说法中同时指两个图。——409，②

44.7.3 的条件(44:E:c)描述的是 V 对于 $E(e_0)$ 即整个基本三角形而言的解——而且,对于 V 落入区域①的部分,将其当作区域①[以取代整个基本三角形,即 $E(e_0)$],它也成立。这恰好表明:对于 V 落入每个阴影三角形的部分,将其看作那个三角形,(44:E:c)总是成立的。

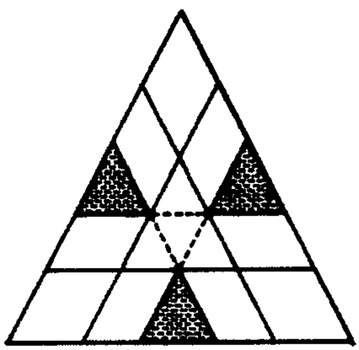


图 74

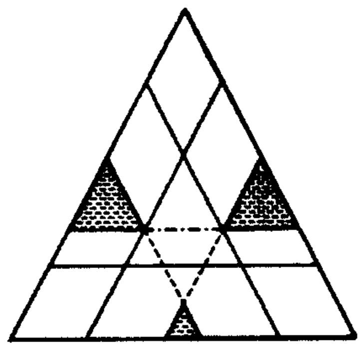


图 75

47.5 情况(IV):第二部分

47.5.1 让我们取这些三角形中的一个,记为 T。其在基本三角形中的位置[①]以及被其中一个给定的点占优的阴影区域(取自图 72)如图 76 所示。现在,我们可以集中注意力于三角形 T 和其中成立的占优概念,并针对这种情况确定(44:E:c)的解。如图 77 所示,我们重新描绘 T 及其结构,同时引入一个坐标系 x,y。 410

① 允许0°、60°、120°旋转。对于图 75 中下面的那个三角形,顶点不在内三角形上,而是低于它(见上面脚注①),但这并不干扰我们的讨论。——409,③

请注意,顶点 O 不被 T 的点占优,因此它必定属于 V。[①②]

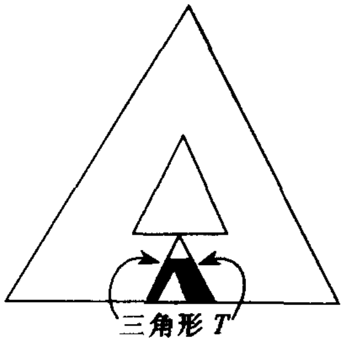


图 76

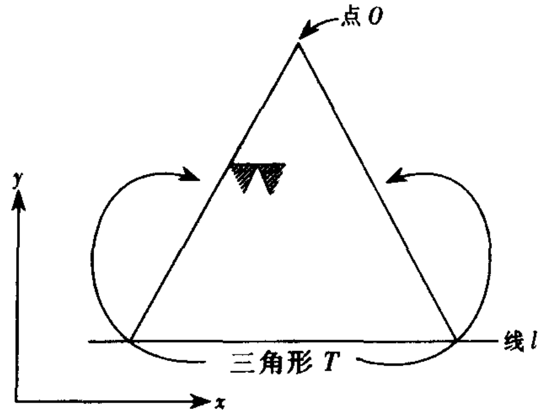


图 77

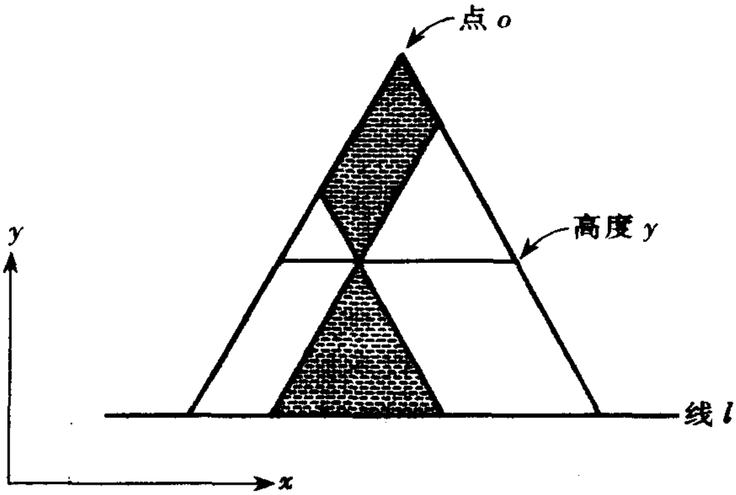


图 78

① 对于图 75 中下面的三角形之外的其他三角形(即 T),这一结论还出自另一种考虑:如图 74—75 所示,这样一个三角形的顶点位于内三角形(区域①)的边界线上,并属于我们已知为 V 落入区域①的那部分。——410,①

② 当图 75 中下面的三角形(即 T)退化为一个点(见第 409 页脚注①)O 时,那么,这决定 V 落入 T 的部分。——410,②

47.5.2 现在，考虑 V 的属于 T 的两个有不同高度 y 的点。为了上面的那个点不占优下面的那个点，后者绝对不能落入两个阴影六分周之内，下面的那个点必须在上面的那个点下方中间的那个六分周之内，反之亦然。因此，如果 V 的属于 T 的一个点给定，那么，在不同高度 y，V 的属于 T 所有点必须落入图 78 中的两个阴影六分周之一之内。

47.5.3 现在，假设 y_1 是一个高于 V 的一个点的高度。令 p 和 q 是 V 的有着高度 y_1 的两个不同的点，如图 79 所示。现在，在方块阴影三角形的内部选择一个点 r。图 79 与图 77 的比较告诉我们，点 r 占优 p 和 q。因为 p、q 都属于 V，从而 r 不能属于 V。因此，V 中必定存在一个 s，s 占优 r。图 79 与图 77 的再次比较告诉我们，占优 r 的一个点必定同时占优 p 和 q 之一。因为 s、p、q 都属于 V，所以这是一个矛盾。 411

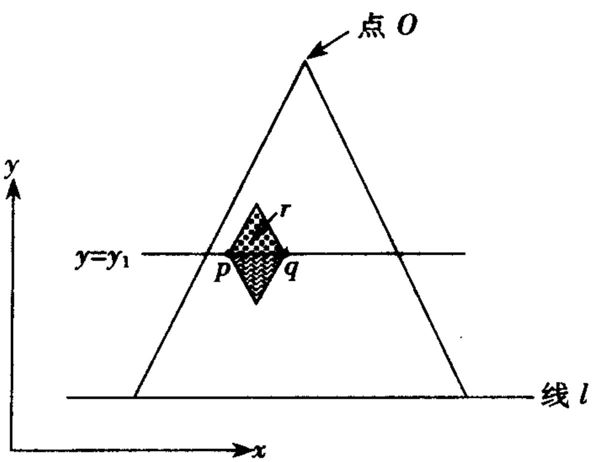


图 79

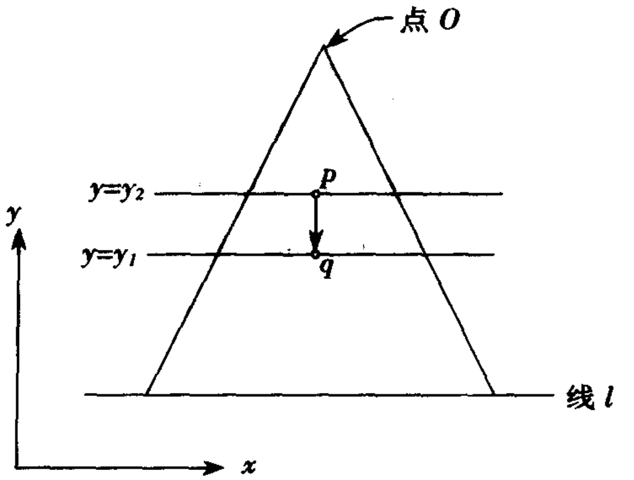


图 80

47.5.4 接下来,假设 y_1(属于 T,即位于基线 l 与顶点 O 之间)不是 V 中任何一个点的高度。必定存在 V 的这样一些点,它们的高度 $y \geqq y_1$,例如,顶点 O 就是这样一个点。选择 V 的一个点 p,有高度 $y \geqq y_1$,尽可能低,即有其 y 的最小值。①(图 80。)用 $y=y_2$ 记这个最小值。显然,$y_1<y_2$。按照 y_2 的定义,V 中任何一个点都不具有高度 y,$y_1 \leqq y<y_2$,而且根据上面的分析,p 是 V 的具有高度 $y=y_2$ 的惟一一个点。

现在,将 p 垂直立于 $y=y_1$ 之上,得到 q。q 不可能属于 V,因此它被 V 中的一个 s 占优。因此,这个 s 不会落在
412 q 的下面,即其高度 $y \geqq y_1$。所以,$y \geqq y_2$。图 80 与图 77 比较告诉我们,p 并不占优 q。因此,$s \neq p$,必然要求 $y \neq y_2$。所以,$y>y_2$,即 s(肯定)位于 p 之上。现在,图 80 与图 77 再次比较表明,如果位于 p 之上的一个点 s 占优 q,那么,

① 由于 V 是一个封闭集,这是可能的。见第 384 页脚注①的(*)。——411,①

它必定也占优 p。因为 s、p 都属于 V，这是矛盾的。

47.5.5 总结：（l 与 O 之间的）每个 y 都恰好是 V 的一个点的高度。如果 y 变化，那么，这个点变化，其变化范围是图 78 限定的范围，即不离开图中阴影六分周。换句话说：

(47:6)　　（T 中的）V 是一条从 O 到 l 的曲线，其方向偏离垂直线的程度不会超过 30°[①]（见图 81）。

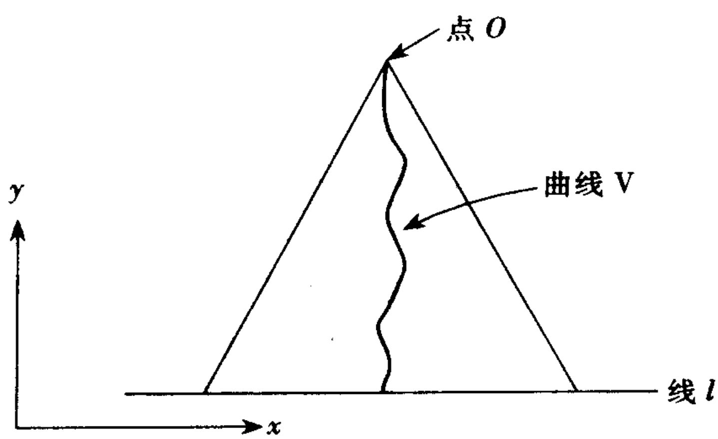


图 81

反过来，如果按照(47:6)给定一条曲线，那么，图 81 与图 77 的比较清楚告诉我们，被 V 的点占优的区域恰好清除了 V 在 T 中的补集。这样，(47:6)是 V 落入 T 的那一部分的严格决定。[②]

现在，我们能够获得 $E(e_0)$（即基本三角形）的一般解 V 了，我们的做法是按照图 81 向图 74 和图 75 的每个三 413

① 从而，它是连续的。——412，①

② 当 T 退化为一个点时，这一点同样正确，见第 409 页脚注①。——412，②

角形中插入曲线。结果分别见图 82 和图 83。[①]

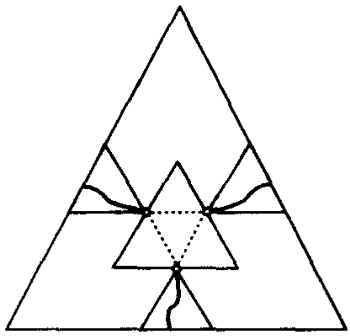


图 82

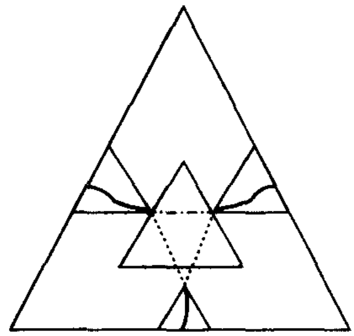


图 83

我们将会看到，这些图仍然表现出与旧理论中（见 32.2.3，说明了图 73 的内三角形）有关基本三人博弈的解的那些图有惊人的类似。新的要素是小三角形中的曲线，它们全部位于图 82 和图 83 的两个主要三角形之间的边缘地带。如图 71 所示，这个边缘地带的宽度由 e_0 衡量。[②] 所以，当 e_0 趋于 0 时，我们的新解趋向于旧解。

还值得指出的一点是，这些解远比以前更加具有多变性：［在限制条件（47:6）之内］全部曲线可以自由选择。我们将在后面看到，这些曲线引导我们做出一个更有意义的解释（见 47.8）。

---

① 图 83 中下面的那个三角形有可能退化为一个点，甚至完全消失。见第 409 页脚注①。——413，①

② 外（基本）三角形的边是由 $\alpha^i = -\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$ 给定的，内三角形的边则由 $\alpha^i = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$ 给定（见图 71）。$-\left(1+\frac{e_0}{3}\right)$ 与 $-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)$ 之差是 e_0。——413，②

47.6 情况(V)

47.6.1 情况(V)：$\frac{3}{2} \leqq e_0 < 3$。在这种情况下，$1 - \frac{2e_0}{3} \leqq 0 < 1 + \frac{e_0}{3}$且$-2\left(1 - \frac{2e_0}{3}\right) < 1 + \frac{e_0}{3}$。[①] 不难验证，这些不等式表达的是，图 71 的内三角形的方向被倒置了，但是，它仍然位于外(基本)三角形之内，如图 84 所示。后者再次被分为七个区域，其中的每一个都能够这样来描述，即说明哪些二元集是其 47.2.3 中(47:5)意义上的有效集。现在的情况与情况(IV)(即图 71)中情况的不同是区域①的表现。图 84 的下面给出了一个列表。

现在，我们能够描绘图 54 与图 72 的相似之处，对于基本三角形的每个点，指出它所占优的阴影区域。[②] 按照(47:5)，图 85 完成了这一工作。

根据图 85，区域①[③]中的任一点都不被任何点占优。[④] 因此，V 必定包含全部区域①。

---

① 后一个不等式等价于 $e_0 < 3$。——413，③

② 不包括它们的边界线。——413，④

③ 包括其边界。——413，⑤

④ 指 $E(e_0)$中的 $\vec{\alpha}$。不难证明，它们根本不被 $\vec{\alpha}$ 占优——根据 45.2.4 中的(45:D)它们是独立分配。

区域①内的点也不占优其他点。也就是说，它们不占优 $E(e_0)$中 $\vec{\alpha}$。同样，容易证明，它们根本不占优 $\vec{\alpha}$——它们是充分独立的分配，见 45.2.4 中的(45:C)。

这些说法也可以用 5.2 的定义来直接验证。——413，⑥

414

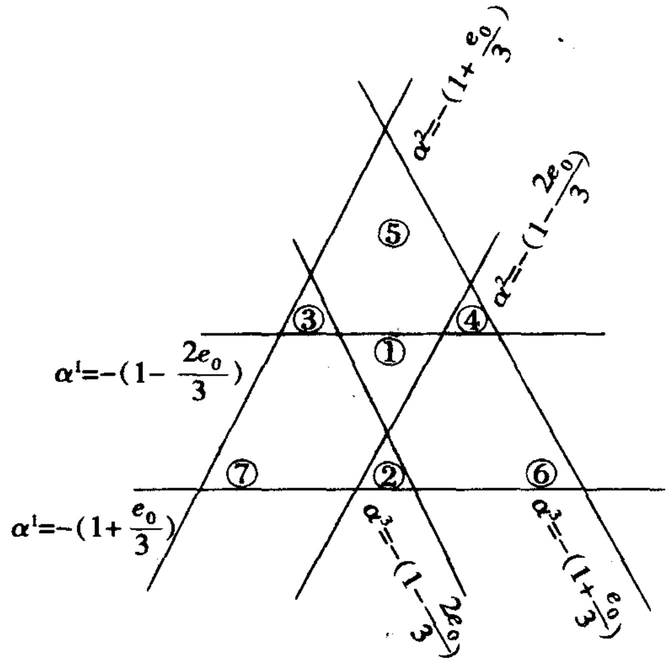


图 84

区域	有效二元集 S:		
①			
②	(1,2),	(1,3)	
③	(1,2),		(2,3)
④		(1,3)	(2,3)
⑤			(2,3)
⑥		(1,3)	
⑦	(1,2)		

415 **47.6.2** 找到了 V 的属于区域①的那一部分之后，我们接着确定 V 的其余部分。由于 V 是一个解，其其余部分位于这样一个区域之内，该区域不被 V 的已知部分占优，即不被区域①占优。图 85 告诉我们，这个不被占优的

区域恰好由②、③、④三个三角形组成。[①]

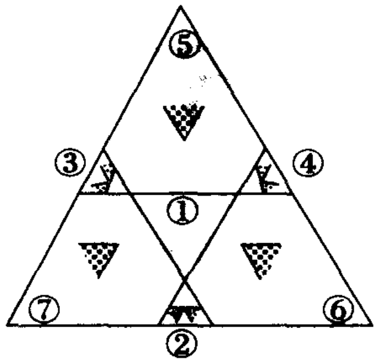


图85

显然，根据图85，这三个三角形中的任何一点都不会被另一个三角形中的一个点占优。因此，47.4.2的论述表明，我们对V的要求必定是：44.7.3的(44:E:c)必须对V的属于这些三角形之一的那一部分成立，将其当作那一三角形[取代整个基本三角形，即$E(e_0)$]。

三角形②、③、④中的条件与图76、图77中描述的有关三角形T的条件相同。因此，47.5.1—47.5.4的全部推理可以一字不漏地照搬过来，而且，V的属于②、③、④的部分是图81中那样的曲线，它们由47.5.5中的(47:6)描述。

现在，我们能够得到V对于$E(e_0)$(即基本三角形)而言的一般解了，具体做法是在图85的②、③、④中插入上述曲线。结果见图86。有关这些解的进一步说明见47.8和47.9。

① 基本三角形的其余部分被属于区域①的①的边界占优。——415，①

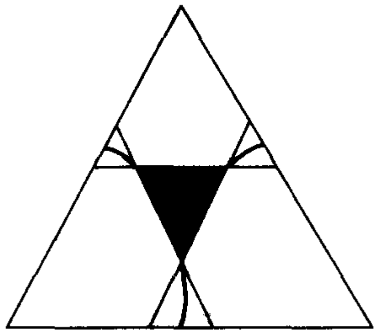


图 86

47.7 情况(VI)

47.7 $e_0 \geqq 3$。在这种情况下,$1-\frac{2e_0}{3}<0<1+\frac{e_0}{3}$且$-2\left(1-\frac{2e_0}{3}\right) \geqq 1+\frac{e_0}{3}$。[①] 不难验证,如图 87 所示,这些不等式描述的是,图 84 的内三角形仍有着相同方位,但它达到了外(基本)三角形的边界,而且有可能超出其边界。[②] 现在的情况与情况(V)(即图 84)的惟一不同是区域②、③、④的消失。图 87 下方给出了列表。

图 54、图 72 和图 85 的相似性说明占优关系包含在图 88 之中。

47.6.1 的论述能够一字不漏地照搬过来,以证明 V 包含区域①的全部。图 88 告诉我们区域①不留下不被占优基本三角形部分。[③] 因此,V 恰好等于区域①。关于这个解的更多说明见 47.9。

---

① 后一个不等式等价于 $e_0 \geqq 3$。——415,②

② $e_0>3$。——415,③

③ 基本三角形的其余部分被属于区域①的①的边界占优。——415,④

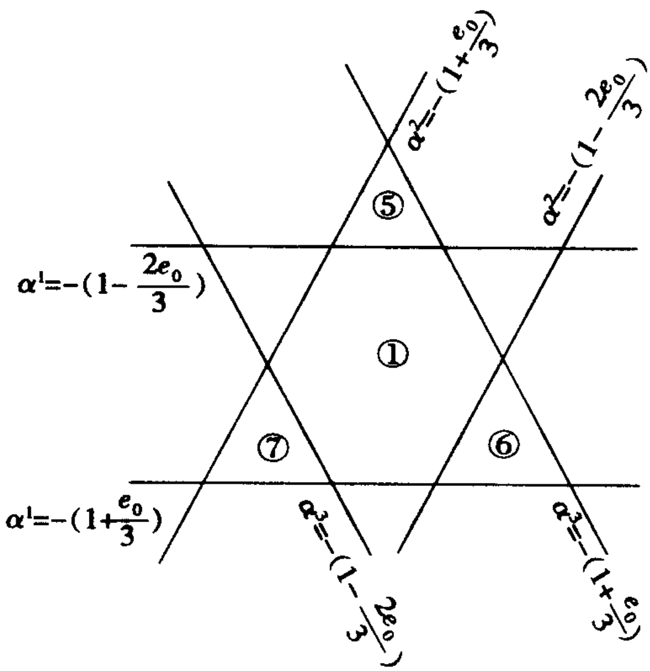


图 87

区域	有效二元集 S：		
①			
⑤			(2,3)
⑥		(1,3)	
⑦	(1,2)		

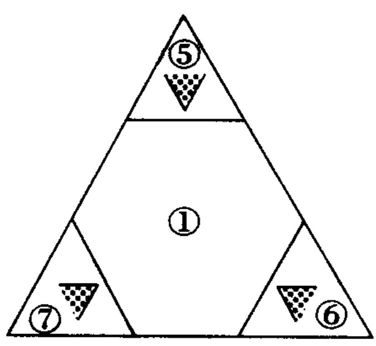


图 88

47.8 结果的解释:解中的曲线(一维部分)

416 **47.8.1** 47.2—47.7 的讨论中获得的解需要一个简要的解释。惹人注目的是少数定性特征的重复出现,这在
417 描述它们结构时大有用途——一旦它们不同于我们熟悉的旧理论的本质三人博弈的解。这些特征是:一旦 $e_0>0$(且一旦 $e_0<3$)就会出现的[在 47.5.5 的约束条件(47:6)范围之内具有随意性的]曲线;以及当 $e_0>\frac{3}{2}$时出现的二维区域。下面,我们给出它们的解释。

首先,考虑情况(IV):$0<e_0<\frac{3}{2}$(属于正常区域)。让我们讨论当前情况中这样一些解,它们扩展旧理论的无歧视解[见 33.1.3 和 32.2.3 中的(32:B)]。这样一个解见图 82。

图 82 说明了形成旧理论中一个解的类似体的三个虚圆点。以下面的那个虚圆点为例,我们可以轻易证明

$$\alpha^1=-\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)=-1+\frac{2e_0}{3},$$

$$\alpha^2=\alpha^3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2e_0}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2e_0}{3},$$

即

$$\alpha_1=-1+e_0,\quad \alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{2}。$$

因此,这三个点表达了一种安排,其中两位玩家已经结成联盟,总的成果等于 1,并且在他们之间平均分配——但是,失败的玩家并未被降低到其最小值 -1,因为他保有的

数额要超过总的剩余 e_0。

现在，从这些虚圆点出发的曲线（位于两个三角形之间的边缘地带）表达着这样的情形，在无争议地剥夺失败玩家时，总剩余 e_0 没有被剩下。通过要求这一剩余的任何部分，胜利联盟索取的数额超过 1，而它在该博弈能够实际得到的数额是 1，也就是说该联盟不再是有效的。（见图 71 和图 72 中的②、③、④）。因此，该联盟的行为——赃物在其内部的分配——不再由该博弈的现实情况——即同伙威胁——决定，而是由行为标准决定。这一点由上述曲线表达，它是解的一部分。同伙之间的可能威胁仍然在一定程度上约束着这条曲线[见 47.5.5 中的（47:6）]，但是，超过一定程度之后，它就变得十分随意了。我们必须强调，这种随意性恰恰说明了稳定的行为标准——即解——的有限多样性，意味着确定的曲线，即这种情况下的行为准则。

47.8.2　这些分析暗示着如下推测性解释：

（47:A）　在一个正的剩余出现的情况下，一个联盟有可能获得超过其有效最大值的数额，也可能获得剩余的某个比例。这种可能性主要归于行为标准而非该博弈的物质可能性。获得剩余的比例可以在 0% 至 100% 之间变化，并且有待行为标准来确定。后者将惟一地规定获得的这个比例如何在联盟成员中间分配。这一分配规则将依赖于在诸多可能的稳 418
定行为标准中选择哪一个。而且，如果后者变化，这一规则将大范围变化，尽管并非完全

不受约束。

我们已经看到，根据(47:6)，很多解中都存在着有待确定的曲线，而且，它们将来还会出现。上述解释似乎在每种情况中都适用于它们。

在一个给定的解中，剩余在胜利联盟与失败玩家之间的分配的不确定性，是特定社会秩序内部特定社会调整如何不确定的一个例子。我们的曲线还表明了这样一个细微差别，即虽然这样一个不确定的分配是被选定的，某些玩家却能够借助特定的传统相互联系着。（在67.2.3的第二项说明，67.3.3和62.6.2中我们将看到更多这类例子。）

47.9 连续性：解中的区域(二维组成部分)

47.9.1 如图83所示，47.8.2的解释(47:A)应通过将其应用于旧理论的有歧视解的扩展（见33.1.3）来检验。这会给出一些有启发性的观点，尤其关于图83中位于下方的三角形中的曲线。然而，我们不进一步阐述这一情况。

我们转向情况（V）和（VI），尤其当$e_0 > \frac{3}{2}$的时候（这些是44.6.1和45.2意义上"太大"的剩余）。这些情况是由外部环境描述的，即它们的解包含着二维区域。实际上，有可能出现两种不同情况：

(a)情况（V），即$\frac{3}{2} < e_0 < 3$。一个解V包含二维区域①，但除此之外还包含47.8中讨论的曲线（见图86）。

(b)情况(VI),即 $e_0 \geqq 3$。惟一的解 V 是二维区域①,别无其他(见图 88)。

二维区域在解之内的出现表明,行为标准不包含分配规则,至少在一定范围之内是这样。在情况(a)、(b)中,这些限制是具体的。在情况(a)中,47.8 的曲线出现在这些界限的外边,即行为标准仍然鼓励特定的联盟,在情况(b)中,事情就不是这样了。

47.9.2 这样,我们看到,“太大”的剩余——即来自外部来源的礼物(见 44.6.1)——的干扰作用表现在两个相继阶段:在情况(a)中,它出现在特定中心区域中,但是不排除特定传统联盟。在情况(b)中,行为标准不再允许联盟,但是它对分配有特定限制性原则。

我们看到,这些相继干扰阶段分别在 $e_0 = \frac{3}{2}$ 和 3 时达到。[1] *419*

对于行为标准和组织的可能性来说,这些分析相当有启发性。在理论的进一步发展中,它们也许具有指导意义。但是,读者必须小心的是,不要根据这些定量结果轻易下结论:它们适用于有一个剩余的三人博弈[2],从而证明这是它们发挥作用的最简单模型。不过,有一点更加明确了,即参与者人数的增加将带来根本性的影响。

---

① 注意,$|\Gamma|_2 = \frac{3}{2}$。——419,①

② 从而也适用于旧理论中的一个可分解六人博弈,见 46.12。——419,②

第10章 简单博弈

48. 胜利联盟、失败联盟及其出现的博弈

48.1 41.1中的第二个类:联盟的决策

420 **48.1.1** 34.1中描述的计划使我们能够把与34.2.2中立方体Q的八个隅角相应的博弈进一步推广。35.2.1集中讨论了隅角VIII(也是II、III、IV的代表),并且提供了一个推广的基础,引出了第9章的合成和分解理论。现在,我们转向角I(它是V、VI、VII的代表),我们将以类似方式对待它。

这一做法的一个特例已经在这个博弈中得到说明,把这个原理加以推广,我们将得到一类博弈,叫简单博弈。我们将看到,关于这类博弈的研究产生一个信息体,它有助于我们更深入理解34.1意义上的一般理论。

48.1.2 考虑35.1中讨论过的Q的角I。正如我们在35.1.1中讨论的那样,这个博弈有如下显著特点:玩家的目的是建立特定的联盟,这些联盟要么由玩家4和一个

盟友组成，要么由其他三位玩家组成。这些联盟中的任何一个都是真正的胜利联盟。不属于这些联盟的其他联盟都是彻底失败联盟。也就是说，数量因素，特征函数所表达的支付能够被当作次要的东西——这一博弈中的首要目标是成功建立关键联盟。

这一描述强烈暗示着，玩家号码4和关键联盟的具体安排属于特例，具有偶然性，一个较为一般的原理能够从这一特殊安排中提取出来。

48.1.3 在给出这一推广时，下面的结果是有用的：在上面的例子中，关键联盟——建立这些联盟是玩家的惟一目标——是

(48:1)　　(1,4),(2,4),(3,4),(1,2,3)。

现在，为了方便，我们不仅把这些联盟看作胜利联盟，而且还把它们的（真）超集也看作胜利联盟：

(48:2)　　(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4),(1,2,3,4)。

这是因为，虽然联盟(48:2)包含那些不影响胜利与否的参与者，但是，该联盟毕竟是胜利联盟，即其对手是失败者。[①] 这些对手形成这样一些联盟，它们是(48:1)、(48:2) 421
中的集合的补集，即集合

(48:3)　　(2,3),(1,3),(1,2),(4)

(3),(2),(1),$\ominus$。

因此，(48:1)、(48:2)包含的是胜利联盟，而(48:3)包含的是失败联盟。

不难验证，$I=(1,2,3,4)$的每个子集都恰好属于这两

① 即补集是31.1.4意义上的平集。见35.1.1中的讨论。——421,①

类之一:(48:1)、(48:2)或(48:3)。[①]

48.2 胜利联盟与失败联盟

48.2.1 让我们考虑 n 个玩家组成的集合:$I=(1,\cdots,n)$。把 48.1.3 的计划加以推广,把 I 的所有子集分为 W 和 L 两类,使 W 的子集代表胜利联盟,L 的子集代表失败联盟。48.1.3 中建立起来的性质能够被描述如下:

用 $\bar{I}$ 记 I 的全体子集组成的系。[②] I 的每个子集 S 到其(在 I 中的)补集映射:

(48:4) $$S \to -S$$

显然是 $\bar{I}$ 到其自身的一个一一映射。我们有:

(48:A:a) 每个联盟要么是胜利联盟,要么是失败联盟,即 W 和 L 是 $\bar{I}$ 中的互补集合。

(48:A:b) (在 I 中)求补集的运算把一个胜利联盟变成一个失败联盟,反之亦然,即映射(48:4)把 W 和 L 相互映射为对方。

(48:A:c) 如果一个联盟的一部分是一个胜利联盟,那么,该联盟也是一个胜利联盟,即 W 包含其元素的所有超集。

(48:A:d) 如果一个联盟是一个失败联盟的一部分,那么,该联盟也是一个失败联盟,即 L

① (1,2,3,4)有 $2^4=16$ 个子集,其中 8 个属于(48:1)、(48:2),其余 8 个属于(48:3)。——421,②

② I 有 n 个元素,所以 $\bar{I}$ 有 2^n 个元素。——421,③

包含其元素的所有子集。

48.2.2 在继续讨论胜利和失败与博弈的关系之前，我们要进一步分析条件(48:A:a)—(48:A:d)的结构。

第一个惹人注目的事实是，虽然我们需要用 W 和 L 来解释博弈，但这两个类毕竟是相互决定的。事实上，它们以如下方式相互决定：给定 W 或 L 之一，(48:A:a)以及(48:A:b)能够被用于建立另一个。也就是说，从这两个集合中的一个出发，另一个可以如下方式得到：

根据(48:A:a)：视给定的集合为一个整体并构筑其(在 I 中)的补集。

根据(48:A:b)：分别取这一给定集合的每个子集并用其(在 I 中的)补集取代它。[①] 422

还应该注意的是，如果给定的集合 W 或 L 分别具有性质(48:A:c)或(48:A:d)，那么，根据(48:A:a)或根据(48:A:b)从前者得到的另一个集合具有性质(48:A:c)或(48:A:d)。[②]

根据上面的讨论，我们能够把我们考虑中的结构建立

---

① 读者将会看到，这一条件的如下重要结构：无论求补集的运算是运用于作为一个整体的给定集合，还是分别运用于它的元素，给定的集合都必须产生相同的结果。——422，①

② 对于(48:A:a)和(48:A:b)来说，这一点的确正确，而与(48:A:a)和(48:A:b)是否产生同一集合无关。确切说：

(48:B)　令一个集合 M 具有性质(48:A:c)[(48:A:d)]，那么，根据(48:A:a)和(48:A:b)从 M 得出的集合有性质(48:A:d)[(48:A:c)]，我们并不假设它们相同。

证明：我们必须证明的是，变换(48:A:a)和(48:A:b)把性质(48:A:c)变成性质(48:A:d)，反之亦然。

在集合 W 或 L 之上。我们必须仅仅要求变换(48:A:a)和(48:A:b)将它变换为同一个集合(W 和 L 中的另一个),而且它必须满足(48:A:c)和(48:A:d)中最贴切的一个(根据我们前面的讨论,条件(48:A:c)和(48:A:d)中的另一个则自动得到满足)。

因此,我们仅仅有关于 W 或 L 的两个条件:第一个是(48:A:a)和(48:A:b)的等价条件,第二个是(48:A:c)或(48:A:d)。

前者意味着:一个集合与其(在 I 中的)补集没有共同元素。换句话说:两个互为(I 中的)补集的集合 S 和 $-S$ 中,有且只有一个属于该集合。

总之:

集合 $W(\subseteq \bar{I})$ 由如下性质刻画:

(48:W)

(48:W:a)　　(I 中的)互为补集的 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 W。

(48:W:b)　　W 包含其元素的所有超集。

集合 $L(\subseteq \bar{I})$ 由如下性质描述:

显然,(48:A:c)等价于:

(48:A:c*)　　如果 S 属于 M,且 T 不属于 M,那么,$S \subseteq T$ 不可能成立。

(48:A:d)等价于:

(48:A:d*)　　如果 S 不属于 M,且 T 属于 M,那么,$S \subseteq T$ 不可能成立。

现在,变换(48:A:a)把"属于 M"和"不属于 M"相互对调。因此,它对调(48:A:c*)和(48:A:d*)。变换(48:A:b)对调 $\subseteq$ 和 $\supseteq$(这由逐个就元素 S、T 求补集来完成;另外,记号 S、T 必须对调)。因此,它也对调(48:A:c*)和(48:A:d*)。——422,②

(48:L)

(48:L:a)　　(*I* 中)互为补集的 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 L。

(48:L:b)　　L 包含其元素的所有子集。

我们重述如下: 423

如果 $W[L]$ 满足(48:W)[(48:L)],那么,(48:A:a)和(48:A:b)给出同一个集合 $L[W]$。W 和 L 满足(48:A:a)—(48:A:d),那么,它们分别满足(48:W)和(48:L)。

49. 简单博弈的特征描述

49.1 胜利联盟与失败联盟的一般概念

49.1.1 现在,我们分析博弈自身内部胜利联盟和失败联盟之间的联系。

给定一个 n 人博弈 Γ。在下面的分析中,我们把自己限制于 30.1.1 或 42.4.1 意义上的旧理论。因此,正如我们在 42.5.3 中指出过的那样,根据需要,我们可以假设 Γ 是一个零和博弈或常数和博弈。

除此之外,Γ 不受其他约束,尤其不要求有正规型。

49.1.2 我们首先分析失败联盟的概念。基本上重复 35.1.1 中的讨论,我们有:[①]玩家 i,当他孤身一人时,得到数额 $v[(i)]$。这显然是有可能发生在他身上的最糟糕

① 不同之处是,我们现在的 Γ 更为一般一些。——423,①

的结果，因为他能够无需他人帮助而防止遭受更大的损失。因此，当玩家 i 得到这一数额时，我们可以认为他彻底失败了。如果一个联盟 S 得到数额 $\sum_{i属于S} v[(i)]$ 时，我们可以认为该联盟是一个失败联盟，因为这样的话，其中的每位玩家 i 必然得到数额 $v[(i)]$。[①] 因此，失败的准则是

$$v(S)=\sum_{i属于S} v[(i)]。$$

用 31.1.4 的术语说，这意味着，联盟 S 是平的。（也可见第 296 页脚注③。）

这样，我们得到了全部失败联盟组成的系 L_Γ[②] 的一个令人满意的定义：

(49:L)　　L_Γ 是所有平集 $S(\subseteq I)$ 的集合。

现在，我们可以轻松地说什么是一个胜利联盟了。它显然是这样一个联盟，其对手是一个失败联盟，即全部胜利联盟的系 W_Γ 是：

424 (49:W)　　W_Γ 是 $-S$ 为平集的所有 $S(\subseteq I)$ 组成的集合。

在概念上应该清楚且能够借助 27.1.1—27.1.2 直接验证的一点是，集合 W_Γ, L_Γ 在策略等价下保持不变。

49.1.3　我们不能指望 W_Γ 和 L_Γ 满足 48.2.1 的（有

---

① 因为没有哪位玩家接受小于 $v[(i)]$ 的数额，且联盟 S 中的玩家总共有 $\sum_{i属于S} v[(i)]$，玩家 i 得到 $v[(i)]$ 是分配这一结果的惟一方式。——423，②

② 为避免混淆，我们将使用记号 W_Γ、L_Γ，而不使用 48.2.2 的 W、L。两者的区别在于，48.2.2 是我们希望（用 W、L 描述的）"胜利"联盟和"失败"联盟具有的性质的假设性讨论，而我们现在正在分析的是得自一个给定的博弈 Γ 的一个给定的集合。

两种观点在 49.3.3 的(49:E)中归为一个。——423，③

关 W,L 的)(48:A:a)—(48:A:d)。具有目前的一般性的博弈未必是那里提到的简单博弈,其中所有玩家的惟一目标是形成一定的关键联盟,而且不存在其他需要一个定量描述的动机。[①] 因此,为了表达我们已知的这一性质,我们有必要做出限制。事实上,这一限制的准确描述是接下来要实现的目标。

然而,我们要首先确定(48:A:a)—(48:A:d)中有多少对于目前的一般 Γ 是成立的。我们分几个阶段回答这一问题。

(49:A)　　W_Γ、L_Γ 总满足(48:b)—(48:A:d)。

证明:(48:A:b)的证明:比较 49.1.2 中的(49:L)和(49:W)直接给出结果。[②]

(48:A:c)和(48:A:d)的证明:由于我们有(48:A:b),我们能够应用 48.2.2 中的(48:B)[③],从而,(48:A:c)和(48:A:d)中的一个意味着另一个。

但是,考虑到(49:L),(48:A:d)与 31.1.4 中的(31:D:c)一致。

因此,我们目前的 W_Γ、L_Γ 与 48.2 的结构之间的主要区别在于(48:A:a),即 W_Γ、L_Γ 是否互补。我们可以把这

---

① 我们关于四人博弈的讨论已经给出了有关这类动机的很多讨论,36.1.2 末尾提供了一个很好的例子。事实上,这是常有的情况,我们目前正要讨论的一类博弈从一定意义上说是一种极端情况,见 49.3.3 的总结。——424,①

② 实际上,"胜利"的概念借助求补集的运算建立在"失败"的概念之上。——424,②

③ 这说明了为什么我们在 48.2.1 中把(48:A:a)与(48:A:b)分开:现在,我们有(48:A:b),但没有(48:A:a)。——424,③

个断言分为两个部分：

(49:1)

(49:1:a)　　$W_\Gamma \cap L_\Gamma = \ominus$,[1]

(49:1:b)　　$W_\Gamma \cup L_\Gamma = \bar{I}$。[2]

(49:1:a)使我们回到如下熟知概念：

(49:B)

(49:B:a)　　(49:1:a)成立的充分必要条件是，Γ 是本质博弈。

(49:B:b)　　如果 Γ 是非本质博弈，那么，$W_\Gamma = L_\Gamma = \bar{I}$。[3]

425 证明：(49:B:a)的证明：(49:1:a)的否定意味着存在一个 S，使 S 和 $-S$ 都是平集。根据 31.1.4 中的(31:E:b)，这等于非本质性。

(49:B:b)的证明：$W_\Gamma = L_\Gamma = \bar{I}$ 意味着 $\bar{I}$ 中每一个 S 都是平集。根据 31.1.4 中(31:E:c)，这等于非本质性。

在过渡到(49:1:b)之前，我们首先要注意到的是，W_Γ、L_Γ 具有(48:A:a)—(48:A:d)中没有出现的一个性质。

(49:C)　　L_Γ 包含着空集和所有一元集。[4]

证明：这与 31.1.4 中的(31:D:a)和(31:D:b)相同。

---

① 你也许觉得别扭，这一断言——一个联盟不可能同时是胜利的和失败的——必须被分开陈述。这一条件的含义将在(49:B)和脚注⑥中表现出来。——424，④

② 这是说，每个联盟——即 I 的每个子集——要么肯定是胜利的，要么肯定是失败的。这个想法当然是我们希望将 Γ 特殊化所依据的基础。——424，⑤

③ 因此，当一个博弈是非本质博弈时，一个联盟能够同时是胜利联盟和失败联盟，这显然是因为此时两种陈述都是没有意义的。——424，⑥

④ 显然，根据我们关于博弈的整个分析，一位玩家的一个联盟总被看作失败的——因为这位玩家没有成功地找到一个结盟同伙。——425，①

(49:C)实际上是一个新的条件,即它不是(48:A:a)—(48:A:d)的一个结果;我们将在49.2中验证这一点。因此,我们在48.2中给出的肤浅讨论忽视了 W_r、L_r 的这一必要特征。因此,我们必须确保现在的条件包含一切。也就是说,条件(48:A:b)—(48:A:d)和(49:C)与有关非本质性的结果(49:B)合起来完全描述了 W_r、L_r。这将在49.3中得到证明。

49.2 一元集的特殊作用

49.2.1 我们从上面提到的一个例子开始:两个系 W、L,它们满足(48:A:a)—(48:A:d)[①],但不满足(49:C)。实际上,我们能够确定所有这样的配对。

(49:D) W、L 满足(48:A:a)—(48:A:d),但不满足(49:C),当且仅当它们有下述形式:W 是所有包含 i_0 的 S 的集合,L 是所有不包含 i_0 的 S 的集合,其中 i_0 是随意选定的一位玩家。

证明:充分性:我们可以直接验证,W、L 有满足(48:A:a)—(48:A:d)的形式。因为一元集(i_0)属于 W,而不属于 L,(49:C)得不到满足。

必要性:假设 W、L 满足(48:A:a)—(48:A:d),但不满足(49:C)。令(i_0)是一个一元集,它不属于 L。[②] 那么,(i_0)属于 W。

① 最初,我们只提到(48:A:b)—(48:A:d),但上面的分析毫不费力地加强了条件。——425,②

② 如果空集不属于 L,那么,根据(48:A:d),没有能够属于 L 的集合。所以,任何(i_0)都将属于 W。——425,③

每个包含 i_0 的 S 有 $S \supseteq (i_0)$，因此，根据(48:A:c)，它属于 W。如果 S 不包含 i_0，那么，$-S$ 包含它。因此，按照上面的分析，$-S$ 属于 W，而且，根据(48:A:b)，S 属于 L。

最后，根据(48:A:a)，W、L 不相交，因此，W 恰好是包含 i_0 的 S 组成的集合，且 L 恰好是不包含 i_0 的 S 组成的集合。

49.2.2 我们要对这一结果做简单评述。

426 (49:D)中的 W、L 不可能是任何博弈的 W_Γ、L_Γ，因为它们违背了(49:C)。这也许有点奇怪，因为(49:D)看似会传递一个十分清楚的“胜利”和“失败”的概念，由其 W、L 来描述。事实上，它们描述的是这样一种情况，其中如果一个联盟包含 i_0，该联盟胜利，如果该联盟不包含 i_0，该联盟就失败。为什么无法构造满足这一规定的博弈呢？

理由是，在上述条件下，“胜利”完全不是建立联盟的问题：[①]不需要任何人的帮助，玩家 i_0 是“胜利的”。更为糟糕的是，在我们的术语中，i_0 的这一地位不是胜利——它不是任何策略活动[②]的结果，而是博弈规则赋予它的一个固定地位。[③] 其中联盟不带来任何优势的博弈是非本质博弈[④]，即使其中的玩家 i_0 应该有相当大的固定优势。

---

① 35.1.4 中就一种特殊情况给出了等价分析。——426,①

② 我们总是将此看作建立适当的联盟的活动。——426,②

③ 见 22.3.4 中三人博弈中的基本值 a'、b'、c' 的处理。有关策略等价的全部讨论遵循着同一种精神（见 27.1.1）：这类优势能够通过策略等价变换得以消除，而真正得自建立联盟的优势却不能被消除。——426,③

④ 因此，其 W_Γ、L_Γ 不是(49:D)中描述的 W_Γ、L_Γ，而是(49:B:b)的 W_Γ、L_Γ。——426,④

读者当然明白,所有这些只是对我们在前面[在(49:C)和(49:D)中]严格建立起来结果的补充说明。

49.3　实际博弈的 W、L 的特征描述

49.3.1　下面,我们转向 49.1.3 末尾提到的第二个题目。给定两个系 W、$L(\subseteq \bar{I})$,它们满足条件(48:A:b)—(48:A:d)和(49:C)以及(49:1:a)。[①] 我们将用 $W_\Gamma = W$, $L_\Gamma = L$ 构造一个本质博弈 Γ。为此,我们把 Γ 正规化,使 $\gamma = 1$。

L_Γ 中的集合 S 的特征是,它们是平集,即 $\mathrm{v}(S) = -p$,其中 p 是 S 的元素个数。[②] W_Γ 中的集合 S 的特征是,根据上述分析,$-S$ 属于 L_Γ,即 $\mathrm{v}(-S) = -(n-p)$。现在,$\mathrm{v}(-S) = -\mathrm{v}(S)$,从而,我们可以将其写成 $\mathrm{v}(S) = n - p$。

这样,我们证明了:

我们希望有的关系 $W_\Gamma = W, L_\Gamma = L$ 等价于:

(49:2)　　对于一个 q-元集合 S,$(q = 0, 1, \cdots, n-1, n)$

(49:2:a)　　$\mathrm{v}(S) = n - q$

的充分必要条件是 S 属于 W,而且

(49:2:b)　　$\mathrm{v}(S) = -q$

的充分必要条件是 S 属于 L。

因此,我们的任务是用一个满足(49:2)的特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 构造一个(正规化的,$\gamma = 1$ 的)博弈 Γ。 427

---

① 我们要求(49:1:a),是因为我们的主要目标是本质博弈[见(49:B)]。因此,如即将(49:E)中给出的那样,我们将使我们的分析详尽无遗。——426,⑤

② 请回忆,所有 $\mathrm{v}[(i)] = -\gamma = -1$。——426,⑥

49.3.2 (49:2)确定了 W 和 L 的 $v(S)$，因此，我们只需就既不属于 W、也不属于 L 的那些 S 定义 $v(S)$。如果既不属于 W，也不属于 L，那么，我们令 $v(S)=0$。相应地，我们定义：

$$v(S)=\begin{cases}\left.\begin{array}{l} n-q, S \text{ 属于 } W \\ -q, S \text{ 属于 } L\end{array}\right\} S \text{ 有 } q \text{ 个元素}, q=0,1,\cdots,n-1,n。\\ 0, \text{其他情况}^{①}\end{cases}$$

我们首先证明，$v(S)$ 是一个特征函数，即它满足25.3.1中的(25:3:a)—(25:3:c)。我们证明这些条件25.4.2 中的等价形式(25:A)：

有 = 的 $p=1$ 情况：这是 $v(I)=0$，因为 I 属于 W，根据(48:A:b)和(49:C)，$\ominus=-I$ 属于 L。

有 = 的 $p=2$ 情况：这是 $v(S_1)+v(S_2)=0$，其中 S_1、S_2 互为补集。如果 S_1、S_2 都不属于 W、L，那么，$v(S_1)=v(S_2)=0$。如果 S_1、S_2 之一属于 W 或 L，那么，根据(48:A:b)，另一个属于 L 或 W。根据对称性，假设 S_1 属于 L，S_2 属于 W。令 S_1 有 q 个元素，从而 S_2 有 $n-q$ 个元素，那么，$v(S_1)=-q$，$v(S_2)=q$。

所以，我们总有 $v(S_1)+v(S_2)=0$。

有 ≦ 的 $p=3$ 情况：这是 $v(S_1)+v(S_2)+v(S_3)\leqq 0$，其中 S_1、S_2、S_3 两两不相交，并集为 I。如果 S_1、S_2、S_3 都不属于 W，那么，$v(S_1)$，$v(S_2)$，$v(S_3)\leqq 0$。② 如果 S_1、S_2、S_3 之一属于 W，那么，我们可以根据对称性假设它是 S_3。因此，由

---

① 根据(49:1:a)，前两项规定并不冲突。——427，①

② 显然，如果 S 不属于 W，那么，$v(S)\leqq 0$。——427，② (48:A:b)，$-S_3=S_1\cup S_2$ 属于 L，从而根据(48:A:d)，S_1、S_2 属于 L。令 S_1 有 q_1 个元素，S_2 有 q_2 个元素，那么，S_3 有 $n-q_1-q_2$ 个元素。这样，$\mathrm{v}(S_1)=-q_1$，$\mathrm{v}(S_2)=-q_2$，$\mathrm{v}(S_3)=q_1+q_2$。

所以，我们总有 $\mathrm{v}(S_1)+\mathrm{v}(S_2)+\mathrm{v}(S_3)\leqq 0$。

49.3.3　我们证明了 $\mathrm{v}(S)$ 的确是某个博弈 Γ 的特征函数。接下来，我们要证明如下断言：

$\mathrm{v}(S)$（即 Γ）是正规的且 $\gamma=1$：事实上，根据(49:C)，所有 $\mathrm{v}[(i)]=-1$。

$\mathrm{v}(S)$ 满足(49:2)：根据(48:A:b)和 $\mathrm{v}(-S)=-\mathrm{v}(S)$，当我们交换 S 和 $-S$ 时，(49:2)的两部分一个变成另一个。因此，我们只考虑第二部分。

如果 S 属于 L，那么，显然 $\mathrm{v}(S)=-q$。如果 S 不属于 L，那么，$\mathrm{v}(S)=-q$ 就要求 $0=-q$①，或 $q=0$。但是，这意味着，S 是空集，与(49:C)矛盾。

所以，博弈 Γ 具有我们希望的所有性质。

现在，我们能够证明下述详尽无遗的陈述：

(49:E)　两个给定的系 W、$L(\subseteq\bar{I})$ 是一个合适的博弈 Γ 的 W_Γ、L_Γ 的充分必要条件是：

非本质的 Γ：$W=L=\bar{I}$。

本质的 Γ：(48:A:b)—(48:A:d)、(49:C)和(49:1:a)。

证明：非本质的 Γ：这是(49:B:b)的直接结果。 428

本质的 Γ：必要性是在(49:A)、(49:B)和(49:C)中

① 因为 $n-q\neq -q$，S 不属于 W，从而 $\mathrm{v}(S)=0$。——427，③

证明的。充分性是我们已经建立起来的结构的内容。

最后，我们要提一下（49:S）的另一个解释。回忆27.2的不等式(27:7)（也可见图50），它规定了 $\mathrm{v}(S)$ 的界限，W_Γ 是这样一些 S 组成的集合，对于这些 S，$\mathrm{v}(S)$ 达到了上限值；L_Γ 是这样一些 S 组成的集合，对于这些 S，$\mathrm{v}(S)$ 达到了下限值。

49.4 简单博弈的严格定义

49.4 (49:E)允许我们给 48.1.2 和 48.2.1 中提到并在 49.1.3 的开头较详细描述的一类博弈下一个严格定义：其中所有玩家的目的是建立特定的关键联盟，而且其中不存在需要定量描述的其他动机。

把(49:E)的关于本质博弈的开头部分与(49:1)结合起来，这一概念的正式表述是：

(49:1:b) $$W_\Gamma \cup L_\Gamma = \bar{I}。$$

事实上，这个条件表达的是，任何给定的联盟 S 要么属于胜利联盟，要么属于失败联盟，没有其他归属。

相应地，我们定义：一个满足(49:1:b)的本质博弈被称为简单博弈(simple game)。简单博弈的概念在策略等价下是不变的，因为集合 W_Γ、L_Γ 是不变的。

49.5 简单博弈的一些基本性质

49.5.1 在对这一概念进行详细数学分析之前，让我们再一次考虑 49.3 的总结说明。从那里的说明的意义上说，如果对于每个 S，$\mathrm{v}(S)$ 落在 27.2 中的不等式(27:7)为

其指定的区域的边界上①,那么,本质博弈就是简单博弈。

各种(正规的,$\gamma=1$ 的)n 人博弈能够被看作图 65 中给定的特定维数的几何描述。更确切地说,上述不等式在问题中维数的线性空间中定义一个凸多面体值域 Q_n,而且这个值域的点代表着所有这些博弈。②

49.5.2　例:对于 $n=3$,上述维数是零,且值域 Q_3 是一个点。对于 $n=4$,这一维数是 3,且值域 Q_4 是 34.2.2 的立方体 Q。

现在,简单博弈是这样一些博弈,对于这些博弈,我们位于每个不等式的边界上。关于凸多面值域 Q_n,这意味着:简单博弈是 Q_n 的顶点,$n=3,4$。

例:对于 $n=3$,Q_3 是一个点,即顶点之外没有别的东西,所以本质三人博弈是简单博弈。③ 对于 $n=4$,Q_4 是立方体 Q,所以,简单博弈是顶点,即 I—VIII。④ 429

49.6　简单博弈及其 W、L:最小胜利联盟 W^m

49.6.1　结合(49:E)和简单博弈的定义,我们得到:

---

① 该边界由两个点组成:上限值 $n-p$,下限值 $-p(\gamma=1)$。$v(S)$ 必须是其中之一。——428,①

② 熟悉 n 维线性几何学的读者会注意到:由于 Q_n 是由线性不等式定义的,它是一个多面体。27.6 的讨论允许我们得出它是凸集的结论。——428,②

③ 见 50.1.1 中的(50:A)。——429,①

④ 一旦我们关注角 I、V、VI、VII,这并不令人吃惊:48.1 中,我们的讨论从这些点开始,我们的简单博弈概念恰恰得自这些点的推广。

角 II、III、IV、VIII 的重新出现较令人费解:我们在 35.2 中将其作为可分解博弈的范型来研究。然而,根据(50:A)和 51.6 的开头,不难判断,它们也是简单博弈。——429,②

(49:F)　　两个给定的系 W、$L(\subseteq \bar{I})$ 是一个适当的简单博弈 Γ 的 W_{Γ}、L_{Γ}，其充分必要条件是：(48:A:a)—(48:A:d)和(49:C)。

对于简单博弈来说，可以肯定，(49:2)中所指 S 穷举了 I 的全部子集。所以，对于简单博弈且仅仅对于这些博弈来说，在该博弈是正规的和 $\gamma=1$ 的情况下，有关 W_{Γ}、L_{Γ} 的知识决定 v(S)。也就是说，没有最后的附带条件，它在策略等价博弈程度上决定该博弈。

我们重述如下：

(49:G)　　当且仅当博弈 Γ 是简单博弈时，在策略等价程度上，该博弈由其 W_{Γ}、L_{Γ} 决定。

因此，根据(49:F)和(49:G)，有关简单博弈的理论与关于满足(48:A:a)、(48:A:d)和(49:C)的那些成对的系 W、L 的理论有共同的范围。

49.6.2　在研究上述系对 W、L 时，我们应该回顾 48.2.2，尤其是(48:W)、(48:L)和(49:2)。根据这些，为了确定 W、L，提到 W 或 L 也就足够了。

条件(48:A:a)—(48:A:d)可以按如下方式被取代：如果使用的是 W，那么，由(48:W)取代之；如果使用的是 L，那么，由(48:L)取代之。

至于(48:C)，它直接联系 L。通过应用(48:A:b)，我们完全能够同样地提到 W，这样，其中提到的集合必须由其子集取代。

为完全起见，我们重述(48:W)和(48:L)以及(49:C)的相应形式。

集合 $W(\subseteq \bar{I})$ 有下述性质描述：

(49:W*)

(49:W*:a)　两个(在 I 中)互补的集合 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 W。

(49:W*:b)　W 包含其元素的超集。

(49:W*:c)　W 包含 I 和所有 $(n-1)$ 元集合。

集合 $L(\subseteq\bar{I})$ 由下列性质刻画： 430

(49:L*)

(49:L*:a)　两个(在 I 中)互补的集合 S 和 $-S$ 中有且只有一个属于 L。

(49:L*:b)　L 包含其元素的子集。

(49:L*:c)　L 包含空集和全部一元集。

正如我们在上面指出的那样，我们能够把理论建立在满足(49:W*)的 W 或满足(49:L*)的 L 之上。

49.6.3　由于人们习惯于更多地关注胜利联盟，较少关注失败联盟，我们将使用前者。

这里，我们看到，W 的特定子集与 W 有同样重要性。这是 W 的这样一个子集 S，它没有属于 W 的真子集。我们称这样的 S 为 W 的最小元素(即 W_Γ)，且这样的 S 组成的集合记为 W^m(即 W_Γ^m)。

这一概念的直觉上的含义是清楚的：这些最小胜利联盟是真正的关键联盟，其中的每位玩家都是必不可少的。(我们也许会想起，48.1.3 的讨论就是从枚举我们当时正在考虑的博弈的这些联盟开始的。)

49.7 简单博弈的解

49.7.1　引入简单博弈概念的那些试探性分析表明，

关于这类博弈的讨论要比关于 n 人(零和)博弈的讨论容易。为了说明这一点,我们必须研究一个简单博弈的解是如何确定的。由于我们正在使用的是旧理论,我们必须参照 30.1.1。[①] 首先,我们要看到的是,在一个简单博弈中,每个集合要么是肯定必要的,要么是肯定不必要的(见 31.1.2),这会带来预料之中的重大简化。

49.7.2 为了证明这一断言,我们首先证明:

(49:H) 在任何本质博弈 Γ 中,W_Γ 的全部集合 S 是肯定必要的,L_Γ 的全部集合 S 是肯定不必要的。

证明:如果 S 属于 L_Γ,那么,它是一个平集,根据 31.1.5 中的(31:F),它是肯定不必要的。如果 S 属于 W_Γ,那么,$-S$ 是平集(因为它属于 L_Γ)且 $S \neq \ominus$(因为空集属于 L_Γ,而不属于 W_Γ)。所以,根据 31.1.5,S 是肯定必要的。

现在,我们能够兑现我们在上面许下的关于简单博弈的诺言了。事实上,我们能够以两种不同方式做到这一点。

431 (49:I) 在任何简单博弈 Γ 中,W_Γ 的全部集合 S 是肯定必要的,且其他集合是肯定不必要的。

证明:对于一个简单博弈来说,L_Γ 恰好是 W_Γ 的补集。

---

① 如 44.7.2 中那样,用新理论的术语说,这意味着:我们正在寻找 $E(0)$ 的解,即剩余等于零时的解。

在 51.6 的第三项说明中,把剩余被限制为零的意义将变得更为明确。——430,①

将这一结果与(49:H)结合起来就是(49:I)的证明。

(49:J)　　在任何简单博弈 Γ 中，W_{Γ}^{m} 的所有集合 S 是肯定必要的，且其他集合是肯定不必要的。[1]

证明：我们能够把(49:I)的 W_{Γ} 换成其子集 W_{Γ}^{m}，即根据 31.1.3 中的(31:C)，我们能够把来自肯定必要类的 $W_{\Gamma}-W_{\Gamma}^{m}$ 的所有 S 转变为肯定不必要的集合。事实上，W_{Γ} 中的每个 S 都在 W_{Γ}^{m} 中有它的一个子集 T。

(49:I)和(49:J)这两个准则中，后者更为有用。它们的重要性将在简单博弈中解的实际确定中得到证明。[2] 事实上，有关简单博弈的这一分析允许我们深入理解有多个参与者的博弈理论。[3]

50. 多数博弈和主解

50.1　简单博弈的例子：多数博弈

50.1.1　在展开进一步讨论之前，我们先给出一些简单博弈例子，即 49.6.1 中(49:F)的 W、L 的几个例子。49.6.2 告诉我们，我们只需讨论(49:W^{*})所描述的 W。

因此，我们将考虑引入这样的 W 的若干可能途径，即

---

① (49:I)与(49:J)的比较告诉我们，$W_{\Gamma}-W_{\Gamma}^{m}$ 的 S 既是肯定必要的，又是肯定不必要的。这是第 274 页脚注①末尾说明的另一例证。——431，①

② 见 50.5.2 和 55.2。——431，②

③ 见 55.2—55.11，另尤其见 54 中的一般说明。——431，③

引入胜利这一概念的若干可能定义。

多数原则本身就是一个非常合适的胜利定义。因此，一个合理的定义是，把 W 定义为包含多数玩家的 S 的系。然而，我们将会看到，我们必须排除和局。事实上，(49:W*)已经指明了这一点，对于每个 S 来说，S 或 $-S$ 必须包含全体玩家的多数，从而排除了两者各包含一半玩家的情况。换句话说：总参与者个数必须是奇数。

所以，如果 n 是奇数，我们可以把 W 定义为有 $>\frac{n}{2}$ 个元素的 S 组成的集合。[①] 以这种方式得到的简单博弈[②]被称为直接多数博弈。

432 要做到这一点[③]，最小的 n 是 3。我们知道，仅仅存在着一个本质三人博弈，而且对于这个 W 来说，它恰好由二元和三元集即大于 $\frac{3}{2}$ 的集合组成。所以，我们看到：

(50:A) （惟一的）本质三人博弈是一个简单博弈。它是三个参与者的直接多数博弈。

对于后面的合适的 $n(n=5,7,\cdots)$ 来说，直接多数博弈只不过是众多可能性之一。

50.1.2 直接多数博弈只能在 n 是奇数时才能得到，

---

① 由于大于 $\frac{n}{2}$ 的最小奇数是 $\frac{n+1}{2}$（n 是奇数），我们也可以说：S 必须至少有 $\frac{n+1}{2}$ 个元素。——431，④

② 确切地说：（n 个参与者的）一类策略等价博弈。——431，⑤

③ 即它是奇数且一个博弈能够成为一个本质博弈。——432，①

而简单博弈只是在 n 是偶数时才存在——事实上，我们的简单博弈原型有 $n=4$（见 48.1.2 和 48.1.3）。

然而，多数这一概念很容易推广到 n 是偶数的情况。为此，我们以如下方式引入**加权多数**：赋予玩家 $1,\cdots,n$ 中的每位一个权重，如 $w_1,\cdots,w_n$。把 W 定义为这样的 S 组成的集合，S 包含总权重的多数。这意味着：

(50:1) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i,$$

或等价地说，

(50:2) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i > \sum_{i\text{属于}-S} w_i。$$

我们必须再次精心排除和局情况。然而，由于我们目前结构的更一般性，我们最好直接进行(49:W*)的全面讨论。

50.1.3　所以，我们要看一看 $w_1,\cdots,w_n$ 受到什么约束。

关于(49:W*:a)：由于我们能够说 S 因(50:2)而属于 W，所以当

(50:3) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i < \sum_{i\text{属于}-S} w_i$$

时，$-S$ 属于 W。所以，(49:W*:a)意味着，(50:2)或(50:3)成立，但永远不会同时成立。这显然意味着，永远不会有

(50:4) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i = \sum_{i\text{属于}-S} w_i,$$

等价地说，永远不会有

(50:5) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

(49:W*:b)：利用(50:1)中 W 的定义，如果 $w_i \geqq 0$，那 433

么，该条件显然得到满足。①

(49:W*:c)：利用(50:1)，显然 $I=(1,\cdots,n)$ 属于 W。对于一般 $(n-1)$ 元集 $S=I-(i_0)$，条件(50:1)表明：

$$w_{i_0} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

总之：

(50:B)　根据(50:1)或(50:2)，权重 $w_1,\cdots,w_n$ 能够用于定义一个满足(49:W*)的 W 的充分必要条件是：

(50:B:a)　对于 $i_0=1,\cdots,n$

$$0 \leqq w_{i_0} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

(50:B:b)　对于所有 $S\subseteq I$，

$$\sum_{i属于S} w_i \neq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i。$$

口头上说：一位玩家总有非负权重，但永远不会大于总权重的一半。不存在权重正好等于总权重的一半的玩家组合。②

得自 W 的简单博弈③被称为(n 个参与者，权重分别为 $w_1,\cdots,w_n$ 的)加权多数博弈。我们还将用$[w_1,\cdots,w_n]$记这个博弈。

因此，直接多数博弈的记号是$[1,\cdots,1]$。

---

① 当然，这是一个完全合理的条件。事实上，令人吃惊的事情是，我们没有被迫要求 $w_i>0$，即我们能够让某个权重等于零。——433，①

② 第一个条件排除了49.2的困难，第二个条件排除了和局。——433，②

③ 确切地说：策略等价的一类博弈。——433，③

我们将会看到,48.1.2和48.1.3中讨论的Q的角I所代表的四人博弈能够被描述为一个加权多数博弈。事实上,48.1.3中建立起来的胜利原则能够被说成,玩家1、2、3有一个相同权重,而玩家4有双倍权重。也就是说,这个博弈有记号[1,1,1,2]。

50.2 齐次性

50.2.1 多数博弈的引入及其记号$[w_1,\cdots,w_n]$是对简单博弈进行定量(数量)分类和描述的步骤之一。我们有充分理由认为,完成这一计划是最为迫切的事情:简单博弈是用组合、集合术语定义的,而且预料之中的事情是,数量描述将使它们变得容易处理。这样的描述通常有利 434
于全面定量地理解概念。另外,在我们目前的问题中,我们将最终找出数量地定义的解,从而,很有可能,一个数量特征较一个组合特征更为直接地对应着它们。

然而,这一个转变的第一步远未完成。

一方面,一个简单博弈可以有多个记号$[w_1,\cdots,w_n]$——事实上,有一个记号的每个简单博弈都有无穷多个记号。[①] 另一方面,我们根本不知道所有的简单博弈是否都有这样的记号。[②]

我们首先考虑上面提到的缺陷。由于同一简单博弈可以有若干个记号$[w_1,\cdots,w_n]$,一个自然的办法是通过

① 显然,w_i的充分小的变化不破坏(50:1)的成立,尤其是因为(50:5)被(50:B:b)排除了。——434,①

② 我们将会在53.2发现有的简单博弈没有记号。——434,②

某种方便的筛选原则从中选出特殊的一个。对这一原则的一个合理的要求是，增加 $w_1,\cdots,w_n$ 的意义和有用性。

首先，一些初步结果。条件(50:1)、(50:2)暗示我们考虑

$$(50:6)\qquad a_S = 2\sum_{i属于S} w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i属于S} w_i - \sum_{i属于-S} w_i。$$

这个 a_S 表达了联盟 S 的重要性超过其对手多少——它有多大的加权多数。下面是其直接性质：

(50:C) $\qquad a_S = -a_{-S}$。

证明：利用有关 a_S 的(50:6)的最后一个形式。

(50:D:a) $\qquad a_S>0$， 当且仅当 S 属于 W。

(50:D:b) $\qquad a_S<0$， 当且仅当 S 属于 L。

(50:D:c) $\qquad a_S=0$， 不可能。

证明：(50:D:a)的证明：这是定义。

(50:D:b)的证明：直接得自(50:D:a)和(50:C)。

(50:D:c)的证明：直接得自(50:D:a)和(50:D:b)，因为 W、L 穷尽了所有 S。它还与(50:B:b)一致。

50.2.2 现在，一个自然的想法是，对权重 $w_1,\cdots,w_n$ 进行排列，使得对于每个胜利联盟来说，保证胜利的 a_S 相同。然而，对 W 的所有 S 提出这一要求是无理的：如果 S 属于 W，那么，其真超集 T 也属于 W，而且它们可以有 $a_T>a_S$。[1] 由于这样一个 T 包含对于胜利来说不必要的玩家，将其忽略似乎是自然的事情。也就是说，我们仅仅要求，S

---

① 因此，除非对于不属于 S 的 i 来说，总有 $w_i=0$，那么，如果 $T=I\supseteq S$，那么，$a_I>a_S$。——434，③

不是 W 的其他元素的真子集,对于 W 的这样的 S 来说,a_S 是常数。用49.6.3中的术语说:我们要求 a_S 对于 W 的最 435
小元素——即 W^m 的元素——来说是常数。

相应地,我们定义:

(50:E) 如果对于 W^m 的所有 S,(50:6)的 a_S 有一个共同值,记为 a,那么,我们称权重 $w_1,\cdots,w_n$ 是齐次的。

当(50:E)成立时,我们将写 $[w_1,\cdots,w_n]_h$ 以示区别。

显然,$a>0$。一个正的公因数不影响 $w_1,\cdots,w_n$ 的显著性质,因此,在齐次权重情况下,我们能够进行最后的正规化:使 $a=1$。

让我们以如下观察结果来结束这一节,50.1.3末尾提到的博弈是齐次博弈,且因 $a=1$ 而是正规的。这些是奇数个参与者的直接多数博弈 $[1,\cdots,1]$ 和Q的角 $\mathrm{I}[1,1,1,2]$,它们能够相应地被分别写成 $[1,\cdots,1]_h$ 和 $[1,1,1,2]_h$。事实上,读者可以轻易验证,对于两种情况下的 W^m 的 S 来说,$a_S=1$。

50.3 分配的概念在求解中的更直接运用

50.3.1 上述齐次情况密切联系着分配这一普通的经济学概念。

更确切地说:我们在30.1.1中定义了一个一般的分配概念,并且以其为基础建立了解的概念。在建立这些概念时,我们受到了经济学中使用的相同判断准则的引导,因此其与普通经济学概念的联系也是预料之中的事情。然而,我们的分析使我们相当远离了那一概念。这尤其适

用于这样一些结构，当我们发现我们的理论主题是分配集——即解——而非单个分配时，这些结构是必需的。我们将看到，对于特定的简单博弈来说，其与分配的普通经济学概念的联系能够较直接地建立起来。实际上，它将提供一个简单方法，使我们找到这些博弈中每一个的一个特殊的解。

50.3.2 解的两个概念，即两种方法，有效地相互支持着。普通经济学概念对特定的解的形式提供一个有用的推测。从而，我们的数学理论可以被用于确定问题中的解，并且普通方法的条件得到完善。（见50.4和50.5。）

这些分析还有助于另一个目的：它们极为清楚地说明
436 了寻常方法的不足之处。在这一形式中，寻常方法只对简单博弈起作用。即使是在简单博弈中，我们的数学理论也并非总是无用或完全无用。另外，它并没有揭示它所分析的博弈的全部解。（进一步的讨论将对这个题目进行更多说明，特别是在50.8.2中。）

这里，我们再次强调，任何博弈都是一个可能的社会或经济组织的模型，任何解则是其中一个可能的稳定行为标准。上述方法——即没有被改进的经济学分配概念——没有包括的博弈和解对于社会或经济理论来说的确是重要的。我们将会看到，能够用这一特殊方法对付的简单博弈密切联系着齐次加权多数博弈，而齐次加权多数博弈是简单博弈的推广。

50.4 直接方法

50.4.1 考虑一个简单博弈 Γ，我们假设它有简化

型，$\gamma=1$，但是它不受其他约束。让我们试着在普通经济学概念意义上讨论这一博弈，而不使用我们的系统理论。

显然，在这一博弈中，玩家的惟一目标是建立一个联盟，而且一旦一个最小联盟建立起来，其参与者没有让更多成员加入的动机。所以，我们能够假设，最小胜利联盟——W^m 的 S——就是将会建立起来的结构。因此，我们可以合理地假设，一位玩家的命运只有两种选择机会：他要么成功加入渴望加入的联盟，要么没有。在后一种情况下，他是一个失败者，因此他得到数额 -1。在前一种情况下，他是一个胜利者，而且，按照普通经济学概念，我们应该用一个值描述这一胜利。这个值因玩家不同而不同。对于玩家 i，我们用 $-1+x_i$ 记之，这样 x_i 是对于玩家 i 而言的失败与成功之间的边际量。①

50.4.2　让我们说明这些 $x_1,\cdots,x_n$ 必须服从的条件，使之符合传统经济学论述。

首先：按照 x_i 的含义，必然有

(50:7)　　$x_i \geqq 0$。

第二：如果恰巧不存在包含特定玩家 i 的最小胜利联盟，那么，对于他来说，除了 -1 之外，没有其他选择，这样

---

① 这里，我们假设仅仅存在一种取胜的方式，即无论玩家 i 成功加入哪一个（最小胜利）联盟，边际 x_i 相同。这是合理的，因为一个简单博弈中只存在一种胜利：完全的胜利——每个联盟要么完全失败，要么完全胜利。

我们将在 50.7.2 和 50.8.2 中看到，这一观点将在多大程度上发挥作用。只要它起作用，我们就能够方便地将其与我们的系统理论结合起来。——436，①

我们没有必要为其定义一个 x_i。①

437 第三：如果一个最小胜利联盟 S 变成了有效集，那么，这些玩家中间的分配是：不属于 S 的每位玩家 i 得到 -1，属于 S 的每位玩家得到 $-1+x_i$。这些数额之和必须等于零。这意味着，

$$0=\sum_{i\text{不属于}S}(-1)+\sum_{i\text{属于}S}(-1+x_i)=-n+\sum_{i\text{属于}S}x_i,$$

即

$$(50:8)\qquad \sum_{i\text{属于}S}x_i=n。$$

在我们的符号体系中，这个分配被描述为向量 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_i\}$，它的分量是

$$\alpha_i=\begin{cases}-1 & i\text{不属于}S,\\ -1+x_i & i\text{属于}S。\end{cases}$$

我们用 $\vec{\alpha}^S$ 记这个向量。事实上，我们的起始条件和目前这一条件等于说，$\vec{\alpha}^S$ 是 30.1.1 意义上的一个分配。

50.4.3 按照常有的思路，我们接下来要借助上面的三项说明来确定 $x_1,\cdots,x_n$。在这么做时，我们还必须考虑到：我们已经从第三项说明开始了，其中的 S 必须是最小胜利联盟，即属于 W^m。然而，一个可能的问题是，是否 W^m 的所有 S 都能够被使用呢？

事实上，目前的方法无非是常见的价值分配方法，即按照机会用途赋予补充物品相应的价值。② 现在，机会用

---

① 对于真正简单博弈来说，这样的 i 不存在，即每位玩家属于某个最小胜利联盟。见 51.7.1 中的初步结果和(51:0)。——436，②

② 在这种情况下，说服务较为恰当。我们的分析对象是玩家 i 向其加入的联盟贡献的总服务。——437，①

途可能比不同物品的个数还要多，即 W^m 可能有 n 个以上元素。①

然而，显然的一点是，如果 W^m 的 S 不被包括其中，即如果

$$\sum_{i \text{属于} S} x_i = n \tag{50:8}$$

对于它来说不成立，那么，它必定是无利可图的。也就是说，在(50:8)中，我们必定有一个 > 来取代 = ： 438

$$\sum_{i \text{属于} S} x_i > n。 \tag{50:9}$$

进而出现的一个问题是：我们按照什么准则来确定 W^m 的哪个 S 符合第三项说明即(50:8)成立。记这些集合组成的集合为 $U(\subseteq W^m)$。那么，对于 $W^m - U$ 的 S 来说，(50:9)必定成立。这样，我们的问题变成了确定 U。②

50.5　与一般理论的联系：严格阐述

50.5.1　让我们回到我们的系统化理论，而不仅仅满足于口头描述。根据 50.4 中的说明，我们继承如下结果：考虑最小胜利联盟组成的一个系，即一个集合 $U \subseteq W^m$ 和 x_i。如 50.4 中那样，构造分配

$$\vec{\alpha}^S = \{\alpha_1^S, \cdots, \alpha_n^S\}。$$

$$\alpha_i^S = \begin{cases} -1, & i \text{不属于} S \\ -1 + x_i, & i \text{属于} S \end{cases}, \quad S \text{属于} U。$$

---

① 见 53.1 中的第四项说明。——437，②

② 试图用(50:9)来确定 $W^m - U$(和 U)的想法是十分错误的。这样的话，$x_1, \cdots, x_n$ 就没有受到充分约束且它们确定不是真正的目标！——438，①

S 属于 U 时，这些 $\vec{\alpha}^S$ 的确是分配。如我们所知，这一点正是 50.4 的条件所表达的。

(50:7) $$x_i \geqq 0,$$

(50:8) $$\sum_{i\text{属于}S} x_i = n, \quad S\text{属于}U。$$

构造 $\vec{\alpha}^S$ 的集合 V，S 属于 U。我们将决定 U 和 x_i 是否令人满意。我们的做法是确定这个 V 是否是 30.1.1 意义上的一个解。

我们将看到，以这种方式得到的结果可用文字表述，而且从普通的经济学角度看，该结果是完全合理的。但是，可能成问题的是，它能否通过常用的方法毫不含糊地建立起来。这也许是我们的数学理论能够成为普通经济学方法的纯粹口头讨论的先导的一个例子（见 50.7.1）。

50.5.2 我们继续研究 V 是否是一个解。

我们要首先确定，在什么情况下，一个给定的分配 $\vec{\beta}$ 被一个给定的 $\vec{\alpha}^T$ 占优，其中 T 属于 U。由于该博弈是一个
439 简单博弈，对于这一占优关系来说，30.1.1 的集合 S 能够被假设得属于 W[根据 49.7.2 中的（49:I）或（49:J），甚或属于 W^m]。对于 S 中的每个 i，$\alpha_i^T > \beta_i \geqq -1$；对于不属于 T 的每个 i，$\alpha_i = -1$：所以 $S \subseteq T$。现在，T 属于 $U \subseteq W^m$，S 属于 W，从而 $S \subseteq T$ 给出 $S = T$。而且，T 能够在那里得到应用，因为它是肯定必要集，它属于 $U \subseteq W^m \subseteq W$，见上。所以占优关系 $\vec{\alpha}^T \succ \vec{\beta}$ 等于说：$\alpha_i^T > \beta_i$，i 属于 T，即

(50:10) $$\beta_i < -1 + x_i \quad i\text{属于}T。$$

对于任意分配 $\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，用 $R(\vec{\beta})$ 记满足

(50:11)　　　　$\beta_i \geqq -1 + x_i$

的 i 组成的集合。那么,(50:10)表明,$R(\vec{\beta})$ 与 T 不相交。这一关系的另外一个表达方式是

(50:12)　　　　$-R(\vec{\beta}) \supseteq T$。

我们重述为:

(50:F)　　　　$\vec{\alpha}^T \succ \vec{\beta}$ 等价于(50:12)。

我们能够从这一结果中推出:

(50:G)　　　　令 U^* 是这样的 $R(\subseteq I)$ 组成的集合,R 的某个子集属于 U。

令 U^+ 是 $-R$ 不属于 U^* 的 $R(\subseteq I)$ 组成的集合。

那么,$\vec{\beta}$ 不被 V 的任何元素占优的充分必要条件是 $R(\vec{\beta})$ 属于 U^+。

证明:如果 $\vec{\beta}$ 被 V 的某个元素——即被某个 $\vec{\alpha}^T$,T 属于 U——占优,那么,(50:12)对 U 中任何 T 都成立。这等于说,$-R(\vec{\beta})$ 属于 U^*,即 $R(\vec{\beta})$ 不属于 U^+。

所以,$R(\vec{\beta})$ 属于 U^+ 的充分必要条件是,$\vec{\beta}$ 不被 V 的任何元素占优。

50.5.3　在进一步深入讨论之前,我们考察(50:G)的集合 U^+ 的四个简单性质。

(50:H:a)　　　　如果 $U = W^m$,那么,$U^* = U^+ = W$。

证明:假设 $U = W^m$,那么,U^* 由这样一些集合组成,它们有某个子集属于 W^m,即一个最小胜利子集。因此,$U^* = W$。(50:G)中从 U^* 到 U^+ 的运算是48.2.1中的变换

(48:A:a)和(48:A:b)的组合。这样，我们看到，当应用于
440 W 时，这两个变换是互补的。所以，$U^* = W$ 给出 $U^+ = W$。

(50:H:b)　　U^* 是一个单调运算且 U^+ 是一个反单调运算，即如果 $U_1 \subseteq U_2$，那么，$U_1^* \subseteq U_2^*$ 且 $U_1^+ \supseteq U_2^+$。

证明：只需回忆(50:G)中的定义，我们就可以看出，$U_1 \subseteq U_2$ 意味着 $U_1^* \subseteq U_2^*$ 且 $U_1^+ \supseteq U_2^+$。

(50:H:c)　　所有 $U \subseteq W^m$ 都有 $U^* \subseteq W \subseteq U^+$。

证明：这是(50:H:a)与(50:H:b)的结合(用 U、W^m 取代 U_1、U_2)。

(50:H:d)　　U^* 和 U^+ 都包含它们的元素的超集。

证明：对于 U^* 来说，这是显然的。我们正在考虑的性质正是 48.2.1 中的(48:A:c)中阐述的性质。(那里的 W 取代了我们的 U^* 和 U^+。)现在，(50:G)中从 U^* 到 U^+ 的运算是 48.2.1 中变换(48:A:a)和(48:A:b)的组合[见(50:H:a)的证明]。把 48.2.2 中的(48:B)应用于这两个变换表明，从 U^* 到 U^+ 的过渡中，问题中的性质得以保留。

50.5.4 注意，U^* 和 U^+ 允许一个简单的口头解释。如果我们知道只有属于 U 的联盟才有可能是胜利联盟，那么，其中哪些肯定是胜利联盟，哪些是肯定不失败的联盟呢?

前者是这样一种情况，该联盟有属于 U 的子集，即 U^* 那些元素。肯定失败的联盟是这些联盟的补集，即不属于 U^+ 的那些联盟的补集。所以，U^* 是首先提到的联盟组成的集合，而 U^+ 则是后面提到的联盟组成的集合。

现在，(50:H:a)—(50:H:c)的含义变得清楚了：对于 $U = W^{m}$，一切都是清楚的：肯定胜利联盟恰恰是这样一些联盟，它们不是肯定失败的联盟，而且它们形成集合 W。随着 U 从 W^{m} 变小，差距变大。第一个集合通过 W 的子集变小，第二个集合通过 W 的超集变大。

(50:H:d)的断言同样是合理的。

50.6　结果的重新描述

50.6.1　50.5.2 的(50:G)允许我们给出如下陈述：

(50:I)　　V 是一个解的充分必要条件是，当 $\vec{\beta}$ 属于 V 时，恰好有 $R(\vec{\beta})$ 属于 U^{+}。

这样，我们必须决定的只是什么时候(50:I)成立。为此，我们考虑 U^{+} 中的一个 R 并确定 $R(\vec{\beta}) = R$ 的 $\vec{\beta}$。

考虑如下三种可能性：

$$(50:13)\qquad \sum_{i\text{不属于}R}(-1) + \sum_{i\text{属于}R}(-1 + x_i) \gtreqless 0,$$

即 441

$$(50:14)\qquad \sum_{i\text{属于}R} x_i \gtreqless n。$$

如果存在一个满足 $R(\vec{\beta}) = R$ 的 $\vec{\beta}$，那么，我们有

$$(50:15)\qquad 0 = \sum_{i=1}^{n}\beta_i \geqq \sum_{i\text{不属于}R}(-1) + \sum_{i\text{属于}R}(-1 + x_i),$$

即(50:13)，(50:14)中有≦。所以，(50:13)和(50:14)中

的 > 排除了满足 $R(\vec{\beta})=R$ 的 $\vec{\beta}$ 的存在性。也就是说，我们不必进一步考虑 U^{+} 中满足(50:13)和(50:14)中 > 的集合 R。另一方面，考虑 U^{+} 中一个满足(50:13)和(50:14)中 < 的集合 R。那么，满足 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$ 且 $\beta_i \geqq \left\{\begin{matrix} -1, & i \text{不属于} R \\ -1+x_i, & i \text{属于} R \end{matrix}\right\}$ 的 $\vec{\beta}$ 有无穷多。对于这些 $\vec{\beta}$，必然有 $R(\vec{\beta}) \supseteq R$。所以，根据(50:H:d)，它属于 V。由于 V 是有限的，这些 $\vec{\beta}$ 不能都属于 V。这是一个矛盾。也就是说，U^{+} 中满足(50:13)和(50:14)中的 > 的集合 R 绝对不存在。

50.6.2 接下来，我们要考虑的是 U^{+} 中满足(50:13)和(50:14)中 = 的集合。根据上面的分析，这些集合必须恰好提供 V 的 $\vec{\beta}$。

如果这些 $\vec{\beta}$ 属于 V，即 $\vec{\beta}=\vec{\alpha}^{T}$，$T$ 属于 U，那么，我们有这样的情况：$R(\vec{\beta})$ 等于 T 加上 $x_i=0$ 的那些 i 组成的集合。T 属于 $U \subseteq U^{*} \subseteq U^{+}$［对第二个关系利用(50:H:c)］，所以 $R(\vec{\beta})$ 属于 U^{+}。还有，

$$\sum_{i\text{属于}R(\vec{\beta})} x_i = \sum_{i\text{属于}T} x_i = n。$$

这样，我们有(50:13)和(50:14)中的 =。所以，V 的 $\vec{\beta}$ 都被考虑到了。

相反：考虑 U^{+} 中一个满足(50:13)和(50:14)中 = 的 R。给 R 添加 $x_i=0$ 的 i，［根据(50:H:d)］既不影响 R 属于 U^{+}，也不影响方程(50:14)。所以，我们可以假设 R 包含这些 i。

如果一个分配 $\vec{\beta}$ 有 $R(\vec{\beta})=R$，那么，对于 R 中的 i，$\beta_i \geqq -1+x_i$。$\beta_i \geqq -1$ 总是成立。因为 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$，这意味着：

$$(50:16)\qquad \beta_i=\begin{cases}-1, & i \text{不属于} R\\ -1+x_i, & i \text{属于} R\text{。}\end{cases}$$

相反：(50:16)意味着，$\vec{\beta}$ 是一个满足 $R(\vec{\beta})=R$ 的分配。 442
所以，在这种情况下，我们必须要求，(50:16)的 $\vec{\beta}$ 是一个 $\vec{\alpha}^T$，T 属于 U。这意味着，T 和 R 的不同仅仅在于 $x_i=0$ 的元素 i 的不同。而且，这一性质对我们最初关于 R 的修改——把所有这样的 i 包含在 R 之中——并不敏感。

总之：

(50:J)　　V 是一个解的充分必要条件是：当 $x_i=0$ 时，称 i 是无所谓的。①

从而，对于 U 的 T 以及与之仅仅相差无差异元素的集合，我们有

$$(50:8^*)\qquad \sum_{i\text{属于}T} x_i = n$$

而且，对于 U^* 的其他 T，我们必须要求

---

① 这些 i 带来少许复杂性，这一复杂性又因我们还没有它们实际发生的博弈例子而增大。也可能，它们从来就不存在。一个无所谓的 i 描述的是这样一位玩家，他属于某个最小胜利联盟，但是他从不分享联盟的成果。

三人博弈的有歧视解中被排斥的玩家就处于这种情况。[见 32.2.3 中的(32:A)，其中，$c=1$。]但是，那个解是一个无穷解，而我们这里的 V 必须是有限的。

决定这个有关存在性的问题是有意义的。无论如何，我们必须考虑到无所谓的 i，以免失去一般性或严密性。——442，①

$$(50:9^*) \qquad \sum_{i属于T} x_i > n。$$

在应用这一结果时,我们可以首先选择集合 $U \subseteq W^m$,然后根据(50:8*)确定 x_i,并最终验证这些 x_i 是否满足不等式

$$(50:7) \qquad x_i \geqq 0$$

和(50:9*)。

50.7 结果解释

50.7.1 结果(50:J)允许我们给出在 50.5.1 中许诺的口头解释。这个解释是:

通过随意选择那些被认为是有利可图的最小胜利联盟所组成的集合 U(即 $U \subseteq W^m$),一个解 V 被找到。x_i 必须满足相应的方程(50:8*)。但此后,我们必须验证,特定的其他联盟从(50:9*)意义上说肯定是无利可图的。
443 对于那些已知会取胜的联盟和那些无法证明肯定会被 U(即 U^+)的联盟打败的那些联盟——当然,U 本身例外[①]——来说,我们都有这一要求。

读者可以根据这一说明来判断 50.5.1 的总结说明是否合理。

50.7.2 为(50:I)找出合适的 U 是一个精妙的问题。U^+ 的反单调性[见 50.5.3 中的(50:H:b)]表明:逐步变小的 U,即等式的个数,使 U^+ 变大,即不等式的个数增加,反之亦然。

尤其是,如果我们把 U 选择得尽可能大,即 $U = W^m$,那

---

① 以及那些与它们仅仅相差无所谓元素的那些联盟。——443,①

么，与 U^{+} 有关的不等式根本不造成任何困难。事实上：根据50.5.3中的(50:H:a)，$U = W^{m}$ 意味着 U^{v}。W 的一个 T 肯定有一个子集 S，S 是 W 中最小的，即属于 $U = W^{m}$。现在，如果 T 与这个 S 的不同并不限于无差异元素，那么，对于 $T-S$ 中的某个 i，$x_i > 0$，从而 $\sum_{i属于T} x_i > \sum_{i属于S} x_i = n$，即(50:9*)。

因此，方程(50:8*)能够(结合(50:7)求解，那么，$U = W^{m}$ 总给出一个解V。

但是，正如我们在50.4.3中指出的那样，我们不能指望情况总是这样，尤其因为(58:8*)那样的方程的个数(即 W^{m} 中元素的个数)很可能比变量 x_i 还要多。

最后一个反对意见并不是绝对的。事实上，不难找到一个简单博弈，这些方程的个数超过变量的个数，但是解还是存在着的。① 另一方面，存在着这样的简单博弈，这些方程没有解。这种情况的一个例子较为隐蔽②，但是，该现象还是比较一般的。当这样的事情发生时，我们必须研究的一个问题是，是否能够通过适当选择 $U \subset W^{m}$ 来找到一个解V呢？我们在本节开头就对这一问题之困难和精妙做了评论。③

---

① 这种情况最初出现在 $n=5$ 的时候，见53.1中的第五项说明。——443，②

② 这种情况首先出现在 $n=6$ 的时候，见53.2.5中的第五点说明。——443，③

③ 我们还没有这样的例子：一个简单的一个解得自 $U \subset W^{m}$，但是也没有证明它不存在。一个进一步的问题是，是否每个简单博弈都有适当的 $U \subseteq W^{m}$ 的解呢？这个问题现在也没有答案。

这个问题具有一定的重要性。要解决它并不容易。它有点类似于第154页脚注①中提到的已解决的问题，但利用这种联系目前尚不可能。——443，④

50.8 与齐次多数博弈的联系

50.8.1 现在,我们的讨论仅限于 $U = W^m$ 的情况。也就是说,我们假设全部方程系统

(50:17) $$\sum_{i\text{属于}S} x_i = n, \quad S\text{ 属于 } W^m,$$

能够结合

(50:7) $$x_i \geqq 0$$

444 求解。我们看到,在这种情况下,对于属于 W^m 的 S,$\overrightarrow{\alpha}^S$ 组成的集合 V 是一个解。在这种情况下,且只有在这种情况下,我们称 V 是一个**主简单解**。

这些条件与描述一个齐次加权多数博弈的条件之间有一定的相似之处。事实上,后者被界定为

(50:18) $$\sum_{i\text{属于}S} w_i = b, \quad S\text{ 属于 } W^m$$

其中

$$b = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i + a\right), \quad a > 0,$$

[结合 50.2 的(50:D),(50:E)]

而且,

(50:19) $$w_i \geqq 0\text{。}$$

实际中,存在着更多相似性。因此,如果满足(50:18)和(50:19)的 w_i 的一个系被给定,满足(50:17)和(50:7)的 x_i 的一个系以如下方式得到:(50:18)的数量 b 是正的。① 用一个正的因数乘以所有的 w_i 并不影

① 不然的话,按照(50:18)和(50:19),出现在 W^m 的 S 中的所有的 i 就会有 $w_i = 0$。这样的话,对于 W^m 的 S,50.2.1 的(50:6)和(50:19)给出 $a_S \leqq 0$,矛盾。——444,①

响任何事情，而且通过把这个因数选择为 n/b，我们能够用 n 取代(50:18)中的数量 b。现在，令 $x_i \equiv w_i$，我们就简单地把(50:18)、(50:19)变成了(50:17)、(50:7)。

相反，如果满足(50:17)和(50:7)的 x_i 的一个系被给定，存在着一个额外的困难。我们可以令 $w_i \equiv x_i$①，那么，(50:7)变成了(50:19)且(50:17)产生(50:18)，有着 $b=n$，即 $a = 2n - \sum_{i=1}^{n} w_i$。但是，这里出现的问题是，$a>0$ 这一最后要求是否得到满足，即

(50:20) $$\sum_{i=1}^{n} < 2n$$

是否成立。

总之：

(50:K) 每一个齐次加权多数博弈都有一个主简单解。

相反，如果一个（简单）博弈有一个主简单解，对于这个博弈，从中得出齐次权重的充分必要条件是，(50:20)得到满足。

50.8.2 齐次权重与主简单解之间的这一联系是显著的。但是，我们必须强调的一点是，一个齐次加权

① 属于最小胜利集合的 i 引起一个小的骚动，因为它们没有 x_i（见 50.4 中的第二点说明），然而我们却要求它们有 w_i。这一意外情况并非完全不重要（见上），而且，如我们轻易地从第 436 页脚注②得出的结论那样，我们能够令这些 $w_i=0$。——444，②

445 多数博弈一般来说不同于主简单解的其他解。[1] 而且，一个有主简单解的博弈有可能不满足(50:20)，即

$$(50:21) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2n$$ [2]

中未必有 <。

最后，我们决不能忽视这些分析的主要缺陷：不管我们取 50.8.1 的狭义形式的“普通”分配概念（即 $U = W^m$），还是取 50.6、50.7.1 的其较宽泛的最初形式[即 $U \subseteq W^m$，见 50.6.2 中的(50:I)]，它都肯定被限于简单博弈。我们要超越这一点，超越这里描述的狭义解。这迫使我们完全回到 30.1.1 的系统化理论。这是我们在 50.3 末尾指出过的。

51. 全部简单博弈的枚举方法

51.1 概论

51.1.1 从 50.1.1 开始，我们引入了简单博弈，它们

---

① 本质三人博弈（$[1,1,1]_h$，见 50.2 末尾）的主简单解是 29.1.2 的最初解，即 32.2.3 的(32:B)。32.2.3 和 33.1 告诉我们，其他解是存在的。

Q（$[1,1,1]_h$，见 50.2 末尾）的角 I 的主简单解是 35.1.3 的最初解。我们将在第 55 节结合更为一般的$[1,\cdots,1,n-2]$（n 个参与者）讨论这一博弈，并得出所有的解。

所有这些引证弄清楚了的一点是，不是主简单解的解是相当显著的，见 33.1 和 54.1。——445，①

② = 首次出现在 $n=6$ 的时候，见 53.2.4 的第四点说明。> 首次出现在 $n=6$ 或 7 的时候，见 53.2.6 的第六点说明。

这些例子本身也都是相当有意思的。——445，②

允许我们用数字准则来描述,而不是最初的集合论描述(见 50.2.1)。然而,我们看到,这些数字方法能够有多种方式,而且,我们无法肯定所有简单博弈都能够借助这些方法来求解。因此,我们要设计组合论的(集合理论的)方法以系统地枚举全部简单博弈。

事实上,为了理解各种简单博弈,尤其为了弄明白上述数字方法能够带领我们走多远,系统地枚举简单博弈是必不可少的。我们将会看到,只有对于相对大的玩家个数,不那么明显可能的关键例子才会存在①,所以轻描淡写的口头分析不可能十分有效。

51.1.2 我们在 49.6.3 末尾指出过,全部简单博弈的枚举等价于它们的集合 W 的枚举,即 49.6.2 中满足(49:W*)的集合 W 的枚举。那里,我们还注意到,一个方便的做法是用 W^m(全部最小胜利联盟)取代 W(全部胜利联盟)。

两者都提供全部简单博弈的一个枚举。从概念上说,W 的使用较好,因为 W 有一个较简单的定义,而 W^m 是借 446
助 W 间接地引入的。就全部简单博弈的实际枚举——我们的当前的目标——而言,W^m 的使用更好,因为 W^m 是一个比 W 小的集合②,从而更容易描述。

我们将依次给出两种方法。你将看到,这些讨论提供了 30.3 中引入的饱和性和饱和概念的自然应用。

---

① $n=6,7$,见 53.2。——445,③

② W、L 是不相交的。根据 48.2.1 中的(48:A:b),它们有相同个数的元素。合起来,它们穷尽 $\bar{I}$ 的 2^n 个元素。因此,W 和 L 都有 2^{n-1} 个元素。W^m 的元素个数是不确定的,但它总是小得多(见 53.1 的第四点说明)。——446,①

51.2 饱和法:借助 W 来枚举

51.2.1 集合 W 由 49.6.2 中的(49:W*)描述,即由(49:W*)中的条件(49:W*:a)—(49:W*:c)描述。

让我们暂时忽略(49:W*:c),只考虑(49:W*)和(49:W*:c)。这两个条件意味着,W 中不存在两个不相交的元素。[①] 换句话说:用 $S\mathscr{R}_1T$ 记二者不相交,即 $S\cap T\neq\ominus$ 的否定。(49:W*:a)和(49:W*:b)意味着 $\mathscr{R}_1$ 满足。[②] 按照这一思路,一个较为严格的说法是:

(51:A) (4:W*:a)和(49:W*:b)等价于 $\mathscr{R}_1$ 饱和。[③]

证明:W 的 $\mathscr{R}_1$ 饱和意味着:

(51:1) S 属于 W 的充分必要条件是,对于 W 的所有 T,$S\cap T\neq\ominus$。

(49:W*:a)和(49:W*:b)意味着(51:1):令 W 满足(49:W*:a)和(49:W*:b)。如果 S 属于 W,那么,我们知道,对于 W 的所有 T 来说,$S\cap T\neq\ominus$。如果 S 不属于 W,那么,根据(49:W*:a),$T=-S$ 属于 W 且 $S\cap T=\ominus$。

(51:1)意味着(49:W*:a)和(49:W*:b):令 W 满足(51:1)。我们以相反的顺序证明(49:W*:a)和(49:W*:b)。

(49:W*:b)的证明:如果 S 满足(51:1)的准则,那

---

① 证明:令 S、T 属于 W,$S\cap T=\ominus$,那么,$-S\supseteq T$,从而,根据(49:W*:b),$-S$ 属于 W,这违背(49:W*:a)。——446,②

② 见 30.3.2 的定义。——446,③

③ 同上。——446,③

么，S 的每个超集也满足。所以，W 包含其元素的超集。

(49:W*:a) 的证明：根据上面的论述，$-S$ 不属于 W 的充分必要条件是，$-S$ 的子集都不属于 W，W 的每个 T 不属于 $-S$，或对于 W 的每个 T，$S\cap T\neq\ominus$。根据 (51:1)，这恰好意味着，S 属于 W。

因此，无论如何，S 和 $-S$ 之中恰好有一个属于 W。

$S\mathscr{R}_1T$ 显然是对称的，因此，我们能够应用 30.3.5 中的 (30:G)。[①]

51.2.2 为了在此基础上讨论 (49:W*)，我们必须考虑 (49:W*:c)。我们能够以两种方式做到这一点。第一种方式有益于以后的比较。 447

(51:B)　　W 满足 (49:W*) 的充分必要条件是，它是 $\mathscr{R}_1$ 饱和的，且既不包含空集，也不包含一元集。

证明：(49:W*) 是 (49:W*:a)、(49:W*:b) 和 (49:W*:c) 的合取。根据 (51:A)，前两个等于 $\mathscr{R}_1$ 饱和。假设 (49:W*:a) 成立，(49:W*:c) 可以被表述为：如果 S 是 I 或一个 $(n-1)$ 元集合，那么，$-S$ 就不属于 W。也就是说：$\ominus$ 和一元集都不属于 W。

第二种方式更为直接有用。

令 V_0 是 (49:W*:c) 的所有集合——即 I 和 I 的所有

---

① 你会回忆起，我们还在 30.3.5 中假设了 $x\mathscr{R}x$ 一般成立，即这里的 $S\mathscr{R}_1S$ 一般成立。这意味着 $S\neq\ominus$，因此，对于 $S=\ominus$，$S\mathscr{R}_1S$ 不成立。

然而，(49:W*:a) 和 (49:W*:c) 把 $\ominus$ 从 W 中排除，所以，我们可以使用 30.3.2 意义上的值域 D，而不用 $\dot{I}$（I 的全部子集的系），它等于 $\dot{I}-(\ominus)$（I 的非空子集的系）。这使我们避开了 $S=\ominus$。——446，④

$(n-1)$元子集——的系，那么，我们有：

(51:C) V是满足(49:W*:c)的一个W的一个子集，充分必要条件是，$V\cup V_0$是$\mathscr{R}_1$满足的。

证明：$W\supseteq V$且W满足(49:W*)等于说：$W\supseteq V$，W满足(49:W*:a)和(49:W*:b)——即根据(51:A)，W是$\mathscr{R}_1$饱和的，即$W\supseteq V_0$。换句话说：我们正在寻找一个$\mathscr{R}_1$饱和的$W\supseteq V\cup V_0$，即我们正在探索$V\cup V_0$是否能够扩展为一个$\mathscr{R}_1$饱和集。

现在，我们知道，30.3.5的(30:G)适用，从而30.3.5的最后一部分分析也适用。[①] 这一可扩展性等价于$V\cup V_0$的$\mathscr{R}_1$满足。

51.2.3 我们把(51:C)更为明确地重述如下：

448 (51:D) V是满足(49:W*)的一个W的一个子集，充分必要条件是，它有如下性质：

(51:D:a) V中不存在不相交的两个S、T。

(51:D:b) V既不包含$\ominus$[②]，也不包含一元集。

证明：根据(51:C)，我们必须表明$V\cup V_0$的$\mathscr{R}_1$满足性，即V或V_0中不存在不相交的两个集合S、T。

S、T都属于V：这与(51:D:a)一致。

S、T都属于V_0：两者都有$\geqq n-1$个元素，从而，它们不可能不相交。[③]

---

① 注意：值域$D=\bar{I}-(\ominus)$(见第446页脚注④)是有限的。——447，①

② 关于这一点，见第446页脚注④。——448，①

③ 我们正在利用$2(n-1)>n$，即$n>2$，即$n\geqq3$。这一点应该在一开始的时候就明确说明。不过，这也是一个自然的假设，因为简单博弈[即满足(49:W*)的集合]只有在$n\geqq3$的时候才存在。(见49.4和49.5。)——448，②

S 和 T 之中的一个属于 V 且另一个属于 V_0：根据对称性，我们可以假设 S 是前者，T 是后者。这样，V 的 S 决不可能不与 I 或任一（$n-1$）元集相交。这正是（51：D：b）。

（51：D）解决了枚举全部 W 的问题：从任意一个满足（51：D：a）和（51：D：b）的 V 开始①，我们可以将其逐步扩大，直至（51：D：a）和（51：D：b）被违背为止。当这一过程无法继续进行的时候，那么，我们有一个 V，它是 W 的满足（49：*）的最大子集，即我们有一个这样的 W。

在以各种方式进行的这一逐步建立过程中，我们得到问题中所有的 W。

读者可以就 $n=3$ 或 $n=4$ 尝试一下这一过程。你会看到，即便是对于不大的 n，这个过程也相当繁琐，尽管原理上它是严格的并覆盖所有的 n。

51.3　从 W 到 W^m 的理由：使用 W^m 的困难

51.3.1　让我们考虑 49.6 的集合 W^m。

我们希望直接描述这些 W^m，并找到某个简单过程来构造其全部。下面，我们将推出两种不同方法，两者都属于饱和法。第一个方法借助于一个非对称关系，而第二个方法借助于一个对称关系。因此，适合我们的构造目的的是第二个方法，并与 51.2 中 W 的构造类似。

---

① 原理上，我们可以从一个空集开始。读者将会看到，把⊖从 V 中排除（见上）并不影响 $V=$⊖的可能性。——448，③

不过，我们将给出两种描述，因为这一等价性是相当有启发意义的：第一个方法在某些（技术）方面类似于一个解的定义（见 30. 3. 3 和 30. 3. 7），从而，从第一个向第二个等价形式的过渡是有意义的，因为它指出了解决这类问题的方法。我们已经在前面（30. 3. 7 中）提到过对于我们的解的概念来说，这一过渡是多么的重要。

51. 3. 2 设 W 是一个系，它包含其元素的所有超集：例如，满足（49：W*：b），那么，其最小元素 W^m 组成的系决定着 W：事实上，W 显然是 W^m 的元素的超集组成的系。

因此，如果一个系 V 被给定，且我们正在寻找一个满足（49：W*）的 W，使得 $V = W^m$ 成立，那么，这个 W 必定是 V 的所有元素的超集组成的系 $\tilde{V}$。

因此，对于一个满足（49：W*）的 W 来说，$V = W^m$ 的充分必要条件是 $W = \tilde{V}$ 满足这两个条件。[1] 接下来，我们把 $V = W^m$ 的描述方式转变为饱和型的描述方式。

用 S$\mathscr{R}_2$ 记 $S \cap T = \ominus$ 和 $S \supset T$ 都不成立。那么，我们有：

（51：E） 对于一个满足（49：W*）的 W，$V = W^m$ 的充分必要条件是，V 是 $\mathscr{R}_2$ 饱和的且既不包含 $\ominus$，也不包含任何一元集。

证明：根据上面的分析，我们只须研究 $W = \tilde{V}$ 是否有要求的性质：

---

① 即 $W = \tilde{V}$ 是惟一能够满足这些条件的系，但它也可能不满足这些条件。——448，④

$V=W^m$：令 S 是这个 W 的一个最小元素。那么，对于 449
V 的某个 T 来说，$S\supseteq T$。所以，T 属于 W，从而 S 是 W 的最小元素排除了 $S\supset T$。故，$S=T$，即 S 属于 V。

这样，需要讨论只是相反的性质：是否 V 的每个 S 都真的是 W 的最小元素。V 的任一 S 显然都属于 W，所以，最小意味着不可能有 $S\supset T'$ 且 T' 是 W 的元素，即不可能有 $S\supset T'\supseteq T$ 且 T 是 W 的元素。这意味着不可能有 $S\supset T$，T 是 V 的元素。反过来（令 $T'=T$），不可能有 $S\supset T$ 且 T 是 V 的元素则意味着 S 是 V 的最小元素。所以，我们有如下条件：

(51:2)　　对于 V 中的 S、T，永远不会有 $S\supset T$。

W 满足(49:W^*)：我们必须分别考虑(49:W^*:a)、(49:W^*:b)和(49:W^*:c)，但顺序上有所不同。

(49:W^*:b)的证明：显然，$W=\tilde{V}$ 包含其元素的所有超集，所以这一条件自动得到满足。

(49:W^*:c)的证明：设(49:W^*:a)成立。（见下。）那么，(49:W^*:c)可以被表述为：如果 S 是 I 或一个 $(n-1)$ 元集，那么 $-S$ 就不属于 W。也就是说，$\ominus$ 和一元集都不会属于 W，即这些集合的子集都不属于 V。这样，我们有

(51:3)　　$\ominus$ 和一元集都不属于 V。

(49:W^*:a)：我们分两部分分析：

S' 和 $-S'$ 不会都属于 W：即如果 S、T 属于 V，那么，我们不可能有 $S\subseteq S'$，$T\subseteq -S'$。现在，这一个 S' 的存在性意味着，$S\cap T=\ominus$，而且（令 $S'=S$），$S\cap T=\ominus$ 也意味着 S' 的存在性。这样，我们有：

(51:4)　　对于 V 中的 S、T，永远不可能有 $S\cap T=\ominus$。

S 和 $-S$ 之一必定属于 W:假设 S 和 $-S$ 都不属于 W，那么，这意味着 V 中不存在 T 使 $T\subseteq S$ 或 $T\subseteq -S$，后者意味着 $S\cap T=\ominus$。也就是说，V 中不存在 T 使 $T=S$ 或 $S\supset T$ 或 $S\cap T\ominus$。或者说：S 不属于 V 且 V 中不存在满足 $S\mathscr{R}_2T$ 的否定的 T。①

也就是说，S 不属于 V，但 $S\mathscr{R}_2T$ 对 V 中所有的 T 成立。

现在，我们不得不说，这是不可能的：即

(51:5) 如果 $S\mathscr{R}_2T$ 对 V 的所有 T 成立，那么，S 属于 V。

这样，(51:2)—(51:5)正是我们要找的准则。

现在，(51:2)和(51:4)能够被结合起来：$S\mathscr{R}_2T$ 对 V 的所有 S 和 T 成立。即

(51:6) 如果 S 属于 V，那么，对于 V 的所有 T，$S\mathscr{R}_2T$。

(51:5)和(51:6)恰好表达的是 V 的 $\mathscr{R}_2$ 饱和。所以，这与(51:3)合起来形成该准则，而且这恰好是我们要证明的。

(51:E)是有意义的，因为它与(51:B)完全相似。W 与 $W^{''}$ 的不同仅仅在于我们用

$$S\mathscr{R}_2T:S\cap T=\ominus\text{和 }S\supset T\text{ 都不成立}$$

取代了

450 $$S\mathscr{R}_1T:S\cap T=\ominus\text{不成立。}$$

但是，由于我们用不对称的 $\mathscr{R}_2$ 取代了对称的 $\mathscr{R}_1$，我们无

① 这实际上是 $S\supset T$ 或 $S\cap T=\ominus$。——449，①

法再像(51:B)——或(51:A)——中那样利用(51:E)。

51.4　改变后的方法:借助 W^m 的枚举

51.4.1　现在,我们转向第二种方法,即分析如下问题:给定一个系 V,对于一个满足(49:W*)的 W 来说,$V\subseteq W^m$ 意味着什么呢?

$V\subseteq W^m$ 的含义是:V 的每个 S 是 W 的一个最小元素。也就是说,这样一个 S 必须属于 W,但其真子集决不能属于 W。由于 W 满足(49:W*),即包含其元素的超集,我们只要就 S 的最大真超集——即,对于 $S-(i)$,i 属于 S——这么说也就够了。由于 W 满足(49:W*:a),我们可以说 $-[S-(i)]=(-S)\cup(i)$ 属于 W,而不说 $S-(i)$ 不属于 W。这样,我们看到:

(51:F)　$V\subseteq W^m$[W 满足(49:W*)]恰好意味着:对 V 的每个 S,S 属于 W;而且对于 S 的每个 i,$(-S)\cup(i)$ 属于 W。

接下来,我们要证明的是:

(51:G)　V 是一个满足(49:W*)的 W 的 W^m 的子集,当且仅当它有如下性质:

(51:G:a)　V 中不存在不相交的两个 S、T。

(51:G:b)　V 中不存在 S、T 使 $S\supset T$。

(51:G:c)　对于 V 的 S、T,$S\cup T=I$ 意味 $S\cap T$ 是一个一元集。

(51:G:d)　$\ominus$、一元集和 I 都不属于 V。

证明:令 V_1 是全部 $(-S)\cup(i)$ 组成的集合,其中 S 属于 V,i 属于 S。那么,根据(51:F),$V\subseteq W^m$ 意味着,$V\cup V_1$

$\subseteq W$。根据(51:D),如果 $V \cup V_1$ 满足(51:D:a)和(51:D:b),对于满足(49:W*)的某个 W 来说,这是可能的。

因此,让我们就 $V \cup V_1$ 阐述(51:D:a)和(51:D:b)。

(51:D:a)的证明:S、T 都属于 V:这与(51:G:a)相同。

S、T 都属于 V_1:即 $S = (-S') \cup (i)$,$T = (-T') \cup (j)$,S'、T'属于 V,i 属于 S',j 属于 T'。

S 与 T 不相交意味着:$-S'$、$-T'$不相交,即 $S' \cup T' = I$;(i)、(j)不相交,即 $i \neq j$;$-S'$、(j)不相交,即 j 属于 S';$-T'$、(i)不相交,即 i 属于 T'。

总之:$S' \cup T' = I$;i、j 是同时属于 S'、T'的两个不同元素,即 $S' \cap T'$的两个不同元素。

451 现在,我们必须说这是不可能的。也就是说,如果 $S' \cup T' = I$,那么,$S' \cap T'$不可能有两个不同的元素。根据(51:G:a),$S' \cap T'$不可能是空集,这意味着,它只能是一元集。

这就得到了(51:G:c)(这里的 S'、T'取代了 S、T)。

S、T 之中的一个属于 V 且另一个属于 V_1:根据对称性,我们可以假设,S 是前者,T 是后者。这样,$T = (-T') \cup (j)$,T'属于 V,j 属于 T'。S 与$(-T') \cup (j)$不相交意味着 S、$-T'$不相交,即 $S \subseteq T'$;S、(j)不相交,即 j 不属于 S。

总之:$S \subseteq T'$,j 属于 T'但不属于 S。

现在,我们必须说这是不可能的,即没有 $S \subset T'$。这就得出了(51:G:b)。(这里的 T'、S 取代了 S、T。)

(51:D:b)的证明:$\ominus$和一元集都不属于 V,也不属于 V'。后者意味着,它们都不属于$(-S) \cup (i)$,其中 S 属于

V,i 属于 S。只有一个一元集才能成为这样的$(-S)\cup(i)$,而且这意味着:$-S=\ominus$,即 $S=I$。

总之:$\ominus$、一元集和 I 都不属于 V。这与(51:G:d)一致。

因此,我们恰好得出了条件(51:G:a)—(51:G:d)。

就像(51:D)解决了有关 W 的相应问题那样,(51:G)解决了枚举全部 W^m 的问题:从任一满足(51:G:a)—(51:G:d)的 V 开始[①],在不破坏(51:G:a)—(51:G:d)的情况下,我们尽可能逐步扩大它。当这一过程无法继续下去时,我们有一个 V,它是满足(49:W^*)的一个 W 的 W^m 的子集中最大的一个,即我们有这样一个 W^m。

在以各种方式逐步完成这一过程时,我们得到问题中的全部 W^m。

51.4.2　上面的说法表明,全部简单博弈的实际枚举能够建立在(51:G)的基础上,而且在第 52 节中,我们就是这么做的。不过,我们最好首先进行一些其他的分析。

接下来,我们要略微详细分析的一个断言是,(51:G)是更接近饱和型的一个条件。

首先要看到的是,由于(51:G:b)涉及的是 V 中任意两个 S、T,因此我们能够在(51:G:b)对换它们。也就是说,我们能够把(51:G:b)换为:

(51:G:b^*)　　V 中不存在两个集合 S、T,使 $S\supset T$ 或 $S\subset T$。

用 $S\mathscr{R}_3T$ 记 S、T 满足(51:G:a)、(51:G:b^*)和

① 原理上,我们从空集开始。——451,①

(51:G:c)，即如果 $S\cap T$ 不是一个一元集，那么，$S\cap T=\ominus$，$S\supset T$，$S\subset T$ 和 $S\cup T=I$ 都不成立。

因此，(51:G)简单说明了 V 是 $\mathscr{R}_3$ 饱和的。现在，令 D 是满足(51:G:d)的 I 的子集组成的系 $\bar{\bar{I}}$，即$\ominus$、一元集和 I 都不属于它。

那么，51.4.1 的最后一点说明证明，W 是 $\bar{\bar{I}}$ 的最大 $\mathscr{R}_3$ 满足子集。

452 显然，$S\mathscr{R}_3T$ 是对称的。[①] 所以，我们可以应用 30.3.5 的(30:G)。这给出：

(51:H) 对于一个满足(49:W^*)的 W，$V=W^m$ 的充分必要条件是，(在 $\bar{\bar{I}}$ 中)V 是 $\mathscr{R}_3$ 饱和的。

(51:E)与(51:H)告诉我们，我们成功地从不对称的 $\mathscr{R}_2$ 过渡到了对称 $\mathscr{R}_3$，兑现了我们在第 271 页脚注①中许下的诺言。

51.4.3 51.3.2 中的 $\mathscr{R}_2$ 与我们现在的 $\mathscr{R}_3$ 的比较是很有启发意义的：

$S\mathscr{R}_2T$：$S\cap T=\ominus$，$S\supset T$ 都不成立。

$S\mathscr{R}_3T$：如果 $S\cap T$ 不是一个一元集，那么，$S\cap T=\ominus$，$S\supset T$，$S\subset T$，$S\cup T=I$ 都不成立。

$\mathscr{R}_2$ 的对称性(见 30.3.2)给出 $\mathscr{R}_3$ 的前三个部分，但不给出最后一个。最后一个部分是(51:G)和(51:H)的成就，且与另外三个没有任何明显联系。

---

① 而且，在 $\bar{\bar{I}}$ 中，$S\mathscr{R}_3S$ 成立：只有 $S=\ominus$时，才有 $S\cap S=\ominus$，永远不会有 $S\supset S$，$S\cup S=I$ 只有在 $S=I$ 时才成立，所以，对于$\bar{I}$的一个 S，这些事情都不会发生。——452，①

你能够由此推测，即便 30.3.7 的计划的确可行，使其得以实现的运算也必定是十分玄妙的。

51.5　简单博弈与分解

51.5.1　接下来，我们要分析的是简单博弈与分解之间的联系。

假设 Γ 是一个可分解博弈，它有成分博弈 Δ、H（J、K 是 I 中的互补集合）。那么，我们要回答的问题是：对于 Δ、H 来说，Γ 是简单博弈意味着什么呢？

让我们首先确定集合 W、L。因为我们必须就 Γ、Δ、H 这三个博弈来分析，有必要指明依附关系。所以，我们写 $W_{\Gamma}, L_{\Gamma}; W_{\Delta}, L_{\Delta}; W_{\mathrm{H}}, L_{\mathrm{H}}$。

另外，我们还假设 Γ、Δ、H 既不是本质博弈，也不是正规化的博弈。不过，假设它们都是零和博弈有方便之处。①

(51:I)　　$S = R \cup T(R \subseteq J, T \subseteq K)$ 属于 $W_{\Gamma}[L_{\Gamma}]$，其充分必要条件是，T 属于 $W_{\Delta}[L_{\Delta}]$ 且 T 属于 $W_{\mathrm{H}}[L_{\mathrm{H}}]$。

证明：把 S 换成其（在 I 中的）补集 $I - S$②，把 R 和 T 分别换成它们（在 J、K 中）的补集。这一变换等于用 L_{Γ}、L_{Δ}、L_{H} 替换 W_{Γ}、W_{Δ}、W_{H}。因此，我们关于 W 的说法就意味着关于 L 的一个说法，反之亦然。下面，我们来证明后者。 453

① 回想 46.10 的讨论，读者也许想知道（Γ、Δ、H 中的）剩余（e_0、$\bar{\varphi}$、$\bar{\psi}$）的问题如何解决。这一个问题将在 51.6 中得到澄清。——452，②

② 由于我们要计算不同集合中的补集，我们写成这样的形式，而不写 $-S$、$-R$ 和 $-T$。——452，③

S 属于 L_Γ 表达为

(51:7) $$v(S)=\sum_{i\text{属于}S} v[(i)]$$

由于 Δ、H 是 Γ 的成分博弈，我们有 $v(S)=v(R)+v(T)$。所以，我们能够把(51:7)写成：

(51:8) $$v(R)+v(T)=\sum_{i\text{属于}R} v[(i)]+\sum_{i\text{属于}T} v[(i)]。$$

R 属 L_Δ 和 T 属于 L_H 分别表达为

(51:9) $$v(R)=\sum_{i\text{属于}R} v[(i)],$$

(51:10) $$v(T)=\sum_{i\text{属于}T} v[(i)]。$$

如此，我们要证明的命题是(51:7)与(51:9)且(51:10)之间的等价性。

显然，(51:9)和(51:10)意味着(51:7)。反过来，由于总有

$$v(R)\geqq\sum_{i\text{属于}R} v[(i)],$$

$$v(T)\geqq\sum_{i\text{属于}T} v[(i)]$$

(51:7)也意味着(51:9)和(51:10)。[见 31.1.4 中的(31:2)。]

51.5.2 现在，我们能够证明：

(51:J) Γ 是简单博弈的充分必要条件是：其两个成分博弈 Δ、H 中的一个是简单博弈，另一个是非本质博弈。

证明：该条件是必要条件：Γ 是简单博弈意味着：

(51:11) 对任意 $S\subseteq I$，下述两个命题中有且只有一个成立：

(51:11:a)　S 属于 W_{Γ}。

(51:11:b)　S 属于 L_{Γ}。

令 $S=R\cup T(R\subseteq J,T\subseteq K)$ 并把(51:I)应用于(51:11)。结果是:

(51:12)　对于任意 $R\subseteq J,T\subseteq K$,下述两个命题中有且只有一个成立:

(51:12:a)　R 属于 W_{Δ} 且 T 属于 W_{H}。

(51:12:b)　R 属于 L_{Δ} 且 T 属于 L_{H}。

现在,令 $R=\ominus,T=K$,那么,R 属于 L_{Δ} 且 T 属于 W_{H}。 454
从而,由(51:12:a),W_{Δ} 与 L_{Δ} 有一个共同元素 R;而且,由(51:12:b),W_{H} 与 L_{H} 有一个共同元素 T。根据 49.3.3 中的(49:E)(将其运用于 Δ、H),前者意味着,Δ 是非本质博弈;后者意味着,H 是非本质博弈。

故,我们有:

(51:13)　如果 Γ 是简单博弈,那么,Δ、H 之一是非本质博弈。

该条件是充分条件:根据对称性,我们假设 H 是非本质博弈,那么,49.3.3 中的(49:E)(将其运用于 H)表明,每个 $T\subseteq K$ 同时属于 W_{H} 和 L_{H}。所以,我们能够重新表述(51:12)所描述的 Γ 的简单性。

(51:14)　对于任意 $R\subseteq J$,下述两个命题中有且只有一个成立:

(51:14:a)　R 属于 W_{Δ}。

(51:14:b)　R 属于 L_{Δ}。

这正是 Δ 的简单性的表述。所以,我们有

(51:15)　如果 H[Δ]是非本质博弈,那么,Γ 的简

单性等价于Δ[H]的简单性。

(51:13)与(51:15)结合起来就完成了(51:J)的证明。

51.6 非本质博弈、简单博弈和博弈的分解:剩余的处理

51.6 下面,我们要把(51:J)与46.1.1的(46:A:c)进行比较。在(46:A:c)中,我们发现,一个可分解博弈是一个非本质博弈的充分必要条件是,其两个成分博弈都是非本质博弈,即在分解这一运算下,非本质性具有遗传性。简单性却不具有遗传性。正如我们知道的那样,简单博弈是本质博弈的最简单形式:根据(51:J),如果一个可分解博弈的两个成分是可分解的,那么,该博弈就不是简单博弈。(51:J)表明,一个简单博弈Δ在分解运算下仍然是简单博弈的充分必要条件是,它与一个非本质博弈H结合,即与一组"哑玩家"结合(见第340页脚注①)。

这里,我们给出四点补充说明:

第一:如果简单博弈Γ如上所述得自(简单)成分博弈Δ加上一组"哑玩家"(即非本质博弈H),那么,Γ的解可直接得自Δ的解。事实上,这正是46.9所详细描述的内容。[①]

第二:我们在49.7的开头指出,对于简单博弈,我们

① 当然,这也是常识。分解理论的内容——尤其见46.11中的概要——表明,忽视严格结果是不可靠的。在这种情况下,46.9提供坚实的基础。——454,①

使用旧的理论形式。因此，值得注意的是，我们得出的分解类型（见上面的说明）恰好是使旧理论形式具有遗传性的那种类型。（见46.9末尾或46.10.4中第一点说明。）

第三：这里，为什么我们避免就简单博弈分析非零剩余的情况——即44.7意义上的新理论形式——也就变得更为清楚了。 455

事实上，假如我们能够成功完成这一工作，那么，46.6和46.8的结果就能够使我们处理简单博弈的所有分解。现在，我们看到，简单博弈的一个分解不是一个简单博弈。换句话说，具有一般剩余的简单博弈理论会间接地包含着非简单博弈。因此，我们无法继续下去而不失去一般性，这不足为奇。[①]

第四：根据46.10的分析，上述有关剩余的说明有着如下意义：它们表明，简单博弈概念经不起嵌入这一一般运算。[②] 这表明，46.10.5中考虑的方法论原理无法在所有条件下都得到应用。

51.7　W^*意义上的可分解性准则

51.7.1　我们在51.5中讨论了什么时候一个可分解博弈是简单博弈。现在，我们要对付的是相反的问题：什么时候一个简单博弈是可分解的。

---

① 从某种意义上说，这可以被视为第270页脚注③中提到的方法论原理的一个应用。——455，①

② 除非如上面讨论过的那样，这一运算只是加上"哑玩家"。——455，②

给定一个简单博弈 Γ。一个重要的概念是：I 的 i 是一个显著玩家(significant)，当且仅当它属于 W^m 的某个 S。[1] 用 I_0 记 I 的全部显著元素组成的集合，它是 W^m 中全部 S 的并集。

下面，我们将分若干步骤进行：

(51:K) 如果 Γ 是简单且可分解博弈，而且其简单成分博弈是 Δ[见(51:J)并使用 51.5 的记号]，那么，Γ 和 Δ 有相同 W^m。

证明：根据(51:1)，W^m 的 $S=R\cup T(R\subseteq J, T\subseteq K)$ 中取 W_Δ 的任意 R，W_H 的任意 T。由(51:J)，H 是非本质博弈，因此 W_H 的 T 是任意 $T\subseteq K$[见(51:J)的证明]。所以，如果 R、T 是最小的，那么，$S=R\cup T$ 是最小的，即它属于 W_Γ^m。这意味着，R 属于 W_Γ^m 且 $T=\ominus$，即 $S=R$。

因此，W_Γ^m 与 W_Δ^m 一致，即 Γ 和 Δ 有相同的 W^m。

(51:L) (51:K)中的相同假设下，必有 $J\supseteq I_0$。

证明：根据(51:K)，Γ 和 Δ 有相同的 W^m，所以，相同显著元素——形成 I_0 的 Γ 的那些元素——全部是 Δ 的参与者，他们形成集合 J。

456 (51:M) 假设 Γ 是简单博弈，那么，I_0 是一个裂集，[2]I_0－成分博弈 Δ 是简单博弈，且$(I-I_0)$－成分博弈 H 是非本质博弈[见(51:J)]。

---

① 如果存在一个最小胜利联盟，玩家 i 属于该联盟，那么，玩家 i 就是一个显著玩家。也就是说，他提供的服务是必不可少的。

我们将会看到，与此相对立的"哑玩家"(见 51.7.3)。

当然，所有这些都指简单博弈。——455，③

② 定义见 43.1。——456，①

证明：考虑集合 $S=R\cup T, R\subseteq I_0, T\subseteq I-I_0$，那么，

(51:16)　　S 属于 W 的充分必要条件是 R 属于 W。

事实上：如果 R 属于 W，那么，$S\supseteq R$ 也属于 W。相反：令 S 属于 W，那么，W 中一个满足 $T\subseteq S$ 的最小的 T 存在。这样，T 属于 W^m，T 的每个 i 属于 I_0，从而 $T\subseteq I_0$。因此，$T\subseteq S\cap I_0=R$，从而 R 与 T 同属于 W。

(51:17)　　T 属于 L。

事实上：用 $T(\subseteq I-I_0)$ 替换 S。这是用$\ominus$、T 替换我们的 R、T。由于$\ominus$属于 L，(51:16) 允许我们得出 T 属于 L。

接下来，我们要证明：

(51:18)　　$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(R)+\mathrm{v}(T)$。

分别考虑 L 的 S 和 W 的 S：

S 属于 L：$R, T\subseteq S$ 也属于 L。所以，

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(S) &= \sum_{i\text{属于}S}\mathrm{v}[(i)]\\ &= \sum_{i\text{属于}R}\mathrm{v}[(i)]+\sum_{i\text{属于}T}\mathrm{v}[(i)]=\mathrm{v}(R)+\mathrm{v}(T),\end{aligned}$$

即 (51:18)。

S 属于 W：根据 (51:16) 和 (51:17)，R 属于 W 且 T 属于 L。所以，

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(S) &= -\sum_{i\text{不属于}S}\mathrm{v}[(i)],\\ \mathrm{v}(R) &= -\sum_{i\text{不属于}R}\mathrm{v}[(i)]=-\sum_{i\text{不属于}S}\mathrm{v}[(i)]-\sum_{i\text{属于}T}\mathrm{v}[(i)],\\ \mathrm{v}(T) &= \sum_{i\text{属于}T}\mathrm{v}[(i)],\end{aligned}$$

从而，

$$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(R)+\mathrm{v}(T)。$$

即 (51:18)。

(51:18)恰好说明,I_0 是一个裂集。对于所有的$T\subseteq I-I_0$,(51:17)给出

$$v(T) = \sum_{i\text{属于}T} v[(i)],$$

从而,$I-I_0$ 成分博弈 H 是非本质博弈。所以,根据(51:J),I_0 成分博弈 Δ 必定是简单博弈。

证明完成。

457 **51.7.2** 现在,我们能够全面描述一个简单博弈 Γ 的可分解性了,即我们能够指出其 43.3 意义上的分解分拆 Π_Γ。

(51:N) 与(51:M)中的假设相同:分解分拆 Π_Γ 由集合 I_0 和一元集(i)(i 属于 $I-I_0$)组成。

证明:对于 i 属于 $I-I_0$,(i) 属于 Π_Γ:根据(51:M),$I-I_0$是 Γ 的一个裂集,有一个非本质成分博弈 H。因此,对于属于 $I-I_0$ 的每个 i,(i) 是 H 的一个裂集[见 43.4.1 中的(43:J)],从而是 Γ 的一个裂集[见 43.3.1 中的(43:D)]。作为一个一元集,(i) 必然是最小的。所以,它属于 Π_Γ。

I_0 属于 Π_Γ:根据(51:M),I_0 是一个裂集。如果 J 是一个非空的裂集,那么,把(51:L)应用于 J 或 $I-J$,要么 $J\subseteq I_0$,要么 $I-J\subseteq I_0$,$I_0\cap J=\ominus$。上述两种情况都不允许 $J\subset I_0$。因此,I_0 是最小的,从而属于 Π_Γ。

不会再有其他的 J 属于 Π_Γ:Π_Γ 的任何其他的 J 必定与 I_0 不相交,且不与(i)(i 属于 $I-I_0$)相交[利用 43.3.2 中的(43:F)]。由于这些集合的并集是 I,这必然要求 $J=\ominus$,而$\ominus$不是 Π_Γ 的一个元素(见 43.3.2 开头)。

证明完成。

51.7.3　把 43.4.1 中的(43:K)与(51:N)结合起来给出:①

(51:O)　　一个简单博弈 Γ 是不可分解的,当且仅当 $I_0 = I$,即当且仅当其全部参与者都是显著的。

我们通过证明得出:

(51:P)　　一个简单博弈 Γ 恰好有一个 J 成分,它是简单的和不可分解的,并有 $J = I_0$。

证明:I_0 成分博弈能够根据(51:M)建立起来且是一个简单博弈。

现在,考虑一个简单 J 成分博弈。根据(51:K),它与 Γ 有相同的 W^m 和相同的显著元素,从而后者形成 I_0。根据(51:O),J 成分博弈等价于 $J = I_0$。

我们称 Γ 的 I_0 成分博弈 Δ_0 为其核(kernel)。所有其他参与者——即 $I - I_0$ 的元素——是"哑玩家"。[见(51:M)或(51:N),以及 43.4.2 的最后一部分。]所以,在博弈 Γ 中,重要的事情都发生在它的核 Δ_0 之内。要理解这一点,只需应用 51.6 中的第一点说明。

52. n 较小时的简单博弈

52.1　$n = 1,2,3$ 的情况

52.1　我们的下一个目标是就 n 的较小取值枚举所

① 或直接将 43.4.1 中的(43:K)与(51:L)和(51:M)结合起来。——457,①

有简单博弈。我们准备将这一决疑论式的分析进行到得到 50.2、50.7.2 和 50.8.2 中提到的例子(分别见第 434
458 页脚注②,第 443 页脚注②、③、④,第 445 页脚注①、②)所需要的程度。

由于每个简单博弈都是本质博弈,我们只需考虑$n \geqq 3$的情况。

$n=3$ 的情况是:(惟一的)本质三人博弈是简单的,而且它有记号$[1,1,1]_h$。[①]

所以,我们能够假设,从今以后,$n \geqq 4$。

52.2 $n \geqq 4$ 时的二元集及其在 W^m 分类中的作用

52.2.1 给定 $n \geqq 4$。我们希望就这个 n 枚举全部简单博弈。为此,我们要引入另一个博弈分类原则,对于 n 的较小取值来说,该分类原则十分有效。

问题中的枚举等于集合 W^m 的枚举,对此,我们有可供利用的特征——如 51.4.1 中(51:G)就是一个。

考虑有可能属于 W^m 的最小集合。由于(51:G:d)把空集和一元集排除在 W^m 之外,这意味着,我们要考虑的是 W^m 中的二元集。这些集合具有如下性质:

(52:A) 一个二元集属于 W^m 的充分必要条件是,它属于 W。[②]

证明:必要性是显然的。下面,让我们假设二元集 S 属于 W。S 的真子集是空集或一元集,从而不属于 W。因

① 见 50.1.1 中的(50:A)以及 50.2.2 的最后一点说明。——458,①

② 即 W 中的一个不是最小集合的集合至少有三个元素。——458,②

此，S 属于 W^m。

我们按照 W^m 中的二元集进行分类。

52.2.2 可以设想，W^m 有可能根本没有二元集。我们用 C_0 记这一可能情况。

另一种可能性是，W^m 恰好包含一个二元集。通过玩家 1，…，n 的置换，我们能够使这一集合是(1,2)。我们用 C_1 记这一可能情况。

另外，W^m 可能包含两个或更多二元集。考虑其中的两个。根据(51:G:a)，它们必定有一个共同元素。通过玩家 1，…，n 的置换，我们能够使这个元素是 1，且这两个集合的另外两个元素分别是 2 和 3。

这样，W^m 包含(1,2)和(1,3)。

我们用 C_2 记 W^m 不再包含其他二元集的情况。

52.2.3 现在，假设 W^m 的确包含其他二元集，并进一步假设并非其中的每一个都包含元素 1。

因此，考虑一个不包含元素 1 的 W^m 的一个二元集。根据(51:G:a)，它必定与(1,2)和(1,3)有共同元素，加之元素 1 已经被排除，这些共同元素必定是 2 和 3，因此该集合必定是(2,3)。

所以，(1,2)、(1,3)、(2,3)属于 W^m。（就此而言，我们有关于 1、2、3 的完全对称性。） 459

接下来，考虑有可能属于 W^m 的其他二元集。它不可能包含 1、2、3 中的全部。通过玩家置换，我们能够做到该集合不能包含 1。它必须与(1,2)、(1,3)有共同元素，加之 1 已经被排除，这些元素只能是 2 和 3，所以该集合必定是(2,3)，但我们已经假设它不同于(2,3)。

所以，W^m 包含二元集(1,2)、(1,3)和(2,3)且不再包含其他二元集。我们用 C^* 记这种情况。

52.2.4 余下的一种可能性是，W^m 包含不同于(1,2)、(1,3)的二元集，但它们都包含1。

通过玩家 $4,\cdots,n$ 的置换，我们能够使这些玩家是 $4,\cdots,k+1$，$k=3,\cdots,n-1$。

因此，W^m 包含二元集 $(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,k+1)$ 且不再包含其他二元集。我们用 C_k 记这种情况。

52.2.5 为了方便，我们把52.2.2的 C_0、C_1、C_2 和52.2.4的 $C_k(k=3,\cdots,n-1)$ 放在一起：这样，我们有如下情况：

$$C_k,\quad k=0,1,\cdots,n-1。$$

在情况 C_k 中，W^m 包含二元集 $(1,2),\cdots,(1,k+1)$ 且不再包含其他二元集。通过置换玩家 $1,\cdots,n$①，我们能够用 $(1,n),\cdots,(k,n)$ 取代这些集合。

我们要使用正是 C_k 的这种形式，$k=0,1,\cdots,n-1$。现在，C_k 包含二元集 $(1,n),\cdots,(k,n)$ 且不再包含其他二元集。

C_k 之外的惟一情况是52.2.3的 C^*，我们将不对其进行转换。

52.3 情况 C^*、C_{n-2} 和 C_{n-1} 的可分解性

52.3.1 在这些可能情况中，三种情况能够直接被解

---

① 即$\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\ n,1,2,\cdots,n-1\end{pmatrix}$，见28.1.1。——459，①

决：C^*、C_{n-2}和 C_{n-1}。下面，我们按与此不同的循序讨论这些情况。

情况 C^*：考虑一个 $S\subseteq I$。如果 S 包含 1、2、3 中的两个或更多，如（至少是）1、2，那么，$S\subseteq(1,2)$。$(1,2)$ 属于 W，从而 S 也属于 W。如果 S 包含 1、2、3 中的一个或更少，如（至多）1，那么，$S\subseteq-(2,3)$。$(2,3)$ 属于 W，$-(2,3)$ 属于 L，从而 S 也属于 L。所以，我们看到：W 恰好由这样的 S 组成，它们包含 1、2、3 中的两个或更多。因此，W^m 恰好由$(1,2)$、$(1,3)$和$(2,3)$组成。① 故，对于这一博弈来说，$(1,2,3)$是 51.7 的 I_0。

换句话说：该博弈的核是一个有参与者 1、2、3 的三人博弈，其 W^m 由$(1,2)$、$(1,3)$和$(2,3)$组成。正如我们在前面提到的那样（最后一次是 52.1 中），这个博弈有记号$[1,1,1]_h$。其余 $n-3$ 位玩家，4，…，n 是"哑玩家"。

这样，我们看到： 460

情况 C^*恰好由一个博弈代表：三人博弈$[1,1,1]_h$，$(n-3)$个"哑玩家"。

52.3.2 情况 C_{n-1}：考虑一个 $S\subseteq I$。首先，假设 n 属于 S。如果 S 没有其他元素，那么，它是一元集(n)，且属于 L。如果 S 有其他元素，如 $i=1,\cdots,n-1$，那么，$S\supseteq(i,n)$。现在，(i,n)属于 W，从而，S 也属于 W。换句话说：如果 n 属于 S，那么，S 属于 W，除非 $S=(n)$。将这一

---

① 按照定义，这些是 W^m 的二元集，但我们已经证明了，它们完全穷尽了 W^m。——459，②

结果运用于 $-S$ 给出：如果 n 不属于 S，那么，当 $-S$ 不属于 W 时，即当且仅当 $-S=(n)$，即 $S=(1,\cdots,n-1)$ 时，S 属于 W。

所以，W 恰好由这样一些 S 组成：除 (n) 这个最小的集合之外，包含 n 的所有集合；除 $(1,\cdots,n-1)$ 这个最大的集合之外，不包含 n 的集合。不难验证，这个 W 的确满足条件(49:W*)。还有，这一博弈能够被描述为一个加权多数博弈，玩家 $1,\cdots,n-1$ 有相同权重，而玩家 n 有 $n-2$ 倍权重。也就是说，这个博弈有记号 $[1,\cdots,1,n-2]_h$。

W^m 可直接得自 W。它恰好由这样一些 S 组成：$(1,n),\cdots,(n-1,n)$ 和 $(1,\cdots,n-1)$。[①] 现在，不难验证，这个博弈是一个齐次正规博弈，$a=1$。也就是说，对于这个 W^m 中的所有 S 来说，$s_S=1$（见 50.2）。所以，我们能够写 $[1,\cdots,1,n-2]_h$。

这样，我们看到：

情况 C_{n-1} 恰好由一个博弈代表：n 人博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$。

52.3.3 情况 C_{n-2}：考虑一个 $S\subseteq I$。首先，假设 n 属于 S。如果 S 没有 $n-1$ 之外的其他元素，那么，$S\subseteq(n-1,n)$。现在，$(n-1,n)$ 不属于 W^m，从而[根据 52.2.1 中的(52:A)]不属于 W。所以，S 与 $(n-1,n)$ 同属于 L。

① 因此，W^m 中的二元集是 $(1,n),\cdots,(n-1,n)$，这是由其定义决定的。一个新的事实是，W^m 的惟一一个其他元素是 $(1,\cdots,n-1)$。

请注意，最后一个集合只有在 $n\geq4$ 的情况下才不是二元集。——460，①

如果 S 有不同于 $n-1$ 的其他元素，如 $i=1,\cdots,n-2$，那么，$S\supseteq(i,n)$。现在，这个 (i,n) 属于 W，从而 S 也属于 W。这样，我们看到：如果 n 属于 S，那么，S 属于 W，除非 $S=(n)$ 或 $(n-1,n)$。将此运用于 $-S$ 给出：如果 n 不属于 S，那么，当 $-S$ 不属于 W 时，即当且仅当 $-S=(n)$ 或 $(n-1,n)$，即 $S=(1,\cdots,n-1)$ 或 $(1,\cdots,n-2)$ 时，S 属于 W。

因此，W 恰好由这样一些 S 组成：除 (n) 或 $(n-1,n)$ 之外，所有包含 n 的集合；除 $(1,\cdots,n-1)$ 和 $(1,\cdots,n-2)$ 之外的不包含 n 的集合。不难验证，这的确满足条件 (49:W*)。

W^m 可直接得自 W。它恰好由这样一些 S 组成：$(1,n),\cdots,(n-2,n)$，以及 $(1,\cdots,n-2)$。① 所以，对于该博弈来说，$(1,\cdots,n-2,n)$ 是 51.7 的 I_0。

换句话说：该博弈的核是一个 $(n-1)$ 人博弈，其参与者是 $1,\cdots,n-2,n$，其 W^m 由 $(1,n),\cdots,(n-2,n)$，$(1,\cdots,n-2)$ 组成。因此，这是 $n-1$ 位玩家时的情况 C_{n-2}，类似于 n 位玩家时的情况 C_{n-1}（用 $n-1$ 替换 n！）。所以，它有记号 $[1,\cdots,1,n-3]_h$。玩家 $n-1$ 是一个“哑玩家”。 461

这样，我们看到：

---

① 因此，W^m 中的二元集是 $(1,n),\cdots,(n-2,n)$，这是由其定义决定的。一个新的事实是，W^m 的惟一一个其他元素是 $(1,\cdots,n-2)$。

对于 $n=4$，这最后一个集合也是一个二元集，从而使这类博弈不那么纯粹了。（它变成了 C^*，而不是 C_{n-2}，即 C_2。）——460，②

情况 C_{n-2} 恰好由一个博弈代表:[①]有一个哑玩家的 $(n-1)$ 人博弈 $[1,\cdots,1,n-3]_h$。

52.4 (有哑玩家的)不同于 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的简单博弈: $C_k, k=0,1,\cdots,n-3$

52.4 52.3 的结果值得进一步分析和重新阐述。我们看到,对于每个 $l \geqq 4$, l 位玩家的齐次加权多数博弈 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 能够被建立起来。[②] 我们甚至能够就 $l=3$ 建立它:它是 3 位参与者的直接多数博弈 $[1,1,1]_h$。所以,我们将对 $l \geqq 3$ 使用上述表述。

如果 $n \geqq 4$,那么,我们能够通过对任一 $l=3,\cdots,n$ 建立 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 并加上必要个数的哑玩家来得到一个简单 n 人博弈。52.3 的结果是: $l=3$, n 和($n \geqq 5$ 时) $n-1$ 穷尽了情况 C^*、C_{n-1} 和 C_{n-2}。

有关这一结果的一件奇怪的事情是, l 的这些值并没有穷尽其可能取值 $l=3,\cdots,n$(见上)。也就是说,当 $n=4,5$ 时,它们是这样,但 $n \geqq 6$ 时则不是这样。当 $n \geqq 6$ 时,余下未取到的值是 $l=4,\cdots,n-2$。它们的意义是什么呢?

答案是:考虑博弈 $[1,\cdots,1,l-2]_h$(l 位玩家)有 $n-l$ 个"哑玩家"。假设 $l=3,\cdots,n$ 且 $n \geqq 4$。W^m 由 $(1,l),\cdots,(l-1,l)$ 和 $(1,\cdots,l-1)$ 组成。[③] 因此,我们有 $l=3$ 时的情

---

① $n \geqq 5$。避免 $n=4$ 的情况。见第 460 页脚注②。——461,①

② 见上面的情况 C_{n-1},用 l 替换 n。——461,②

③ 我们把玩家 $1,\cdots,l$ 当作核 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的参与者,取玩家 $l+1,\cdots,n$ 为"哑玩家"。这不同于 52.3 的情况 C_{n-1} 中的排列——那里, $l=n-1$ 且玩家 $n-1$ 是"哑玩家"。两者相差玩家 $n-1$ 与 n 的交换。——461,③

况 C^* 和 $l=4,\cdots,n$ 时的情况 C_{l-1}。[1] 因此，在这些博弈中，我们有来自情况 $C^*, C_3,\cdots,C_{n-1}$ 的典型。52.3 的结果能够被重新表述为：情况 C^*、C_{n-2} 和 C_{n-1} 被这些博弈中若干贴切的博弈穷尽。[2]

我们将这一结论重述为：

(52:B)　　我们希望枚举 $n\geqq 4$ 的全部 n 人博弈。博弈 $[1,\cdots,1,l-2]_h$（l 位玩家）加上 $(n-l)$ 个"哑玩家"是一个简单 n 人博弈，$l=3,4,\cdots,n$。其情况分别是 $C^*, C_3,\cdots,C_{n-1}$。其他 462
简单 n 人博弈（如果有的话）属于情况 $C_0, C_1,\cdots,C_{n-3}$。[3]

52.5　$n=4,5$

52.5.1　我们将详细讨论 $n=4,5$ 的情况，并讨论 $n=6,7$ 时的几个典型例子。

$n=4$ 的情况很容易解决。根据(52:B)，我们只需研究 C_0, C_1。在这些情况下，W^m 包含 $\leqq 1$ 个二元集。然而，这是不可能的：因为一个二元集的补集是一个二元集，补集的个数必然等于 W 中二元集的个数且属于 L。这一个数是总数的一半，即 6。所以，W 包含三个二元集，且 W^m

---

① 对于 $l=3$，C^* 取代了 C_2，因为在这种情况下 $(1,\cdots,l-1)$ 是一个二元集。——461，④

② 当 $n\leqq 4$ 时，C_2 是空集，因为它发生在第一个列举，而不出现在第一个列举。见 52.3。——461，⑤

③ 到目前为止，我们成功穷尽枚举这些情况要么被避开了，要么恰好包含一个博弈。然而，一般来说，情况并非如此。见 53.2.1 中的第一点说明。——462，①

也包含三个二元集。①

因此，$n=4$ 时惟有的简单博弈是(52:B)的那些博弈。我们将这一结果表述为：

(52:C)　　不考虑在四人以下简单博弈②的基础上通过增加哑玩家而得到的博弈，恰好存在一个简单四人博弈：$[1,1,1,2]_h$。

52.5.2　接下来，我们考虑 $n=5$ 的情况。根据(52:B)，我们必须研究 $l=0,1,2$ 的情况。与 $n=4$ 的情况相比，这些值都代表着具体的可能性。

C_0：W^m 即 W 中没有二元集。所以，它们都属于 L，而且它们的补集——三元集——都属于 W。因此，W 由至少三个元素的集合组成，而 W^m 由三元集组成。因此，这正是多数博弈$[1,1,1,1]_h$。

C_1：(1,2)是 W^m 即 W 中仅有的一个二元集。过渡到其补集：(3,4,5)是 L 中仅有三元集，即其他集合都属于 W。因此，W 恰好由这样一些集合组成：(1,2)和(3,4,5)之外的全部三元集，全部四元集和五元集。不难验证，这满足(49:W*)，而且其 W^m 恰好由下列集合组成：

(1,2)，(a,b,c)，其中 a=1,2，b,c=3,4,5 中的任意两个。

现在，不难证明，这个博弈有记号$[2,2,1,1,1]_h$。

C_2：(1,2)、(1,3)是 W^m 即 W 中仅有的二元集。过渡

① 见 52.2.1 中的(52:A)。在下面的讨论中还将用到这一结果，不再说明。——462，②

② 即惟一的简单三人博弈$[1,1,1]_h$。——462，③

到其补集：(3,4,5)、(2,4,5)是 L 中仅有的三元集，即其他三元集都属于 W。因此，W 恰好由这样一些集合组成：(1,2)、(1,3)、(2,4,5)和(3,4,5)之外的三元集，全部四元集，全部五元集。不难验证，这个 W 满足(49:W^*)，而且其 W^m 由下列集合组成：

(1,2),(1,3),(2,3,4),(2,3,5),(1,4,5)。

现在，不难证明，这个博弈有记号$[3,2,2,1,1]_h$。

因此，$n=5$ 时，简单博弈是这三个博弈和(52:B)中的 463
那些博弈。我们将这一结果表述为：

(52:D)　　不考虑参与人数小于 5 的简单博弈加上哑玩家来得到的博弈①，恰好存在着四个简单五人博弈：$[1,1,1,1,1]_h$，$[1,1,1,2,2]_h$②，$[1,1,2,2,3]_h$③，$[1,1,1,1,3]_h$。

53. $n \geqq 6$ 的简单博弈及其新情况

53.1　$n<6$ 时的有规律性

53.1　在继续下去之前，让我们从上述列举中得出一些结论。

第一：迄今为止，我们得到的简单博弈都有一个记号

---

① 即$[1,1,1]_h$和$[1,1,1,2]_h$。——463，①

② 为了得到递增的权重，我们置换了这些博弈的玩家。——463，②

③ 同上。——463，③

$[w_1,\cdots,w_n]_h$，即它们都是齐次加权多数博弈。我们已经就 $n=4,5$ 证明了这一点，问题是它是否总是成立。如第 443 页脚注③中指出的那样，这一点不成立。第一个反例出现在 $n=6$ 的时候。

第二：至此，包含任一博弈的每个类 C_k 仅仅包含一个博弈，从 $n=6$ 开始，这一点也不再成立。（见 53.2.1。）

第三：我们也许想当然地认为，对于齐次博弈来说，权重的选择中有很大的自由。然而，我们的列举表明，这些可能性是十分有限的：$n=3,4$ 时，只有一种选择机会；$n=5$ 时，有四种选择机会。[①] 我们强调，由于我们的列举是穷尽的列举，这是严格建立起来的客观事实，不存在方法上的随意性。

第四：我们能够证明第 446 页脚注①的说法，即虽然 W 中的元素个数（2^{n-1}）取决于 n，同一个 n 的简单博弈却可以有不同的 W^m。这一现象从 $n=5$ 开始出现。

对于 $n=3$：W 有 4 个元素，在惟一的例子中，W^m 有 3 个元素。对于 $n=4$：W 有 8 个元素，在惟一的例子中，W^m 有 4 个元素。对于 $n=5$：W 有 16 个元素，在 4 个例子中，W^m 分别有 10、7、5、5 个元素。

第五：我们能够验证第 443 页脚注②的说法，即（有 $U=W^m$ 的）50.4.3 和 50.6.2 的方程（50:8）的个数有可能超过变量的个数，但解只有一个，即一个普通的分配系统。前者意味着，W^m 有 $>n$ 个元素，后者肯定是齐次加权多数

---

① 不考虑玩家置换。——463，④

博弈的情况[50.8.1 中的(50:K)]。

我们看到，当 $n=3,4$ 时，W^m 必然有 n 个元素，但 $n=5$ 时，它可以有 10 个或 7 个元素。而且，这些博弈都是齐次加权多数博弈。①

关于不存在这些解的简单博弈，见 53.2.5 中第五点说明。 464

53.2　六个主要反例($n=6,7$)

53.2.1　现在，我们转到 $n=6,7$。即便 $n=6$，要完全穷尽所有情况也会十分烦琐。鉴于此，我们不打算这么做。我们将仅仅给出 $n=6,7$ 时的一些有代表性的简单博弈例子，用这些例子说明——如前面指出的那样——特定现象从 n 的这些取值开始出现。

第一：我们在 53.1 的第二点说明中提到过，对于 $n=6$，C_k 可以包含若干个博弈。事实上，不难验证，如下两个齐次加权多数博弈

$$[1,1,1,2,2,4]_h,[1,1,1,3,3,4]_h$$

(见第 463 页脚注②)相互不同且都属于 C_2。

53.2.2　第二：我们曾在 53.1 的第一点说明中提到过，当 $n=6$ 时，存在着一个不是齐次加权多数博弈的简单博弈，即它没有记号$[w_1,\cdots,w_n]_h$。根据 50.8.1 中的(50:K)，这必定是不存在主简单解的情况，即不存在普通意义上的分配系统。(见 53.1 中的第五点说明。)

---

① $n=5$ 时，我们有第一个反例：$[1,1,1,1,1]_h$(直接多数博弈)和$[1,1,1,2,2]_h$。——463，⑤

这样一个博弈的确存在，它甚至有可能有进一步的变化：我们有可能找到一个加权多数博弈（没有齐次性！），即它有一个记号$[w_1,\cdots,w_n]_h$，也有可能找出一个甚至不具有这一性质的博弈。

我们从首先提到的可能情况开始。

令$n=6$：把W定义为这样的$S\subseteq I=(1,\cdots,6)$组成的系，这些$S$要么包含多数玩家（即4个以上），要么恰好包含半数玩家（即6个），但包含1、2、3这三位玩家的多数（即至少2个）。换句话说，玩家1、2、3形成一个针对玩家4、5、6的特权组，但其特权相当有限：正常情况下，总体多数获胜；只有在和局的情况下，结果由特权组中的多数决定。

不难验证，这个W满足（49:W^*）。该博弈显然是一个加权多数博弈：我们只需给特权组（1,2,3）的成员较其他玩家（4,5,6）大一些的权重，这些权重也不能太大，免得颠覆了整体多数。任何记号

$$[w,w,w,1,1,1]$$

$1<w<3$都可以。[①]

465 W^m很快被确定下来。它由如下集合组成：

$$(S_1)\begin{cases}(S'_1):(1,2,3)\\(S''_1):(a,b,h),\\\qquad\text{其中 }a,b=1、2、3\text{ 中的任意两个，}h=4\text{ 或 }5\text{ 或 }6,\\(S'''_1):(a,4,5,6),\text{其中 }a=1\text{ 或 }2\text{ 或 }3。\end{cases}$$[②]

① $w>1$是必要的，例如，为使$S=(1,2,4)$战胜$-S=(3,5,6)$（即$2w+1>w+2$），$w>1$就是必要的。$w<3$也是必要的，例如，为使$S=(3,4,5,6)$战胜$-S(1,2)$（即$w+3>2w$），$w<3$就是必要的。——464，①

② 因此，W^m有$1+9+3=13$个元素。——465，①

决定 50.8.1 意义上的一个主简单解的是 50.4.3 和 50.6.2 中的方程(50:8)($U = W^m$)：

$$(E_1)\begin{cases}(E'_1): x_1 + x_2 + x_3 = 6,\\ (E''_1): x_a + x_b + x_h = 6,\\ \qquad \text{其中 } a, b = 1、2、3 \text{ 中的任意两个}, h = 4 \text{ 或 } 5 \text{ 或 } 6\\ (E'''_1): x_a + x_4 + x_5 + x_6 = 6, \text{其中 } a = 1 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } 3\end{cases}$$

方程(E_1)是无法求解的。① 事实上，有 $a = 1, b = 2, h = 4, 5, 6$的($E''_1$)证明，$x_4 = x_5 = x_6$；取 $a = 1, 2, 3$，(E'''_1)证明，$x_1 = x_2x_3$；现在，(E'_1)给出 $3x_1 = 6, x_1 = 2$；所以，(E''_1)给出 $4 + x_4 = 6, x_4 = 2$；从而(E'''_1)给出 $2 + 6 = 6$——矛盾。

应该注意的一点是，这一现象的普通经济学意义是：(S''_1)[即(E''_1)]表明，玩家 4、5、6 的服务能够相互替代，从而，它们有相同的价值。(S'''_1)[即(E'''_1)]表明，玩家 1、2、3 的服务有相同的价值。(S'_1)与(S''_1)的比较告诉我们，玩家 1、2、3 中的一个能够替代玩家 4、5、6 中的一个，而且，(S''_1)和(S'''_1)的比较告诉我们，前一组的一个玩家能够替代后一组玩家中的两个。因此，这两组玩家之间的替代率根本无法界定。一个自然的办法是声明列入(S_1)中的 W^m 的某些集合是这样的玩家集合，其中的玩家提供的服务"没有有利的用途"。从 50.4.3 的意义上说，这等于选择 $U \subset W^m$(见 50.7.1 和第 443 页脚注④)。在这个博弈中，一个 $U \subset W^m$ 是否能够有必需的性质(见 50.7.1)？这是能够通过简单的讨论加以确定的，不过，这一讨论有些烦

① 它们是关于 6 个变量的 13 个方程，不过，正如 53.1 中的第五点说明所证明的那样，这未必是一个障碍。——465，②

项，尚未给出。这样一个V的存在性是极为不恰当的。这是因为，我们能够证明，如果它存在的话，那么，它会有数学上不大可能的特征。

这个博弈还有着另一个奇特的方面：我们有可能证明，不存在这样一个解，它仅仅包含有限个分配并具有博弈本身的充分对称性，即在玩家1、2、3置换下和玩家4、5、6置换下保持不变。我们不打算在这里花费很长的篇幅来证明这一点。① 因此，我们倾向于称为自然型的解并不存在。

466 这是一个信号，它说明，在把反常的解称为"不自然的解"或将其排除时，我们必须十分小心。

53.2.3 第三：接下来，我们考虑上面的第二点说明中提到的第二种可能情况：$n=6$ 时的一个简单博弈，它根本不是一个多数博弈，即它没有记号 $[w_1,\cdots,w_n]_h$。这种情况能够被进一步分为两种情况：一、有可能找到一个博弈，它有一个主简单解（见上）；二、也有可能找到一个博弈，它没有主简单解。

考虑第一种情况：

令 $n=6$，把 W 定义为这样一些集合 $S[\subseteq I=(1,\cdots,6)]$ 组成的系，S 要么包含全部玩家的多数（即有至少4位玩家），要么恰好包含半数（即3个元素），但包含1、2、3中的偶数个（即0或2个）。将此与上面第二点说明中的例子进行比较，我们必定会得出如下结果：玩家1、2、3仍

---

① 有限解V是否真的存在尚不清楚。我们猜测，这一问题将会有一个否定的回答。——465，③

然形成一个特别有意义的组，但称其意义为特权则是错误的——他们从平局（即三元）集 S 中消失如同他们的强有力表现（恰好他们中的两个出现）一样有利，而且，他们全部出现与他们的弱表现（恰好他们中的一个出现）一样是灾难性的。他们带来一个决策，不是因为他们在 S 中的出现，而是因为一个算术关系：①

不难验证，这个 W 满足 49.6.2 中的（49：W*）。②

接下来，让我们确定 W^m。由于 W 包含全部有≧4 个元素的集合，W^m 中不可能有≧5 个元素的集合。现在，考虑 W 中的一个四元集合。

如果 1、2、3 中属于该集合的个数是偶数，从中将玩家 4、5、6 中的一个去掉。③ 如果 1、2、3 中属于它的个数是奇数，从中将 1、2、3 中的一个去掉。④ 无论如何，我们总能够得到一个包含 1、2、3 中的偶数个玩家的一个三元集，即该集合属于 W。所以，W^m 中不可能有四元集。从而，W^m 由 W 中的三元集组成。这些集合是：

---

① 还要注意，4、5、6 这一组玩家有类似意义：因为 S 必须有 3 个元素（以使准则有效），1、2、3 中的偶数个属于 S 的说法等价于 4、5、6 中的奇数个属于 S 的说法。

这进一步强调了我们一再提到的有关社会组织的可能形式的复杂性，以及参与附带现象的极其丰富多样。——466，①

② 尤其要注意，S 和 $-S$ 之一属于 W：如果两者之一有≧4 元素（因此另一个有≦2 个元素），这一点就是确凿无疑的。不然的话 S 和 $-S$ 都有 3 个元素。因此，其中之一包含玩家 1、2、3 中的偶数个，另一个包含其中的奇数个。——466，②

③ 这是可能的，因为 1、2、3 只是三位玩家。——466，③

④ 这是可能的，因为 4、5、6 只是三位玩家。——466，④

$$(S_2)\begin{cases}(S'_2):\quad (4,5,6)\\ (S''_2):\quad (a,b,h),\\ \qquad\text{其中 } a\text{、}b\text{ 取 }1\text{、}2\text{、}3\text{ 中的任意两个，}\\ \qquad h\text{ 取 }4\text{、}5\text{、}6\text{ 中的一个。}\end{cases}$$[①]

467 如果该博弈有记号 $[w_1,\cdots,w_n]_h$，那么，

$$\sum_{i\text{属于}S} w_i > \sum_{i\text{不属于}S} w_i \quad S\text{ 属于 }W\text{。}$$

将这一结果运用于 (S_2) 中枚举的 W^m 的集合。这尤其给出：

$$w_4+w_5+w_6>w_1+w_2+w_3,$$

$$w_1+w_2+w_6>w_3+w_4+w_5,$$

$$w_1+w_3+w_5>w_2+w_4+w_6,$$

$$w_2+w_3+w_4>w_1+w_5+w_6\text{。}$$

把这些不等式相加得：

$$2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6)$$
$$>2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6),$$

矛盾。

另一方面，确定一个主简单解的 50.4.3 和 50.6.2 的方程(50:8)$(U=W^m)$是：

$$(E_2)\begin{cases}(E'_2):\quad x_4+x_5+x_6=6,\\ (E''_2):\quad x_a+x_b+x_h=6,\\ \qquad\text{其中 } a\text{、}b\text{ 取 }1\text{、}2\text{、}3\text{ 中的任意两个，}\\ \qquad h\text{ 取 }4\text{、}5\text{、}6\text{ 中的一个。}\end{cases}$$

---

① 因此，W^* 有 $1+9=10$ 个元素。——466，⑤

$x_1 = \cdots = x_6 = 2$ 显然是解。①

用普通的经济学术语，我们不得不说，(1,2,3)与(4,5,6)这两组玩家之间的结构上的不同无法用权重和多数来表达，而且，仅就取值而言，它们之间没有不同。

53.2.4　第四：注意，正如 50.8.2 中讨论的那样，上述例子也适用于证明齐次加权多数原则与一个主简单解的存在性之间的不同。事实上，它是(50:21)中 = 的一个例子：因为 $x_1 = \cdots = x_6 = 2$(见上)，故

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 12 = 2n。$$

53.2.5　第五：现在，考虑上面第三点说明中提到的第二种可能情况：$n=6$ 时的一个简单博弈，它既没有一个记号

$$[w_1, \cdots, w_n]_h$$

也没有一个主简单解。

与第二和第三点说明中的两个例子相比，这个例子所依据的原则不那么明确。这并不令人感到惊奇，因为我们的简化准则都没有得到满足。

这个例子是：

令 $n=6$。把 W 定义为这样一些集合 $S[\subseteq I=(1,\cdots,6)]$ 组成的系，这些集合要么包含全部玩家的多数(即至少有 4 个元素)，要么包含其中的半数(即 3 个)元素，而 *468*
且满足下列条件：要么 S 包含玩家 1 但它又不是(1,3,4)

① 不难证明，这是它们的惟一解。——467，①

或(1,5,6),要么 S 是(2,3,4)或(2,5,6)。①②

不难验证,这个 W 满足 49.6.2 中的(49:W*)。

W^m 的确定没有太大困难。它由如下集合组成:

$$(S_3)\begin{cases}(S'_3):(1,2,b),\text{其中 } b=3,4,5,6 \text{ 之一},\\(S''_3):(1,a,b),\text{其中 } a=3 \text{ 或 } 4, b=5 \text{ 或 } 6^{③},\\(S'''_3):(1,p,q),\text{其中 } p=3,q=4,\text{或 } p=5,q=6,^{④}\\(S_3^{\mathrm{IV}}):(3,4,5,6)。^{⑤}\end{cases}$$

将此应用于(S_3)中枚举的 W^m 的集合。这尤其给出:

$$w_1+w_3+w_5>w_2+w_4+w_6,$$

$$w_1+w_4+w_6>w_2+w_3+w_5,$$

$$w_2+w_3+w_4>w_1+w_5+w_6,$$

$$w_2+w_5+w_6>w_1+w_3+w_4。$$

把这些不等式相加得:

$$2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6)$$
$$>2(w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6),$$

---

① 上面被排除的集合(1,5,6)和(1,3,4)的补集。——468,①

② 如果有关(1,3,4)、(1,5,6)和(2,3,4)、(2,5,6)的最后一个例外情况被忽略,那么,W 就可以按照下述原则来定义:玩家 1 是一个有特权的玩家——正常情况下多数取胜,但平局局面由玩家 1 决定。

不难验证,这正是博弈[2,1,1,1,1,1]$_h$。也就是说,与我们在第二点说明中讨论的有点类似的例子相比,这种情况甚至更为简单,因为这里的特权有一个普通意义上的数值。

因此,有关(1,3,4)、(1,5,6)和(2,3,4)、(2,5,6)的复杂例外情况是导致我们这个例子的真正特征关键。——468,②

③ 注意,a、b 相互独立地变化,而 p、q 不独立!——468,③

④ 同上。——468,④

⑤ 因此,W^m 有 4+4+2+1=11 个元素。——468,⑤

矛盾。

另一方面，用于决定一个主简单解的 50.4.3 和 50.6.2 的方程(50:8)($U = W^{m}$)是：

$$
(E_3)\begin{cases}(E'_3): x_1 + x_2 + x_b = 6,\text{其中 } b = 3,4,5 \text{ 或 } 6,\\ (E''_3): x_1 + x_a + x_b = 6,\text{其中 } a = 3 \text{ 或 } 4, b = 5 \text{ 或 } 6,\\ (E'''_3): x_2 + x_p + x_q = 6,\\ \qquad\text{其中 } p = 3, q = 4, \text{或 } p = 5, q = 6,\\ (E_3^{N}): x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6。\end{cases}
$$

这些方程(E_3)是无法求解的。[①] 事实上，(E''_3)表明，$x_3 = x_4$ 和 $x_5 = x_6$，从而(E'''_3)给出，$x_2 + 2x_3 = 6$，$x_2 + 2x_5 = 6$，所以 $x_3 = x_5$，进而 $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$。现在，(E^{N}_3)给出 $4x_3 = 6$，$x_3 =$ 469
$\frac{3}{2}$，而(E''_3)，(E'''_3)给出 $x_1 + 3 = 6$，$x_2 + 3 = 6$，即 $x_1 = x_2 = 3$。最后，(E'_3)变成了 $3 + 3 + \frac{3}{2} = 6$，矛盾。

至于为什么它不可求解，解释基本上与第二点说明中相应之处的评论相同。

53.2.6　第六：正如 50.8.2 中讨论的那样，我们已经提到过齐次加权多数原则与一个主简单解的存在性之间的区别。这是在第四点说明中完成的，那里给出(50:21)中取 = 的一个例子。下面，我们将给出(50:21)中取 > 的一个例子。

我们已经发现，当 $n \leqq 5$ 时，所有简单博弈都是齐次加权多数博弈，所以我们必须假设 $n \geqq 6$。当 $n = 6$ 时，我们还不知道是否存在我们希望的这种例子。下面，我们要给

① 它们是关于 6 个变量的 10 个方程，见第 465 页脚注②。——468，⑥

出的是 $n=7$ 时的一个例子。

令 $n=7$。把 W 定义为这样一些集合 $S[\subseteq I=(1,\cdots,7)]$ 构成的系，这些 S 包含下述 7 个三元集：①

(S_4)： (1,2,4),(2,3,5),(3,4,6),(4,5,7),

(5,6,1),(6,7,2),(7,1,3)

这一定义中包含的原则能够有多种解释方式。

第一种解释是：(S_4) 中的这 7 个集合是在(1,2,4)的基础上通过循环的玩家置换来得到的。也就是说，其全部元素都增加 0、1、2、3、4、5、6 中的任何一个并分别用 1、2、3、4、5、6 取代 8、9、10、11、12、13。②

换句话说：从图 89 中打了 × × × 的集合开始，通过转动图中圆周可得这 7 个集合中的任何一个。

第二种解释是：图 90 以这样一种排列方式显示了玩家 1，…，7，其中，上述 7 个集合能够被直接标明。它们分别是 6 条直线和圆周○上的数组成的集合。③

不难验证，这个 W 满足 $(49:W^*)$，但我们将这一问题留给对此有兴趣的读者。W^m 显然由 (S_4) 的 7 个集合组成。

结合第三和第四点说明，容易证明，这不是一个加权多数博弈。我们略去这一论述。

另一方面，决定一个主简单解的 50.4.3 和 50.6.2 的方程 (50:8) $(U=W^m)$ 是：

---

① 因此，W^m 有 7 个元素。——469，①

② 数论说法是：以 7 为模。——469，②

③ 熟悉射影几何学的读者会注意到，图 90 是所谓 7 点平面几何图。问题中的 7 个集合是它的每个包含 3 个点的直线以及圆周○。

要补充的一点是，其他射影几何学似乎不适用于我们当前的目的。——469，③

(E_4): $\qquad x_a + x_b + x_c = 7$,

其中(a,b,c)取遍(S_4)的 7 个集合。$x_1 = \cdots = x_7 = \frac{7}{3}$显然是它的解。①

现在，我们能够证明，50.8.2 中(50:21)中的 > 成立。 470
事实上：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{49}{3} > 14 = 2n。$$

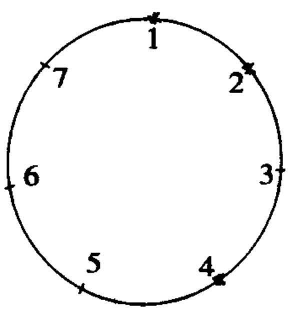


图 89

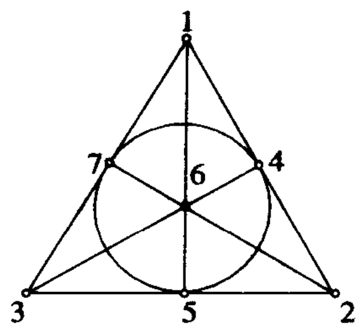


图 90

正如我们在第二、第三和第五点说明中讨论的博弈那样，这个博弈也对应着一个值得仔细研究的组织原理。在这一博弈中，W^m 的集合，即关键胜利联盟总是少数玩家组成的联盟(三元集)。不过，任何一位玩家都没有较其他玩家的优势：图 89 及其讨论表明，玩家 1，…，7 的任何循环置换——即图 89 的圆周的任何转动——都不改变该博弈的结构。任何一位玩家都能够被转移到另一位玩家的

① 不难看出，这是其惟一的解。——469，④

位置。① 因此，该博弈的结构并非由个别玩家性质②决定，而由玩家之间的关系决定。事实上，胜败取决于由(S_4)③给出的相关三位玩家之间达成的协议。

54. 适宜博弈中全部解的确定

54.1 简单博弈不同于主解的解

54.1.1 迄今为止，我们关于简单博弈的讨论大多强调的是50.5.1—50.7.2中讨论的那种解，尤其是50.8.1的主简单解。基于前面几节中的内容——尤其是53.2中的例子，这一方法似乎并不能充分恰当地处理我们的问题的各个方面。

471 首先，我们已经看到，无法指望所有简单博弈都有上述类型的解。当$n=6$时，大量新情况就已经出现了。这是有显著意义的，因为从组合数学的角度看，6是一个相当大的数，但从社会组织的角度看，它却是一个很小的数。

其次，即便解是存在的，即便这是对于齐次加权多数博弈来说的，这些解也不能解释所有的事情。对于这类博

① 不过，从28.2.1意义上说，该博弈并非公平博弈，因为两个三元集(1,2,4)和(1,3,4)有不同行为：前者属于W，后者属于L。[所以，在该博弈的$\gamma=1$的简化型中，前者的$v(S)=4$，而后者的$v(S)=-3$。]——470，①

② 由博弈规则赋予他们的性质。——470，②

③ 在这一博弈中，不存在两位玩家之间有意义的关系：有可能通过适当的置换把(1，…，7中的)任意两位玩家变成另两位玩家，但博弈保持不变。——470，③

弈的大多数原型来说，正如我们知道的那样，本质三人博弈有记号$[1,1,1]_h$，存在很多解。而且，我们在第 33 节中的讨论表明，对于我们要讨论的理论的特征及其含义来说，它们都是基本的，尤其是，一些基本的解释事实上是在那里首次得出的。

54.1.2 所以，我们确定一个简单博弈的全部解，而且，在还不能对所有简单博弈做到这一点的情况下，我们要对尽可能多的简单博弈这么做。尤其是，我们至少要对 n 的每个取值的一个简单博弈做到这一点。关于 n 个参与者的解的分类结构的可能性和原则，这样的结果将会提供一些信息。

事实上，如果对于其他博弈来说这类信息也是能够得到的，那么，它同样是受欢迎的。然而，在系统地确定解时，简单博弈较其他博弈有一个明显的优点：对于简单博弈来说，30.1.1 的所谓初始条件并不带来困难（见 31.1.2），因为那里的每个集合 S 要么是肯定必要的，要么是肯定不必要的（见 49.7）。

同样正确的是，我们设想的解的决定仅仅提供了零零星星几个例子的信息。但是，它们毕竟包括了所有的 n，使我们能够随意改变 n。这必定会带来一些基本的见解。

54.2 全部解已知的博弈的枚举

54.2.1 让我们总结一下全部解已知的例子有多少。我们有三类这样的例子：

(a) 31.2.3 中的所有非本质博弈［见 31：P，附带有 31.2.1 中 (31：I)］。

(b) 旧理论中的本质三人博弈和（有一般剩余的）

新理论中的本质三人博弈。(前者见 32.2.3,后者见 47.2.1—47.7 的分析。)

(c)成分博弈的全部解已知的可分解博弈。[见 46.6 中的(46:I)]

显然,我们能够借助(c)把(a)和(b)结合起来,从而得到全部解已知的博弈。① 在这一构筑过程中,(a)仅仅提供"哑玩家"(见 43.4.2 末尾),因此,我们完全可以忽
472 略它,因为我们要的是结构信息。因此,留给我们的是把(c)重复运用于(b)而得到的那些博弈。如此,我们能够得到的博弈是本质三人博弈的合成。②

54.2.2 这给出全部解已知的 $n=3k$ 人博弈。由于 k 是随意的,我们能够使 n 随意大。就此而言,事情是令人满

---

① 这能够被表达为:

根据 43.3 末尾和(43:E)的分解分拆的定义,一个给定的博弈 Γ 是其不可分解的成分的合成。43.4.2 中的(43:L)告诉我们,组成这一分拆的参与者集合是一元集或三元以上的集合。

最简单的情况是,它们都是一元集。根据 43.4.1 中的(43:J),这意味着,该博弈是非基本博弈,即它使我们回到了情况(a)。

紧接着的最简单情况是,它们是一元集或三元集。这些正是我们能够根据(c)从(a)和(b)构造的博弈,即我们知道这些博弈的全部解。

这是令人满意的,因为这表明,一个自然的分类是按照不可分解的成分博弈[即分解分拆的元素,见 43.4.2 中的(43:L)]的大小进行分类:我们在获得全部解方面的进步恰好沿着这种分类给出的路线进行。

它还强调了这些结果是多么有限:事实上,一个博弈完全可分解是一个十分特殊的情况。[根据 42.5.2 末尾的准则,请记住 41.3.2 中(41:6)或(41:7)的定义方程!]典型 n 人博弈是不可分解的且无法借助(c)来得到。——471,①

② 通过应用策略等价,我们能够假设它们都有简化型。不过,我们分别用 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 记它们的 γ,我们不能指望通过改变单位来把它们都弄得等于 1(除非 $k=1$)。事实上,它们的比率 $\gamma_1:\cdots:\gamma_k$ 不因单位改变而变化。——472,①

意的。然而，这样的 n 人博弈只不过是本质三人博弈的聚合——现实中，玩家组成三人集合，博弈规则未能使其相互联系起来。事实上，我们关于可分解博弈的解的结果表明，这些玩家集合的一种联系总是在典型解中提供的——即通过典型行为标准来提供的。但是，我们自然想明白普通的典型联系如何明确地由博弈规则确立起来，并影响玩家组织——即解或行为标准。而且，我们想就大数玩家做到这一点。

因此，我们必须寻找更多有可能确定其全部解的 n 人博弈。

54.3　分析简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$ 的理由

54.3.1　正如上面指出的那样，我们要寻找典型简单博弈。① 对于每个 $n \geqq 3$，似乎总存在一个特定的简单博弈，关于这一博弈，全部解的决定是能够做到的。对于一个给定的 n，这是惟一一个全部解能够一般地决定的 n 人博弈。这显然赋予它一个特别有意义的地位。我们将看到，它允许若干方面的有意思解释。

问题中的博弈已经在 52.3 和 52.4 的(52:B)中出现过。它是齐次加权多数博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$（n 位玩家）。

54.3.2　正如我们在 52.3 中讨论的那样，在这一博弈中，最小胜利联盟是如下集合 S：$(1,n),\cdots,(n-1,n)$ 和 473
$(1,\cdots,n-1)$。也就是说，玩家 n 只要找到任意一个盟友

① 为此，我们利用旧理论，即剩余为零。见 51.6 中的第三和第四点说明。——472，②

都能够取胜，但是如果他完全被孤立了，那么，他将失败。[①] 我们对这一结果做几点说明：

第一：上述规则强烈意味着，玩家 n 居于特权地位：他只需一个盟友就可以取得胜利，而其他玩家无一例外地相互需要。实际情况是：玩家 n 需要一个二人联盟，其他玩家则需要 $n-1$ 个人的联盟，因此，特权只能存在于 $n-1>2$ 即 $n\geqq4$ 的情况。

当 $n=3$ 时，三位玩家之间的确没有什么不同：此时，我们有博弈$[1,1,1]_h$，惟一的本质三人博弈，且显然是对称的。

第二：玩家 n 的特权是能够存在的最大特权：我们要求玩家 n 至少找到一个盟友才能取胜，这是最低要求。[②] 我们不可能规定 n 无需盟友就能够取胜，这等于说一元集 (n) 取胜——这与该博弈是本质博弈不相容。（49.2 中对此进行了广泛讨论。）

55. 简单博弈$[1,\cdots,1,n-2]_h$

55.1 准备性说明

55.1 我们在前面讨论了这个博弈的全部解的确定。

---

① 正如每个一元集都必定失败。——473，①

② 我们在前面说过，当 $n=3$ 时，玩家 n 没有特权可言，现在我们说他有着不应该有的特权！然而，$n=3$ 并非如下说法的例外：因为仅仅存在一个本质三人博弈，一位玩家在其中为自己找到的位置也可以被称为最好的位置——因为这是存在着的惟一一个位置。——473，②

上述讨论表明，它们落入一个分类系列之中，而且表现出较为多变的特征。它们为我们在前面提到的解释提供了一个机会。我们将讨论其中的一些，在随后的研究中会有更多这方面的讨论。

解的这一完全列举的严格推导将在 55.2—55.11 中给出。这一推导相当复杂。就像第 9 章中我们就可分解博弈的解所做的那样，我们将详细给出这一枚举：其证明本身就是对其进行解释的一个方便而自然的工具。它在若干阶段提供了用文字揭示被探讨组织新出现的特点的机会。事实上，与第 9 章中的证明相比，在这一章的证明中，这种情形更为显著。

55.2　占优和首要玩家：情况(I)和(II)

55.2.1　有了这些说明，我们继续博弈$[1,\cdots,1,n-2]_h$（n 个玩家）的系统研究。我们假设该博弈有正规化的简化型，$\gamma=1$。

首先，我们有如下结果： 474

(55:A)　对于 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，　$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$$

的充分必要条件是，要么

(55:1)　$\alpha_n>\beta_n$　且对于某些 $i=1,\cdots,n-1$，　$\alpha_i>\beta_i$

要么

(55:2)　对于所有 $i=1,\cdots,n-1$，　$\alpha_i>\beta_i$。

证明：这与 49.7.2 中的(49:J)相同，因为 W^m 由集合 $(1,n),\cdots,(n-1,n)$ 和 $(1,\cdots,n-1)$ 组成。

注意，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0$ 允许我们从(55:2)推出

(55:3) $\alpha_n < \beta_n$。

所以：

(55:B) $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 或 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ 的必要条件是 $\alpha_n \neq \beta_n$。

证明：根据对称性，我们只需考虑 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。我们看到，由(55:1)或(55:3)，无论何种情况，总有 $\alpha_n \neq \beta_n$。

这两个看似简单的结果却值得说明。

我们在 54.3 中讨论了这个博弈中的玩家 n 拥有特权。[①] 他相当于处于垄断的地位，不过，一个无法逃避的约束是(见上面第二点说明)，他必须至少找到一个盟友。也就是说，他之外的全部玩家的总联盟能够打败他。我们称这个玩家是这个博弈中的*首要玩家*。[②]

55.2.2 在(55:1)和(55:2)中，这些情形十分清楚。你也许会说，(55:1)是首要玩家和随意一位盟友(玩家 $i=1,\cdots,n-1$ 中的任意一位)占优的直接形式，而(55:2)可以被说成反对他的总合作状态。(55:1)、(55:3)或(55:B)表明，在一个占优中，(55:1)中首要玩家受到有利影响(首要玩家的直接占优形式)；(55:2)中首要玩家受到不利影响(反对首要玩家的总合作)。在一个占优中，任何其他玩家都能够不受影响。[③]

---

① 除了 $n=3$ 时的情况，对此，后面将有更多说明。——474，①

② 至于 $n=3$，54.3 末尾的第一点说明应该被牢记在心。——474，②

③ 也就是说，对于 $i=1,\cdots,n-1$ 中的某一个，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 且 $\alpha_i=\beta_i$。只有在 $n\geq 4$ 时，这样的事情才会实际发生，见有关 $n=3$ 时的结果。——474，③

55.2.3 现在,考虑这个博弈的一个解 V。① 构造 475

$$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\,\alpha_n=\overline{\omega},$$

$$\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}V}\,\alpha_n=\underline{\omega}\text{。}②$$

显然

$$-1\leqq\underline{\omega}\leqq\overline{\omega}\text{。}$$

$\underline{\omega}$、$\overline{\omega}$ 的含义十分清楚:它们分别代表着解 V 中首要的最坏和最好的可能结果。

我们区别两种可能性:

(I) $$\underline{\omega}=\overline{\omega},$$

(II) $$\underline{\omega}<\overline{\omega}\text{。}$$

55.3 情况(I)的解决

55.3.1 考虑情况(I)。这意味着,对于 V 中所有的 $\vec{\alpha}$,

(55:4) $$\alpha_n=\overline{\omega},$$

即在该解内,首要玩家在任何条件下都得到相同数额。换句话说:(I)表达的是,从 33.1 意义上说,首要玩家被隔离了。考虑到首要玩家的核心作用,其第一个可供选择的特征应该符合这一方向。③

55.3.2 接下来,让我们讨论情况(I)中的解 V。

---

① 运用旧理论,见第 472 页脚注②。——475,①

② 如同第 384 页脚注①所做的那样,这些数量能够构造,即最大值和最小值存在且假设能够得以确定。特别注意脚注中的(*)部分。——475,②

③ 提到 33.1,我们重新强调了这一过程与本质三人博弈中相应过程的类似性。

如果回想起本质三人博弈是我们现在考虑的博弈的一种特殊情况,这一过程就显得更为自然了。(例如,见 54.3 中第一点说明。)

(55:C) V恰好是满足(55:4)的$\vec{\alpha}$组成的集合。

476 证明:我们已经知道,V的所有$\vec{\alpha}$都满足(55:4)。反过来,如果一个$\vec{\beta}$满足(55:4),那么,V的每个$\vec{\alpha}$都有$\alpha_n=\beta_n$,因此,(55:B)排除了$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。所以,$\vec{\beta}$属于V。

因此,V是很容易确定的,但是,我们现在必须回答相反的问题:给定一个$\overline{\omega}\geqq-1$,由(55:4)[即由(55:C)]定义的V是一个解吗?也就是说,它满足30.1.1的(30:5:a)和(30:5:b)吗?

对于V中的$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$,(55:B)和(55:4)排除了$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$,从而(30:5:a)自动得到满足。因此,我们只需研究30.1.1的(30:5:b),即我们必须确保如下性质:

(55:5) 如果$\beta_n\neq\overline{\omega}$,那么,对于某一个$\vec{\alpha}$,$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$,有$\alpha_n=\overline{\omega}$。

$n=3$的情况的详细分析表明,这种相似性有一个不能令人满意的地方:在这种情况下,该博弈实际上是对称的,从而,三位玩家中的任何一位都能够被称为首要玩家。(见第474页脚注②)在33.1中,隔离的确能够被用于三位玩家中的任何一位,现在,我们随意将其限定为玩家n!

然而,要想使我们的讨论覆盖所有的$n\geqq3$,我们就无法将这一过程应用于其他玩家:当$n\geqq4$时,首要玩家及其作用是惟一的。

要使这种情况能够暂时地被接受,我们必须牢记情况(II)最终表现为一个合成情况。

因此,当$n=3$时,与32.2.3的分类的比较表明:我们的情况(I)是那里(32:A)的可能情况之一:针对玩家3的歧视;另一方面,我们的情况(II)结合(32:B)包括(32:A)的另外两种可能情况:针对玩家1、2的歧视和非歧视解。所以,(II)实际上是$n=3$时的三种可能性的综合。

这一方案将被推广到所有的n。见55.12.5的第四点说明中的(e)。——475,③

更明确一些说：我们必须确定(55:5)对 $\overline{\omega}$ 增加了什么限制。

(55:5)的 $\beta_n \neq \overline{\omega}$ 能够被分为：

(55:6)　　$\beta_n > \overline{\omega}$,

(55:7)　　$\beta_n < \overline{\omega}$。

我们首先证明：

(55:D)　　在(55:6)的情况下，条件(55:5)自动得到满足。

证明：假设 $\beta_n > \overline{\omega}$，即 $\beta_n = \overline{\omega} + \varepsilon, \varepsilon > 0$。定义

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\},$$

其中，对于 $i = 1, \cdots, n-1, \alpha_i = \beta_i + \dfrac{\varepsilon}{n-1}$，且 $\alpha_n = \beta_n - \varepsilon = \overline{\omega}$。

根据(55:2)，$\vec{\alpha}$ 正是满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的分配。

这样，只剩下情况(55:7)。关于这种情况，我们有：

(55:E)　　对于 $\overline{\omega} = -1$，(55:7)是不可能的。

证明：$\beta_n \geqq -1$，所以不会有 $\beta_n < \overline{\omega} = -1$。

$\overline{\omega} > -1$ 的情况要复杂一些。①

(55:F)　　假设 $\overline{\omega} > -1$ 且情况(55:7)，那么，条件(55:5)等价于 $\overline{\omega} < n - 2 - \dfrac{1}{n-1}$。

证明：假设 $\beta_n < \overline{\omega}$。对于有 $\alpha_n = \overline{\omega}$ 的一个 $\vec{\alpha}$，55.2.1 的 477

① $\overline{\omega} = -1$ 意味着，首要玩家没有被隔离，只不过遭到了最不利的歧视。(见 33.1。)

因此，$\overline{\omega}$ 直接给出一个解，而 $\overline{\omega} > -1$ 则要求对(55:F)进行更为详细的分析。这一点也不令人吃惊：与中间情况的歧视相比，一种极端歧视方式是一个更为基本的命题且不需要那么复杂的调整。——476，①

(55:3)被排除了,即占优关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 必须通过(55:A)中的(55:1)[而非(55:2)]起作用。由于 $\alpha_n > \beta_n$,这个条件等于

(55:8)　　$\alpha_i > \beta_i$　对于某些 $i = 1, \cdots, n-1$ 成立。

因此,(55:5)要求有 $\alpha_n = \overline{\omega}$ 的一个分配 $\vec{\alpha}$ 的存在性和(55:8)成立。

首先,就一个固定的 $i = 1, \cdots, n-1$ 考虑(55:8),那么,这个条件以及 $\alpha_n = \overline{\omega}$ 能够由 $\vec{\alpha}$ 满足的充分必要条件是,β_i 和 $\overline{\omega}$ 与 $(n-2)$ 个 -1 加起来 <0,即 $\beta_i + \overline{\omega} - (n-2) < 0$,$\beta_i < n - 2 - \overline{\omega}$。所以,$i = 1, \cdots, n-1$ 时,(55:8)得不到满足的充分必要条件是

(55:9)　　$\beta_i \geqq n - 2 - \overline{\omega}$,　$i = 1, \cdots, n-1$。

(55:5)表达的是,对于 $\beta_n < \overline{\omega}$ 的 $\vec{\beta}$,这样的事情是不应该发生的,即一个分配 $\vec{\beta}$ 不可能同时满足(55:9)和 $-1 \leqq \beta_n < \overline{\omega}$。[①] 这意味着,$n-1$ 个加数 $(n-2-\overline{\omega})$ 与一个加数 -1 之和必须 >0,即 $(n-1)(n-2-\overline{\omega}) - 1 > 0$,$n - 2 - \overline{\omega} > \frac{1}{n-1}$,从而 $\overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}$。

结合(55:E)、(55:F)并回忆(55:D)以及有关(55:5)、(55:6)和(55:7)的说明,我们总结如下:

(55:G)　　令 $\overline{\omega}$ 是任意一个满足下式的数:

$$-1 \leqq \overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}。$$

---

① 我们正假设,对于 $i = 1, \cdots, n-1$,(55:9)意味着 $\beta_i \geqq -1$。这意味着,$n - 2 - \overline{\omega} \geqq -1$,$\overline{\omega} \leqq n-1$。事实上,$\overline{\omega} > n-1$ 必须被排除,因为它使得任何分配都无法满足(55:4):那样的话,$\overline{\omega}$ 和 $-(n-1)$ 之和就会 >0。

因此,假设(55:F)意味着:$\overline{\omega} \leqq n-1$。——477,①

构造 $\vec{\alpha}$ 组成的集合 V,其中 $\vec{\alpha}$ 满足

$$\alpha_n = \overline{\omega}。$$①

这些正是情况(I)下的全部解。

数量 $n-2-\dfrac{1}{n-1}$ 的第一批取值是: 478

n	3	4	5	6
$n-2-\dfrac{1}{n-1}$	$\dfrac{1}{2}=0.5$	$\dfrac{5}{3}=1.67$	$\dfrac{11}{4}=2.75$	$\dfrac{19}{5}=3.8$

图 91

55.3.3 这一结果的解释并不困难:

这一行为标准(解)的基础是把首要玩家从博弈中排除出去。这使得其他玩家之间的分配变得相当不确定,即任何一个分配,只要它给予首要玩家"约定"的数额 $\overline{\omega}$,该分配就属于解。"约定"数额的上限是 $\overline{\omega}$。我们也能够按照 33.1.2 的思路得到一个具体的值,$n-2-\dfrac{1}{n-1}$。这不是我们现在要考虑的问题。

55.4 情况(II):$\underline{V}$的确定

55.4.1 现在,我们转向较为困难的情况(II)。(见

① 与 33.1 中 $n=3$ 的特殊情况的讨论——指第 475 页脚注③——相比,我们注意到,这对应着那里的 c。对于 $n=3$,我们的 $n-2-\dfrac{1}{n-1}$ 变成了那里的 $\dfrac{1}{2}$。——477,②

第 475 页脚注③。）我们有

$$-1 \leqq \underline{\omega} < \overline{\omega}。$$

这暗示着 V 的如下分解，V 分解为三个互不相交的集合：

$\underline{V}$：V 中满足 $\alpha_n = \underline{\omega}$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合，

$\overline{V}$：V 中满足 $\alpha_n = \overline{\omega}$的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合，

V^*：V 中满足$\underline{\omega} < \alpha_n < \overline{\omega}$的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合。

根据$\underline{\omega}$、$\overline{\omega}$ 的性质（见 55.2.3 开头），$\underline{V}$、$\overline{V}$ 都不可能是空集——但是，关于 V^*，我们却不能下这样的定论。①

55.4.2 让我们首先研究$\underline{V}$。

(55:H) 如果 $\vec{\alpha}$ 属于$\underline{V}$且 $\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V} \cup V^*$，那么，$\alpha_i \geq \beta_i$，$i = 1, \cdots, n-1$。

证明：假如对于某个 $i = 1, \cdots, n-1$，$\beta_i > \alpha_i$。由于 $\alpha_n = \underline{\omega}$，$\beta_i > \underline{\omega}$，所以 $\beta_n > \alpha_n$。根据（55:1），$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$ 是不可能的，因为 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都属于 V。

479 构造

$$\underline{\alpha}_i = \mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}\underline{V}}\, \alpha_i,$$

其中 $i = 1, \cdots, n-1$。②

（55:H）直接给出：

(55:I) 如果 $\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V} \cup V^*$，那么，

---

① 实际上，在（55:V）的情况下，V^* 就是一个空集。——478，①

② 我们能够构造这一数量，即这些最小值存在且假设能够像第 384 页脚注①中那样断定。特别要注意那里的（*）部分。那里有关 V 的说法对与$\underline{V}$来说也成立，它是 V 与满足 $\alpha_n = \underline{\omega}$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的封闭集的交集。——479，①

$$\underline{\alpha}_i \geqq \beta_i, \quad i=1,\cdots,n-1。$$[①]

我们要进一步证明

(55:J)　　$$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} \geqq 0。$$[②]

证明：假设 $\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i + \underline{\omega} < 0$，那么，我们能够构造分配 $\vec{\gamma} = \{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$，当 $i=1,\cdots,n-1$ 时，$\gamma_i > \alpha_i$，且 $\gamma_n = \underline{\omega}$。[③]

$\bar{\text{V}}$ 不是空集，从 $\bar{\text{V}}$ 中选择一个 $\vec{\beta}$，那么，根据(55:I)，对于 $i=1,\cdots,n-1$，$\beta_i \leqq \underline{\alpha}_i < \gamma_i$，从而，根据(55:2)，$\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$。由于 $\vec{\beta}$ 属于 V，这就排除了 $\vec{\gamma}$ 属于 V。

因此，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$ 有 $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$。如果 $\vec{\alpha}$ 属于$\underline{\text{V}}$，那么，$\alpha_n = \underline{\omega} = \gamma_n$，所以，$\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$ 与(55:B)矛盾。这样，$\vec{\alpha}$ 必定属于 $\bar{\text{V}} \cup \text{V}^*$。根据(55:I)，对于 $i=1,\cdots,n-1$，$\alpha_i \leqq \underline{\alpha}_i < \gamma_i$。但是，由于 $\vec{\alpha} \succ \vec{\gamma}$，(55:A)中的(55:1)和(55:2)要求至少对于 $i=1,\cdots,n-1$ 中的某一个，$\alpha_i > \gamma_i$。这样，我们得出一个矛盾。

现在，$\underline{\text{V}}$的确定是能够完成的：

(55:K)　　$\underline{\text{V}}$恰好有一个元素：

$$\vec{\alpha}^0 = \{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{w}\}。$$

证明：令 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\}$ 是$\underline{\text{V}}$中的一个元素，那 480

---

① 注意，对于$\underline{\text{V}}$中的 $\vec{\beta}$，我们却不能这么说，原因是 β_i 有可能大于最小值 $\underline{\alpha}_i$。见(55:L)。——479，②

② 见(55:12)。——479，③

③ 注意，根据它们的定义，全部 $\underline{\alpha}_i \geqq -1$，$(i=1,\cdots,n-1)$ 且 $\underline{\omega} \geqq -1$，从而所有 $\gamma_i \geqq -1$，$(i=1,\cdots,n-1,n)$。——479，④

么，根据这些数量的定义，

$$(55:10)\qquad \begin{cases}\alpha_i \geqq \underline{\alpha}_i, & i=1,\cdots,n-1,\\ \alpha_n = \underline{\omega}。\end{cases}$$

现在 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$，而且根据(55:J)，$\sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i + \underline{\omega} \geqq 0$，从而 > 被从(55:10)的所有不等式中排除了。

因此

$$(55:11)\qquad \begin{cases}\alpha_i = \underline{\alpha}_i, & i=1,\cdots,n-1,\\ \alpha_n = \underline{\omega}。\end{cases}$$

即

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\} = \{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}。$$

所以，$\underline{V}$不可能有不同于$\{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}$的元素。因为$\underline{V}$不是空集，这是其惟一的元素。

55.4.3 注意，由于 $\vec{\alpha}^{0} = \{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}$ 属于$\underline{V}$，它必然是一个分配。所以，我们能够把(55:J)加强为

$$(55:12)\qquad \sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i + \underline{\omega} = 0。$$

我们还能够把(55:I)加强为：

(55:L) 如果 $\vec{\beta}$ 属于 V，那么，

$$\underline{\alpha}_i \geqq \beta_i,\quad i=1,\cdots,n-1。$$

证明：对于 $\bar{V}\cup V^{*}$ 中的 $\vec{\beta}$，我们已经在(55:I)中说明了这一点，对于$\underline{V}$中 $\vec{\beta}$，(55:K)甚至给出 $\beta_i = \underline{\alpha}$。

最后，我们证明

$$(55:M)\qquad \underline{\omega} = -1。$$

证明：假设$\underline{\omega} > -1$，即$\underline{\omega} = -1+\varepsilon$，$\varepsilon>0$。定义 $\vec{\beta} =$

$\{\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \beta_n\}$，其中，$\beta_i = \underline{\alpha}_i + \frac{\varepsilon}{n-1}$，$i = 1, \cdots, n-1$，$\beta_n = \underline{\omega} - \varepsilon = -1$。$\vec{\beta}$ 是一个分配[见(55:12)]。$\beta_n < \underline{\omega}$，或同样地，(55:L)把 $\vec{\beta}$ 从 V 中排除了。

因此，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。根据(55:L)，$\alpha_i$ 481
$\leqq \underline{\alpha}_i < \beta_i$，$i = 1, \cdots, n-1$。但是，由于 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，(55:A)中的(55:1)和(55:2)要求 $\alpha_i > \beta_i$ 至少对于某个 $i = 1, \cdots, n-1$ 成立。这样，我们遇上了一个矛盾。

注意，(55:12)现在变成了

(55:N) $$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i = 1。$$

这里的分析的基本结果是(55:K)、(55:L)和(55:M)。我们将其总结如下：[①]

对于首要玩家来说，最坏的可能结果是完全失败(值 -1)。在 V 中，有且只有一种这样的安排——即分配，而对于其他玩家来说，这是最好的结果。

这种安排是，其余玩家完全合作来对付首要玩家。[②]

读者将会注意到，这一段文字描述虽不复杂，却只能通过数学方法，而不能用文字表述来证明。

55.5　情况(II)：$\bar{\text{V}}$ 的确定

55.5.1　下面，我们能够研究 $\bar{\text{V}}$。

---

① 当然，所有这些仅仅适用于情况(II)。——481，①

② 在 55.2 最后一部分，我们使用过这一表述，不过意义有些不同。——481，②

(55:O) 考虑一个分配 $\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\beta_i\geqq\underline{\alpha}_i$ 且 $\beta_n\geqq\underline{\omega}$，那么，$\vec{\beta}$ 属于 V。

证明：假设 $\vec{\beta}$ 不属于 V，那么，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$，有 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。所以，(55:A) 的 (55:1) 或 (55:2) 必定成立。由于 $\vec{\alpha}$ 属于 V，$\alpha_n\leqq\overline{\omega}\leqq\beta_n$，而且这排除了 (55:1)。根据 (55:L)，对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\alpha_i\leqq\underline{\alpha}$，从而 $\alpha_i\leqq\underline{\alpha}\leqq\beta_i$ 至少对于某个 $i=1,\cdots,n-1$ 来说成立，这排除了 (55:2)。所以，两种情况下我们都面临着一个矛盾。

(55:P) $\underline{\alpha}_i\geqq n-2-\overline{\omega}$， $i=1,\cdots,n-1$。

证明：假设对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\underline{\alpha}_i<n-2-\overline{\omega}$，即

$$-(n-2)+\underline{\alpha}_i+\overline{\omega}<0。$$

482 那么，我们能够选择 $\beta_j\geqq-1$ ($j=1,\cdots,n-1$，$j\neq i$，$n-2$ 个 j 的取值)，$\beta_i\geqq\underline{\alpha}_i$，$\beta_i>\overline{\omega}$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\beta_j=0$，构造分配

$$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}。$$

这个 $\vec{\beta}$ 满足条件 (55:O)，从而它属于 V。但是，根据这些数量的定义，这要求 $\beta_n>\overline{\omega}$。

现在，我们令

(55:13) $\alpha_*=\mathrm{Min}_{i=1,\cdots,n-1}\underline{\alpha}_i$。①

(55:P) 说明：

(55:14) $\alpha_*\geqq n-2-\overline{\omega}$。②

① 这一次，最小值是针对一个有限值域计算的！——482，①

② 见 (55:R)。——482，②

用 S_* 记满足

(55:15) $$\underline{\alpha}_i=\alpha_*$$

的 $i(=1,\cdots,n-1)$ 组成的集合。这个集合必定有如下两个性质：

(55:Q) $S_*\subseteq(1,\cdots,n-1)$，$S_*$ 不是空集。

55.5.2 我们继续：

(55:R) $$\alpha_*=n-2-\overline{\omega}。$$

(55:S) $\overline{V}$ 由这样一些元素组成：$\vec{\alpha}^i$，其中 i 取遍 S_*，且 $\vec{\alpha}^i=\{\alpha_1^i,\cdots,\alpha_{n-1}^i,\alpha_n^i\}$ 满足

$$\alpha_j^i=\begin{cases}\underline{\alpha}=\alpha_*, & j=i,\\ \overline{\omega}, & j=n,\\ -1, & \text{其他。}\end{cases}$$

(55:R)和(55:S)的证明：首先，我们考虑 $\overline{V}$ 的一个元素 $\vec{\beta}$。

如果对于所有的 $i=1,\cdots,n-1$，$\beta_i<\underline{\alpha}_i$，那么，(55:2)给出 $\vec{\alpha}^0$，因为 $\vec{\alpha}^0=\{\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1},\underline{\omega}\}$。由(55:K)，$\vec{\alpha}^0$ 属于 V，所以 $\vec{\alpha}^0$、$\vec{\beta}$ 都属于 V。这是不可能的。所以

(55:16) 对于某个 $i=1,\cdots,n-1$，$\beta_i\geqq\underline{\alpha}_i\geqq\alpha_*$。

必然有

(55:17) $\beta_j\geqq-1$，$j=1,\cdots,n-1$，$j\neq i$，

而且，由于 $\vec{\beta}$ 属于 $\overline{V}$，

(55:18) $\beta_n=\overline{\omega}$。

现在，$\sum_{j=1}^{n}\beta_j=0$，而且，根据(55:14)，$-(n-2)+\alpha_*+\overline{\omega}\geqq0$，因此，$>$ 被从(55:16)和(55:17)的不等式中排除 483

了。所以，$\underline{\alpha}_i = \alpha_*$，即 i 属于 S_*。而且，

$$\beta_j = \begin{cases} \underline{\alpha}_i = \alpha_*, & j = i, \\ \overline{\omega}, & j = n, \\ -1, & \text{其他}, \end{cases}$$

即如上定义的 $\vec{\beta} = \vec{\alpha}^i$。

这样，我们看到：

(55:19) $\overline{\mathrm{V}}$ 的每个 $\vec{\beta}$ 必然是 i 属于 S_* 的一个 $\vec{\alpha}^i$。

现在，$\overline{\mathrm{V}}$ 不是空集，从而 V 中存在一个 $\vec{\alpha}^i$（i 属于 S_*）。所以，这个 $\vec{\alpha}^i$ 是一个分配，进而 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i = 0$，即 $-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} = 0$。这等价于(55:R)。

最后，考虑 S_* 中任意一个 i。因为(55:R)成立，我们有

$$-(n-2) + \alpha_* + \overline{\omega} = 0。$$

所以，$\sum_{j=1}^{n} = 0$，即 $\vec{\alpha}^i$ 是一个分配。但是，$\alpha_i^i = \underline{\alpha}_i = \alpha_*$，$\alpha_n^i = \overline{\omega}$，所以(55:O)保证了 $\vec{\alpha}^i$ 属于 V。而且，由于 $\alpha_n^i = \overline{\omega}$，$\vec{\alpha}^i$ 甚至属于 $\overline{\mathrm{V}}$。即

(55:20) i 属于 S_* 的每个 $\vec{\alpha}^i$ 都是一个分配且属于 $\overline{\mathrm{V}}$。

(55:19)和(55:20)合起来给出(55:S)。(55:R)已在前面得到证明。故整个证明完成。

55.5.3 这一分析的基本结果是(55:R)、(55:S)以及集合 S_* 的引入。对上面的分析进行文字总结还是可能的。①

---

① 当然，所有这些仅仅适用于情况(II)。——483，①

对于首要玩家来说，最好的可能结果赋予它一个值 $\bar{\omega}$。为此，他只需在特定玩家集合 $S_\bullet$ 中随意选择一个盟友。如 55.4 末尾提到的那样，这个集合由玩家 $1,\cdots,n-1$ 中这样一些玩家组成，在完全合作反对首要玩家的状态下，这些玩家的待遇最差。

因此，当玩家 $1,\cdots,n-1$ 联合起来完全战胜首要玩家的时候，在他们自己之间做出的安排决定着他实现完全胜利情况下的行为。基本上不同的情形之间的这一"相互影响"值得我们注意。[①] 还有，有意思的是，当首要玩家的目的是完全胜利时，他的自然盟友同时也是潜在反对他的联盟中待遇最差的成员。[②] 484

55.4 关于阐述和证明之间的对比的总结说明仍然适用。

55.6　情况(II)：$\mathscr{A}$ 和 $S_\bullet$

55.6　我们在 55.4 和 55.5 中确定了 V 的两部分 $\underline{\mathrm{V}}$ 和

---

① 在 4.3.3 中，我们强调过一个分配——即其属于一定行为标准(解)——的"实际"存在给相同标准的其他分配造成的影响。我们已经发现的 $n\geq 3$ 的博弈的所有解都能够被用于说明这一原理。我们在 25.2.2 中特别提到了它。然而，当目前这个例子尤其引人注目。——484，①

② 用于说明这一原理的政治情形是人们熟知且与之联系着的，其一般性常常得到确认。不过，不可否认，能够找到的支持这一原理的理由又不比若干有冲突的原理的理由更为充分。

关键是，对于这一特殊博弈——即社会结构——而言，我们现在认为，这一原理成立，且没有其他原理成立。为其提供一个带有一些复杂性的数学证明是必要的。所有用文字表达的貌似合理的论述往往都是缺乏说服力的、含糊的。——484，②

$\overline{V}$。① 接下来,我们研究 V 的最后一个部分:V_*。

令 $\mathscr{A}$ 是这样一些 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,对于 S_* 中所有的 i,有 $\alpha_i=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$。那么,我们有:

(55:T) $\qquad \underline{V}\cup V^*\subseteq\mathscr{A}$。

证明:考虑$\underline{V}\cup V^*$中的一个 $\vec{\alpha}$。我们必须证明的是,对于 S_* 中所有的 i 来说,$\alpha_i=\underline{\alpha}_i$

现在,根据(55:L),对于所有的 $i=1,\cdots,n-1$,有 $\alpha_i\leqq\underline{\alpha}$。因此,我们只需排除,当 i 属于 S_* 时,$\alpha_i<\underline{\alpha}_i$。

对于 S_* 中的 i,构造(55:S)的 $\vec{\alpha}^i$。它属于 $\overline{V}$,所以 $\alpha^i_n=\overline{\omega}$;$\vec{\alpha}$ 属于$\underline{V}\cup V^*$,所以 $\alpha_n<\overline{\omega}$。故,$\alpha_i<\underline{\alpha}_i$ 意味着 $\alpha^i_i=\underline{\alpha}_i>\alpha_i$,所以,根据(55:1),$\vec{\alpha}^i\succ\vec{\alpha}$。这是不可能的,因为 $\vec{\alpha}^i$、$\vec{\alpha}$ 都属于 V。

(55:U) $\qquad \overline{V}\subseteq\mathscr{A}$ 的充分必要条件是,S_* 是一个一元集或 $\alpha_*=-1$。不然,$\overline{V}$ 和 $\mathscr{A}$ 不相交。

证明:考虑 $\overline{V}$ 中的一个 $\vec{\alpha}$。那么,根据(55:S),$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^i$,$i$ 属于 S_*。$\vec{\alpha}^i$ 和 $\mathscr{A}$ 的定义比较清楚地告诉我们,这个 $\vec{\alpha}$ 属于 $\mathscr{A}$ 的充分必要条件是,S_* 有惟一一个元素 i 或 $\alpha_*=-1$。

485 (55:T)和(55:U)的文字上的意义是:待遇最差的组

① 尽管(55:Q)对集合 S_* 进行了限制,但它仍然是未知的。$\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_{n-1}$ 也是未知的,有约束条件(55:N)。它们确定 α_*(它们的最小值)。$\underline{\omega}$、$\overline{\omega}$ 由(55:M)和(55:R)给定。这些位置数的确定将在后面得到论述。见(55:O′)[即(55:L′)、(55:N′)和(55:P′)]。

然而,$\underline{V}$和 $\overline{V}$ 的形式已经被发现了,其余有待确定的东西并非基本特征。——484,③

（S_*，见 55.5 末尾）中的每位玩家在首要玩家没有取得其在完全成功的分配（即$\underline{V}\cup V^*$）中得到的最优结果。当首要玩家被完全打败（即在$\underline{V}$中）时，对于玩家 $1,\cdots,n-1$ 来说，这一点甚至也是成立的（见 55.4 末尾）。当首要玩家完全成功时，那么，这一点仅仅对于一位玩家来说成立，他可以是待遇最差的组（S_*，见 55.5）中的任何一位玩家。

55.7　情况（II′）和（II″）：（II′）的解决

55.7.1　考虑情况 $S_*=(1,\cdots,n-1)$。我们将其称为情况（II′）。在这种情况下，对于所有 $i=1,\cdots,n-1$，$\underline{\alpha}_i=\alpha_*$，（55:N）给出 $(n-1)\alpha_*=1$，即 $\alpha_*=\dfrac{1}{n-1}$，而且（55:R）给出 $\overline{\omega}=n-2-\dfrac{1}{n-1}$。如果 $\vec{\alpha}$ 属于 $\mathscr{A}$，那么，$\alpha_i=\underline{\alpha}_i=\alpha_*=\dfrac{1}{n-1}$，$i=1,\cdots,n-1$。所以，$\alpha_n=-1$，即 $\vec{\alpha}=\left\{\dfrac{1}{n-1},\cdots,\dfrac{1}{n-1},-1\right\}$。由（55:T），对于$\underline{V}\cup V^*$中所有的 $\vec{\alpha}$ 来说，这一点同样成立。

根据（55:K），这个 $\vec{\alpha}$ 显然是$\underline{V}$的惟一元素 $\vec{\alpha}^0$，从而，V^*是空集。所以，$V=\underline{V}\cup\overline{V}$，而且（55:K）、（55:S）给出

（55:V）　　V 有如下元素组成：

（a）$\vec{\alpha}^0=\left\{\dfrac{1}{n-1},\cdots,\dfrac{1}{n-1},-1\right\}$，

（b）$\vec{\alpha}^i$，

其中 $i=1,\cdots,n-1$ 且

$$\vec{\alpha}^i=\{\alpha_1^i,\cdots,\alpha_{n-1}^i,\alpha_n^i\}$$

而

$$\alpha_j^i=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}, & j=i,\\ n-2-\dfrac{1}{n-1}, & j=n,\\ -1, & \text{其他。}\end{cases}$$

(55:V)决定了情况(II′)下的惟一可能解 V。然而，这未必意味着，这个 V 要么是一个解，要么属于情况
486 (II′)。事实上，如果这两个要求都没有得到满足，那么，我们只能间接地证明，情况(II′)下不存在解。因此，我们将证明，两个要求都得到满足。①

55.7.2

(55:W)　　　　(55:V)的 V 是情况(II′)下的惟一解。

证明：我们只需证明，这个 V 是情况(II′)下的一个解——其惟一性来自上述结果，即(55:V)。

情况(II′)容易得到证明：显然，对于这个 V 来说

$$\underline{\omega}=-1,\overline{\omega}=n-2-\frac{1}{n-1},$$

$$\underline{\alpha}_1=\cdots=\underline{\alpha}_{n-1}=\alpha_*=\frac{1}{n-1},S_*=(1,\cdots,n-1)。$$

我们剩下的任务是证明 V 是一个解，即证明 30.1.1 中的(30:5:c)。为此，我们必须确定不被 V 中的元素占优的分配 $\vec{\beta}$。

对于 $\vec{\alpha}^0$ 来说，(55:1)被排除了，原因是 $\alpha_n^0=-1$。所以，

① 这种情况有(55:G)，其中情况(I)已经得到解决。由于(55:G)从一开始就是必要的和充分的，我们没有必要在这里重新分析。——486，①

这一占优关系只能通过(55:2)来起作用,因此它等于 $\alpha_i^0>\beta_i$,即 $\beta_i<\frac{1}{n-1}$,$i=1,\cdots,n-1$。

对于 $\vec{\alpha}^k \succ \vec{\beta}$,$k=1,\cdots,n-1$,当 $i\neq k$ 时,(55:1)被排除了,原因是 $i\neq k$ 时,$\alpha_i^k=-1$。这样,这个占优关系只能通过有 $i=k$ 的(55:1)起作用,因此它等于 $\alpha_j^k>\beta_j$,$j=k,n$,即 $\beta_k<\frac{1}{n-1}$,$\beta_n<n-2-\frac{1}{n-1}$。

所以,$\vec{\beta}$ 不被 V 的元素占优的充分必要条件是:$\beta_i\geqq\frac{1}{n-1}$对于某个 $i=1,\cdots,n-1$ 成立,而且它甚至在 $\beta_n<n-2-\frac{1}{n-1}$的情况下对所有这些 i 成立。

因此,$\beta_n<n-2-\frac{1}{n-1}$的必要条件是 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}\geqq\frac{1}{n-1}$。另外,$\beta_n\geqq-1$。所以,$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$ 意味着这些 $\geqq$ 只能取 $=$,即 $\vec{\beta}=\vec{\alpha}^0$。另一方面,$\beta_n\geqq n-2-\frac{1}{n-1}$的必要条件是 $\beta_i\geqq\frac{1}{n-1}$对于某个 $i(=1,\cdots,n-1)$ 且对于 j 的其他 $n-2$ 个取值有 $\beta_j\geqq-1$。因此,$\sum_{i=1}^{n}$ 再次使这些 $\geqq$ 关系取 $=$,即 $\vec{\beta}=\vec{\alpha}^i$。

如此,不被 V 占优的 $\vec{\beta}$ 是 $\vec{\alpha}^0$ 和 $\vec{\alpha}^1,\cdots,\vec{\alpha}^{n-1}$,它们恰 487
好是 V 的元素。

55.7.3　这个解十分重要,原因在于它是一个有限

集——如我们将要看到的那样，它是具有这个性质的惟一解。如果反对首要玩家的总联盟得以形成，那么，正如 $\vec{\alpha}^0$ 所描述的那样，$n-1$ 个参与者平等地参与该联盟。如果首要玩家找到一个盟友，那么，他给予其盟友的数额等于 $\vec{\alpha}^0$ 给予他的数额并留下其余数额，这由 $\vec{\alpha}'$，…，$\vec{\alpha}^{n-1}$ 描述。

所有这些都是合理的且没有歧视。[①] 无论如何，这都不是惟一的可能解，我们将在 55.3 中找出另一个解[见(55:G)]，而且更多的解将出现在以后的章节中。

55.8 情况(II″)：$\mathscr{B}$ 和 V′占优

55.8.1 接下来，我们考虑称为情况(II″)的 $S_* \neq (1,\cdots,n-1)$。

利用(55:Q)，我们可以将此表述为：

(55:X) $S_* \subset (1,\cdots,n-1)$，$S_*$ 不是空集。

我们也可以说：情况(II′)和(II″)的特征分别是，在反对首要的总联盟中，前者有歧视，后者无歧视。

在具体进入情况(II″)的讨论之前，我们做如下说明：

55.4—55.7 的论证是数学的，但我们在那里得到的中间结果允许简单的文字阐述。也就是说，我们有可能相对频繁地打断数学演绎，相继插入文字说明。

目前的情况则不同，一个较长的数学演绎一经开始，我们就不能随时打断，而必须进行到下一个适合文字说明的地方(55.12)。

① $n=3,4$ 时这个解的特殊情况是我们熟悉的：当 $n=3$ 时，它是本质三人博弈的无歧视解；当 $n=4$ 时，它是我们在 35.1 中讨论的解。——487，①

55.8.2　现在，我们给出这一演绎。

记 $V' = \mathscr{A} \cap V$（V 属于 $\mathscr{A}$ 的那一部分）。根据（55：T）和（55：U），视条件（55：U）是否得到满足，$V' = \underline{V} \cup V^{\cdot} \cup \bar{V} = V$，或 $V' = \underline{V} \cup V^{\cdot}$。

（55：Y）　条件（30：5：c）对于属于 $\mathscr{A}$ 的 V′来说成立。

证明：把（30：5：c）换成 30.1.1 中等价的（30：5：a）和（30：5：b）。

（30：5：a）的证明：由于 $V' \subseteq V$，而 V 的元素之间不可能相互占优，V′的元素之间也不可能相互占优。

（30：5：b）的证明：令 $\vec{\beta}$ 属于 $\mathscr{A}$ 但不属于 V′。那么，488
我们必定能够找到 V′的一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。

首先，$\vec{\beta}$ 甚至不属于 V。从而，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。如果这个 $\vec{\alpha}$ 不属于 $\bar{V}$，那么，它必定属于 V′［见（55：Y）前面的说明］，而且这就证明了我们的命题。所以，我们只需从 $\bar{V}$ 排除 $\vec{\alpha}$ 即可。

假设 $\vec{\alpha}$ 属于 $\bar{V}$，即按照（55：S），$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^{k}$，$k$ 属于 S_{*}。我们有 $\vec{\alpha}^{k} \succ \vec{\beta}$。当 $i \neq k$ 时，（55：1）被排除了，而且（55：2）也因为 $i \neq k$（$i = 1, \cdots, n-1$）时有 $\alpha_i^k = -1$ 而被排除了。这样，这个占优关系只能通过 $i = k$ 时的（55：1）起作用，从而它意味着 $\alpha_k^k > \beta_k$，即 $\beta_k < \underline{\alpha}_k = \alpha_{*}$。然而，这是不可能的，因为 $\vec{\beta}$ 属于 $\mathscr{A}$。

55.8.3　因此，我们现在的任务是找出所有 $\mathscr{A}$ 的解［即所有满足 30.1.1 中的（30：5：c）的集合］。这必然要求确定 $\mathscr{A}$ 中占优关系的本质。

（55：Z）　　对于 $\mathscr{A}$ 中的 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 等价于 $\alpha_n > \beta_n$

且对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的某个i，$\alpha_i>\beta_i$。

证明：对于$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，当$i$属于$S_*$时，(55:1)被排除了，而且，对属于$S_*$的所有$k$来说，(55:2)也因为$\alpha_k=\beta_k(=\underline{\alpha}_k=\alpha_*)$而被排除了。

这样，这一占优关系只能通过i属于$(1,\cdots,n-1)-S$时的(55:1)起作用。这意味着，$\alpha_n>\beta_n$，且$\alpha_i>\beta_i$。

我们已经把全部分配组成的集合换成了$\mathscr{A}$，而且把(55:A)中描述的占优的概念换成了(55:Z)中描述的占优关系。不然的话，寻找全部解的问题就是原来的同一问题。我们的进步是，如我们将会看到的那样，(55:Z)中的占优概念较(55:A)中的占优概念更容易应用。

55.9 情况(II″)：V′的确定

55.9.1 令p是S_*中元素的个数。

我们有：

(55:A′) $$1\leqq p\leqq n-2。$$

证明：这是(55:X)的直接结果。

(55:B′) $$-1\leqq\alpha_*<\frac{1}{n-1}。$$

证明：$-1\leqq\alpha_*$是显见的。接下来，对于S_*中的i，$\alpha_i=\alpha_*$；对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的i，$\alpha_i>\alpha_*$。而且，根

489 据(55:A′)，这些集合都不是空集。所以，$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i>(n-1)\alpha_*$，从而，(55:N)给出$1>(n-1)\alpha_*$，$\alpha_*<\dfrac{1}{n-1}$。

$\mathscr{A}$中的一个$\vec{\alpha}$有p个固定的分量：当i属于S_*时，α_i

$(=\underline{\alpha}_i=\alpha_{\cdot})$；$n-p$ 个变动的分量：α_i，i 属于 $(1,\cdots,n)-S_{\cdot}$。这些分量满足如下条件：

(55:21)　　$\alpha_i \geqq -1$，　i 属于 $(1,\cdots,n)-S_{\cdot}$，

且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$，即

(55:22)　　$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n)-S_{\cdot}}\alpha_i=-p\alpha_{\cdot}$。

(55:21)中的下限加起来小于(55:22)中设定的和，即 $-(n-p)<-p\alpha_{\cdot}$。事实上，这意味着 $\alpha_{\cdot}<\frac{n-p}{p}=\frac{n}{p}-1$。再由(55:A′)，$p<n-1$，所以 $\frac{n}{p}-1>\frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}$，且(55:B′)保证 $\alpha_{\cdot}<\frac{1}{n-1}$。

这样，我们有：

(55:C′)　　域 $\mathscr{A}$ 是 $(n-p-1)$ 维的。

55.9.2　下面，我们详细分析 V′和 $\mathscr{A}$。[①]

令

(55:23)　　$\omega^{*}=n-p-1-p\alpha_{\cdot}$。

根据(55:R)，我们能够写

(55:24)　　$\omega^{*}=\overline{\omega}-(p-1)(\alpha_{\cdot}+1)$。

(55:D′)　　$\omega^{*}=\overline{\omega}$ 的充分必要条件是，$S_{\cdot}$ 是一个一

---

① 后面的引理(55:D′)—(55:P′)是47.5.2—47.5.4的几何演绎的等价分析。技术背景有所不同，但两种证明之间的类似总归是十分显著的——有兴趣的读者可以一步步模仿它们。

(55:C′)表明，几何讨论只能在 $(n-p-1)$ 维空间中进行［根据(55:A′)，这 $\geqq 1$，$\leqq n-2$］。这正是我们使用分析法的理由。（上面所指几何证明是在一个平面中进行的，即它要求维数是2。）——489，①

维集合（即 $p=1$）或 $\alpha_*=-1$，即当且仅当(55:U)的条件没有得到满足。否则，$\omega^*<\overline{\omega}$。

证明：根据(55:A′)和(55:B′)，$p\geqq 1$，$\alpha_*\geqq -1$，(55:24)直接给出我们想要的结果。

(55:E′)　　$\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于}\mathscr{A}}\alpha_n=\omega^*$。

490 (55:F′)　　这个最大值恰好由 $\mathscr{A}$ 中的一个 $\vec{\alpha}$ 取得：

$$\vec{\alpha}^*=\{\alpha_1^*,\cdots,\alpha_{n-1}^*,\alpha_n^*\}$$

$$\alpha_i^*=\begin{cases}\alpha_i=\alpha_*, & i\text{ 属于 }S_*,\\ \omega^*, & i=n,\\ -1, & \text{其他。}\end{cases}$$[①]

(55:E′)和(55:F′)的证明：显然，根据 $\mathscr{A}$ 的定义，对于 $\mathscr{A}$ 中的 $\vec{\alpha}$ 来说，在可变分量 α_i[i 属于$(1,\cdots,n-1)-S_*$]取得它们的最小值时，可变分量 α_n 取得其最大值。这些最小值是 -1。所以，对于这个最大值来说，

$$\alpha_i=\begin{cases}\underline{\alpha}_i=\alpha_*, & i\text{ 属于 }S_*,\\ -1, & i\text{ 属于}(1,\cdots,n-1)-S_*\text{。}\end{cases}$$

现在，$\alpha_n=-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i=-p\alpha_*+(n-1-p)=n-p-1-p\alpha_*$。由(55:23)，这意味着 $\alpha_n=\omega^*$。

我们的结论得证。

---

① 这个定义与(55:D′)的比较告诉我们，这个 $\vec{\alpha}^*$ 是 i 属于 S 的一个 $\vec{\alpha}^i$——即它属于 $\bar{V}$——的充分必要条件是(55:U)得到满足。

由于 $\vec{\alpha}^*$ 属于 $\mathscr{A}$，这与(55:U)的结果一致。——490，①

(55:G′)　　　　$\vec{\alpha}^{\cdot}$ 属于 V′。

证明:对于 $\mathscr{A}$ 的任何 $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}^{\cdot}$ 属于 $\mathscr{A}$,(55:E′)和(55:F′)给出

$$\alpha_n \leqq \alpha_n^{\cdot}\ (=\omega^{\cdot})。$$

这样,(55:Z)排除了 $\vec{\alpha} \succ \vec{\alpha}^{\cdot}$,从而(55:Y)必然要求 $\vec{\alpha}$ 属于 V′。

55.9.3　有了这些准备之后,接下来是我们的演绎的关键部分:

(55:H′)　　如果 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 V′,那么,$\alpha_n=\beta_n$ 意味着 $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$。

证明:考虑 V′中 $\alpha_n=\beta_n$ 的 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$。

令 $\gamma_i=\mathrm{Min}(\alpha_i,\beta_i)\,(i=1,\cdots,n-1,n)$并假设 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i<0$,如 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=-\varepsilon,\varepsilon<0$。

令 $\vec{\delta}=\{\delta_1,\cdots,\delta_{n-1},\delta_n\}$,其中

$$\delta_i=\begin{cases}\gamma_i, & i\text{ 属于 }S_{*},\\ \gamma_i+\dfrac{\varepsilon}{n-p}, & i\text{ 属于}(1,\cdots,n-1,n)-S_{*}。\end{cases}$$

这个 $\vec{\delta}$ 显然是一个分配,而且,当 i 属于 S_*时,有 $\delta_i=\gamma_i=\alpha_i=\beta_i=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,所以 $\vec{\delta}$ 属于 $\mathscr{A}$。我们有 $\delta_n>\gamma_n=\alpha_n=\beta_n$,而且,对于 i 属于$(1,\cdots,n-1)-S_*$,$\delta_i>\gamma_i=\alpha_i$ 或 β_i,因此 $\vec{\delta}\succ\vec{\alpha}$ 或 $\delta\succ\vec{\beta}$。因为 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 V',这把 $\vec{\delta}$ 从 V'中排除了。所以,V′中存在一个 $\vec{\eta}$,$\vec{\eta}\succ\vec{\delta}$。 491

现在,根据(55:Z),$\eta_n>\delta_n$,且对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的 i,$\eta_i>\delta_i$。更不容置疑的是,$\eta_n>\delta_n>\gamma_n=\alpha_n=\beta_n$,$\eta_i>\delta_i>\gamma_i=\alpha_i$ 或β_i。因此,$\vec{\eta}\succ\vec{\alpha}$ 或 $\vec{\eta}\succ\vec{\beta}$。而 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 和 $\vec{\eta}$

都属于 V′,这显然矛盾。

所以,$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i<0$ 是不可能的,这样

(55:25) $$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \geqq 0。$$

现在,$\gamma_i\leqq\alpha_i,\gamma_i\leqq\beta_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$。因此,(55:25)使这些≦关系变成=关系,即 $\gamma_i=\alpha_i=\beta_i$。这证明了$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$。

(55:I′) 对于 V′中所有 $\vec{\alpha}$,α_n 的值正好构成区间

$$-1\leqq\alpha_n\leqq\omega^*,$$

证明:对于 V′中的一个 $\vec{\alpha}$,$\alpha_n\geqq-1$ 是显见的事实,而且 $\alpha_n\leqq\omega^*$ 是(55:E′)的结果。所以,我们只需证明不存在满足如下条件的 y_1:

$$-1\leqq y_1\leqq\omega^*,$$

且对于 V′中的所有 $\vec{\alpha}$,$\alpha_n\neq y_1$。

V′中肯定存在着某个 $\vec{\alpha}$,$\alpha_n\geqq y_1$:事实上,根据(55:G′),$\vec{\alpha}^*$ 属于 V′,且 $\alpha_n^*=\omega^*\geqq y_1$。构造

$$\mathrm{Min}_{\vec{\alpha}\text{属于}V',\alpha_n\geqq y_1}\alpha_n=y_2,$$①

---

① 在这种情况下,不必构造严格最小值,但那样的话,与我们在下面使用的方法相比,达到这一目的的过程要长一些。这个最小值是能够构造的,即它的确存在且被取得,像第 384 页脚注①中那样,这一点是能够断定的。特别应注意那里的(*)部分。那里关于 V 说的事情对于 $\mathscr{B}$ 中的类似集合 V′来说同样成立,对于 V′与满足 $\alpha_n\geqq y_1$ 的 $\vec{\alpha}$ 组成的封闭集的交集来说也同样成立。

正是出于这一封闭性需要,我们必须使用条件 $\alpha_n\geqq y_1$ 而不适用 $\alpha_n>y_1$,虽然我们的真正目的在于后者。但是,在我们正在考虑的情况中,这两者将被认为是等价的。[见(55:26)。]——491,①

而且在V′中选择一个有 $\alpha_n^+ \geqq y_1$ 的 $\vec{\alpha}^{\cdot}$，对于这个 $\vec{\alpha}$，上述 492
最小值被取得：$\alpha_n^+ = y_2$。根据(55:H′)，这个 $\vec{\alpha}^{\cdot}$ 具有惟一性。

这样，$y_2 \geqq y_1$，而且，由于必然有 $\alpha_n^+ \neq y_1$，那么，$y_2 \neq y_1$，即

(55:26) $$y_1 < y_2。$$

由 y_2 的定义得：

(55:27) $$\text{对于不属于 V′的 } \vec{\alpha}, y_1 \leqq \alpha_n < y_2。$$

现在，令 $y_1 = y_2 - \varepsilon, \varepsilon > 0$ 并构造分配

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \beta_n\}。$$

其中，$\beta_n = \alpha_n^+ - \varepsilon = y_2 - \varepsilon = y_1$，对于 $S_{\cdot}$ 中的 i，$\beta_i = \alpha_i^+ = \alpha_i = \alpha^{\cdot}$；对于 $(1, \cdots, n-1) - S_{\cdot}$ 中的 i，$\beta_i = \alpha_i^+ + \dfrac{\varepsilon}{n-1-p}$。

显然，$\vec{\beta}$ 属于 $\mathscr{E}$ 且 $\beta_n = y_1$ 把 $\vec{\beta}$ 排除在V′之外。所以，V′中存在一个 $\vec{\gamma}$ 满足 $\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$。

根据(55:Z)，这意味着 $\gamma_n > \beta_n$ 且对于 $(1, \cdots, n-1) - S_{\cdot}$ 中的 i，$\gamma_i > \beta_i$。

由(55:27)，$\gamma_n > \beta_n = y_1$ 必然要求 $\gamma_n > y_2$。根据(55:27)，$\gamma_n = y_2$ 就意味着 $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}^{\cdot}$。所以，对于上述属于 $(1, \cdots, n-1) - S_{\cdot}$ 的 i，$\gamma_i = \alpha_i^+ < \beta_i$，而不是我们希望的 $\gamma_i > \beta_i$。故，$\gamma_n > y_2$。

因此，对于上述属于 $(1, \cdots, n-1) - S_{\cdot}$ 的 i，$\gamma_n > y_2 = \alpha_n^+$ 且 $\gamma_i > \beta_i > \alpha_i^+$。所以，$\vec{\gamma} \succ \vec{\alpha}^{\cdot}$。但是，$\vec{\gamma}$、$\vec{\alpha}^{\cdot}$ 都属于V′，这构成了矛盾。

55.9.4　由(55:I′)和(55:H′)，我们看到：对于每

个 y,

$$-1 \leqq y \leqq \omega^*,$$

V′中存在惟一一个 $\vec{\alpha}$ 有 $\alpha_n = y$。将这个 $\vec{\alpha}$ 记为

$$\vec{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \cdots, \alpha_{n-1}(y), \alpha_n(y)\}。$$

显然,$\alpha_n(y) = y$,且当 i 属于 S_* 时,$\alpha_i(y) = \alpha_i = \alpha_*$。所以,真正有意义的函数是 $\alpha_i(y)$,i 属于$(1, \cdots, n-1) - S_*$。

将这一结果与(55:I′)结合起来给出:

(55:J′) V′由如下元素:

$$\vec{\alpha}(y)$$

组成,其中 y 取遍区间

$$-1 \leqq y \leqq \omega^*,$$

493 而且 $\vec{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \cdots, \alpha_{n-1}(y), \alpha_n(y)\}$ 满足

$$\alpha_i(y) = \begin{cases} \alpha_i = \alpha_*, & i \text{ 属于 } S_*, \\ y, & i = n, \\ y(\text{和 } i)\text{的一个适宜函数}, & \\ \quad \text{其中 } i \text{ 属于}(1, \cdots, n-1) - S_*。 & \end{cases}$$

55.9.5 最后,

(55:K′) 当 i 属于$(1, \cdots, n-1) - S_*$ 时,(55:J′)的函数 $\alpha_i(y)$ 满足如下条件:

(55:K′:a) $\alpha_i(y)$的定义域是区间

$$-1 \leqq y \leqq \omega^*。$$

(55:K′:b) $y_1 \leqq y_2$ 意味着 $\alpha_i(y_1) \geqq \alpha_i(y_2)$。[①]

(55:K′:c) $\alpha_i(-1) = \underline{\alpha}_i$。

① 即 $\alpha_i(y)$是 y 的一个反单调函数。——493,①

(55:K′:d) $\alpha_i(\omega^*) = -1$。

(55:K′:e) $\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(y) = -p\alpha_* - y$。[①②]

证明:(55:K′:a)的证明:这一结果包含在(55:J′)中。 494

(55:K′:b)的证明:相反,对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的某个 i,假设:$y_1 \leqq y_2$ 且 $\alpha_i(y_1) \leqq \alpha_i(y_2)$。这排除了 $y_1 = y_2$,

---

① 我们可以从这些关系中得出函数 $\alpha_i(y)$[i 属于$(1,\cdots,n-1)-S_*$]的连续性。事实上,我们甚至能够证明得更多,即所谓利普希茨(Lipschitz)条件:

(55:28) $|\alpha_i(y_2) - \alpha_i(y_1)| \leqq |y_2 - y_1|$。

证明:这一关系是关于 y_1、y_2 对称的,所以我们可以假设 $y_1 \leqq y_2$。现在,把(55:K′:e)应用于 $y = y_1$ 和 $y = y_2$ 并相减得

$$\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \{\alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2)\} = y_2 - y_1。$$

根据(55:K′:b),所有这些加数 $\alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2)$ 都 $\geqq 0$,因此它们也都 $\leqq$ 它们的和 $y_2 - y_1$。故,

$$0 \leqq \alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2) \leqq y_2 - y_1。$$

这些不等式也清楚表明,中项是 $|\alpha_i(y_2) - \alpha_i(y_1)|$ 且最后一项是 $|y_2 - y_1|$。所以,我们有

$$|\alpha_i(y_2) - \alpha_i(y_1)| \leqq |y_2 - y_1|。$$

读者将会注意到,我们从不假设连续性,我们证明了它!从技术角度看,这是相当有意思的。——493,②。

② 注意,(55:K′:c)和(55:K′:d)并不与(55:K′:e)冲突。事实上:

当 $y = -1$ 时,(55:K′:e)给出 $\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(-1) = -p\alpha_* + 1$,从而

(55:K′:c)要求 $\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \underline{\alpha}_i = -p\alpha_* + 1$,$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{\alpha}_i = 1$,与(55:N)一致。

当 $y = \omega^*$ 时,(55:K′:e)给出 $\sum_{i\text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(\omega) = -p\alpha_* - \omega^*$,从而

(55:K′:d)要求 $-(n-p-1) = -p\alpha_* - \omega^*$,$\omega^* = n-p-1-p\alpha_*$,与(55:23)一致。——493,③

所以 $y_1 < y_2$。那么，$\vec{\alpha}(y_2) \succ \vec{\alpha}(y_1)$ 是不可能的，因为 $\vec{\alpha}(y_1)$ 和 $\vec{\alpha}(y_2)$ 都属于 V′。

(55:K′:c)的证明：这是 $\vec{\alpha}^{\circ}$ 属于 V′这一事实的重述，事实上，它属于 $\underline{V}$。[见(55:K)，(55:M)。]

(55:K′:d)的证明：这是 $\vec{\alpha}^{\cdot}$ 属于 V′这一事实的重述[见(55:G′)]。

(55:K′:e)的证明：$\vec{\alpha}(y)$ 是一个分配，所以有 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) = 0$。

由(55:J′)，这意味着，$\sum_{i \text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(y) + p\alpha_* + y = 0$，

即 $\sum_{i \text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*} \alpha_i(y) = -p\alpha_* - y$。

55.10 情况(II′)的解决

55.10.1 55.8—55.9 中的结果包含着解 V 的完全描述。事实上：正如我们在 55.8.2 的开头看到的那样，$V = V' \cup \overline{V}$，虽然加数 $\overline{V}$ 可以被忽略(因为它 $\subseteq V'$)的充分必要条件是，条件(55:U)得到满足。$\overline{V}$ 如(55:S)描述的那样，而 V′则如(55:J′)描述的那样。这些描述中使用了参数

$$\underline{\alpha}_i(i=1,\cdots,n-1), \alpha_*, S_*, \overline{\omega}, \omega^*),$$

$$\alpha_i(y)[i \text{属于}(1,\cdots,n-1)-S_*, -1 \leqq y \leqq \omega^*],$$

这些参数服从的约束条件是 55.5.1 中的(55:N)、(55:13)和(55:15)；55.9.2 中的(55:R)、(55:23)和(55:24)；(55:K′)。

由于这部分内容长达七节，为了方便，我们把这些结果全部集中重述如下：

(55:L′)

(55:L′:a)　　S_*是一个集合$\subset(1,\cdots,n-1)$且不是空集。令 p 是 S_* 的元素个数，那么，$1\leqq p\leqq n-2$。

(55:L′:b)　　$\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1}$是$\geqq -1$ 的数，有 $\sum_{i=1}^{n-1}\underline{\alpha}_i=1$。

(55:L′:c)　　对于 S_* 中所有的 i，$\underline{\alpha}_i=\alpha_*$，对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中所有的 i，$\underline{\alpha}_i>\alpha_*$。

(55:L′:d)　　令 $\overline{\omega}=n-2-\alpha_*$，$\omega^*=n-p-1-p\alpha_*$，那么，$\overline{\omega}-\omega^*=(p-1)(\alpha_*+1)$。

(55:L′:e)　　$\alpha_i(\gamma)$是对于$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的 i 定义的， 495

$$-1\leqq\gamma\leqq\omega^*。$$

这些函数满足条件(55:K′:a)—(55:K′:e)。

V 由如下元素组成：

(a)：$\vec{\alpha}(\gamma)$，其中，γ 取遍区间 $-1\leqq\gamma\leqq\omega^*$，且

$$\vec{\alpha}(\gamma)=\{\alpha_1(\gamma),\cdots,\alpha_n(\gamma)\}，$$

有

$$\alpha_i(\gamma)=\begin{cases}\alpha_i=\alpha_*, & i\text{ 属于 }S_*,\\ \gamma, & i=n,\\ (55:\mathrm{L}':\mathrm{e})\text{ 的 }\alpha_i(\gamma), & i\text{ 属于}(1,\cdots,n-1)-S_*。\end{cases}$$

(b)：$\vec{\alpha}^i$，其中，i 取遍全部集合 S_* 且

$$\vec{\alpha}^i=\{\alpha_1^i,\cdots,\alpha_{n-1}^i,\alpha_n^i\}$$

有

$$\alpha_j^i=\begin{cases}\underline{\alpha}_i=\alpha_*, & j=i,\\ \overline{\omega}, & j=n,\\ -1, & \text{其他。}\end{cases}$$

说明：如果 $p=1$，（S_* 是一个一元集）或 $\alpha_*=-1$，那么，$\overline{\omega}=\omega^*$ 且(b)的 $\vec{\alpha}'$ 等同于 $y=\omega^*$ 时(a)的 $\vec{\alpha}(y)$。如果情况不是这样，即 $p\geqq 2,\alpha>-1$，那么，$\overline{\omega}>\omega^*$ 且(b)的 $\vec{\alpha}'$ 与(a)的 $\vec{\alpha}(y)$ 不相交。

读者不难验证，所有这些命题都是前述结果的重述。

55.10.2 （55:L′）必须有类似（55:V）那样的分析。我们必须研究是否得自（55:L′）的 V 都是解且属于情况（II′）。它们之中同时满足这两个条件的解形成情况（II′）中全部解的完备系。我们将证明，（55:L′）的全部 V 的确满足这些条件。

（55:M′）　（55:L′）的 V 恰好是情况（II′）中的全部解。

证明：我们只需证明的是，（55:L′）的每个 V 是情况（II′）中的一个解——这些 V 恰好是得自（55:L′）的全部这类解。

情况（II′）容易得到证明：显然，对于这个 V 来说，

496 $\underline{\omega}=-1$，且（从 55.2—55.5 中给出的它们的定义的意义上说）恰好是（55:L′）中由这些记号赋予的数量①，所以，根据（55:L′:a），

$$S_*\subset(1,\cdots,n-1)。$$

现在，我们只需证明 V 是一个解。在目前情况下，我们将通过证明 V 满足 30.1.1 中的（30:5:a）和（30:5:b）来完成这一任务。

（30:5:a）的证明：假设 $\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于 V。我们必

① $\overline{\omega}$ 得自(b)，$\underline{\alpha}_1,\cdots,\underline{\alpha}_{n-1}$ 得自 $y=-1$ 时的(a)，从而 α_*，S_* 得自（55:L′:c）。——496，①

须区别 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于(55:L′)的(a)和(b)中的哪一种情况。有四种可能的组合:

$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于(a):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(y_1)$,$\vec{\beta}=\vec{\beta}(y_2)$,从而 $\vec{\alpha}(y_1)\succ\vec{\alpha}(y_2)$。当 i 属于 S_* 时,(55:1)被排除了,而且,当 i 属于 S_* 时,$\alpha_i(y_1)=\alpha_i(y_2)=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,从而(55:2)也被排除了。这样,这个占优关系只能通过 i 属于 $(1,\cdots,n-1)-S_*$ 时的(55:1)起作用。根据(55:L′:e),这意味着 $\alpha_n(y_1)>\alpha_n(y_2)$,$y_1>y_2$,且对于 $(1,\cdots,n-1)-S_*$ 中某个适宜的 i,$\alpha_i(y_1)>\alpha_i(y_2)$,这与(55:K′:b)矛盾。

$\vec{\alpha}$ 属于(a),$\vec{\beta}$ 属于(b):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(y)$,$\vec{\beta}=\vec{\alpha}^i$($i$ 属于 S_*),从而 $\vec{\alpha}(y)\succ\vec{\alpha}^i$。现在,(55:1)被排除了,原因是 $\alpha_n(y)=y\leqq\omega^*\leqq\overline{\omega}=\alpha_n^i$;由于 $\alpha_i(y)=\alpha_i^i=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,(55:2)也被排除了。这样,我们有一个矛盾。

$\vec{\alpha}$ 属于(a),$\vec{\beta}$ 属于(b):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^i$($i$ 属于 S_*),$\vec{\beta}=\vec{\alpha}(y)$,从而 $\vec{\alpha}^i\succ\vec{\alpha}(y)$。现在,$\alpha_i^i=\alpha_i(y)=\underline{\alpha}_i=\alpha_*$ 且当 $j\neq i,n$ 时,$\alpha_j^i=-1\leqq\alpha_i(y)$,即 $\alpha_j^i\leqq\alpha_j(y)$,$j=1,\cdots,n-1$。这同时排除了(55:1)和(55:2),从而给出一个矛盾。

$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 属于(b):即 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^i$,$\vec{\beta}=\vec{\alpha}^k$($i$、$k$ 属于 S_*),从而 $\vec{\alpha}^i\succ\vec{\alpha}^k$。现在,$\alpha^n=\alpha_n^k=\overline{\omega}$,与(55:B)矛盾。

(30:5:b)的证明:假设 $\vec{\beta}$ 不被 V 的元素占优。我们希望证明的是,这意味着 $\vec{\beta}$ 属于 V——这就证明了(30:5:b)。

首先,我们假设 $\beta_n\geqq\overline{\omega}$。如果对于所有的 $i=1,\cdots,n-1$,总有 $\beta_i<\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,那么,$\vec{\alpha}(-1)\succ\vec{\beta}$,与我们的假设

矛盾。所以,对于某个 $i=1,\cdots,n-1$,$\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i$。现在,(55:R)的证明中使用的论述表明,必然有 i 属于 S_* 且 $\vec{\beta}=\vec{\alpha}^i$。所以,在这种情况下,$\vec{\beta}$ 属于 V。

497 接着,我们假设 $\beta_n<\overline{\omega}$。如果对于 S_* 中的某个 i,$\beta_i<\underline{\alpha}_i=\alpha_*$,那么,$\vec{\alpha}^{\cdot}\succ\vec{\beta}$ 显然与我们的假设矛盾。所以,对于 S_* 中的所有的 i,总有 $\beta_i \geqq \underline{\alpha}_i=\alpha_*$。

现在,$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$ 给出 $\beta_n=-\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i \leqq n-p-1-p\alpha_*=\omega^*$,即 $-1\leqq\beta_n\leqq\omega^*$。令 $y=\beta_n$。

假设对于 $(1,\cdots,n-1)-S_*$ 中所有的 i,总有 $\beta_i \geqq \alpha_i(y)$,那么,我们显然有 $\beta_i \geqq \alpha_i(y)$,$i=1,\cdots,n$。(对于 S_* 中的 i 和 $i=n$,我们甚至有 $=$,见上。)所以,$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)=0$ 必然要求这些 $\geqq$ 关系只取 $=$。故,$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}(y)$。进而,在这一子情况中,$\vec{\beta}$ 也属于 V。

最后一种可能情况是,对于 $(1,\cdots,n-1)-S_*$ 中某个适宜的 i,$\beta_i<\alpha_i(y)$。(从 $y=\beta_n$ 到某个 $y>\beta_n$)y 的充分小增加将不影响关系 $\beta_i<\alpha_i(y)$。① 对于这个新的 y,我们有 $y>\beta_n$,$\alpha_i(y)>\beta_i$,从而 $\vec{\alpha}(y)\succ\vec{\beta}$ 与我们的假设矛盾。

这样,所有可能情况都被考虑到了。

55.11 完全结果的重新阐述

55.11.1 由我们的问题划分出来的三种情况(I)、

① $\alpha_i(y)$ 是连续的! 见第 493 页脚注②。——497,①

(II′)、(II″)已经分别由(55:G)、(55:W)、(55:M′)完全解决了。现在,让我们看一看解的这些分类在什么程度上相互联系着。

在(55:L′)——即描述情况(II′)时,(55:M′)——中出现的参数中,未确定的是集合 S_*。根据(55:L′:a),除$(1,\cdots,n-1)$和$\ominus$之外,它是$\subseteq(1,\cdots,n-1)$任何集合。这就提出了这样一个问题,被排除的情况 $S_*=(1,\cdots,n-1)$和 S_* 是否也能够有某种解释呢?

关于 $S_*=(1,\cdots,n-1)$,答案是容易的。如果我们使用这个 S_*[忽略(55:L′:a)],那么,[利用(55:L′)的其余部分]我们得到:根据(55:L′:a),$p=n-1$;根据(55:L′:b),(55:L′:c),$\underline{\alpha}_1=\cdots=\underline{\alpha}_{n-1}=\alpha_*=\frac{1}{n-1}$;根据(55:L′:d),$\overline{\omega}=n-2-\frac{1}{n-1}$,$\omega^*=-1$。不存在引入(55:L′:c)函数$\alpha_i(y)$的机会,原因是$(1,\cdots,n-1)-S_*$是空集。在区间$-1\leqq y\leqq\omega^*$[在(55:L′:e)的(a)中]起作用的范围内,我们必须要注意的是,它缩成了点 $y=-1$(因为 $\omega^*=-1$)。现在,与(55:V)的比较告诉我们,在这些条件下,(55:L′)与(55:V)一致。

这样,我们有: 498

(55:N′)　如果我们在(55:L′:a)中把$(1,\cdots,n-1)$(因此 $p=n-1$)包括进去,那么,(55:L′)穷举情况(II′)和(II″)中的全部解:情况(II′)对应着 $S_*=(1,\cdots,n-1)$,情况(II″)则对应着 $S_*\neq(1,\cdots,n-1)$。

55.11.2 有了这一结果之后，你也许倾向于把剩下的例外情况 $S_* = \ominus$ 与情况(I)联系起来。然而，认真研究有 $S_* = \ominus$ 的(55:L′)并将其与(55:G)比较表明，这是不可能的，至少不能以这种直接方式联系起来。

事实上：利用有 $S_* = \ominus$ 的(55:L′)(因此 $p=0$)给出一个空的(b)，如此，一个 V 与(a)一致，即 V 是全部

$$\vec{\alpha}(y) = \{\alpha_1(y), \cdots, \alpha_{n-1}(y), y\}$$

的集合，其中，$-1 \leqq y \leqq \omega^*$，取适宜的函数 $\alpha_1(y), \cdots, \alpha_{n-1}(y)$。忽略其他微小的变化①，我们要注意：在这一安排下，V 中一个 $\vec{\alpha}$ 的 α_n 决定其 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$；然而，在(55:G)中，$\alpha_n$ 是一个常数且

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$$

是随意的！②

总之：

(55:O′) 所有的解都是由(55:G)——情况(I)——和(55:N′)——情况(II′)和情况(II″)——枚举的。当(55:L′:a)被扩展到包含所有 $S_* \subsetneq (1, \cdots, n-1)$ 且 $S_* \neq \ominus$ 时，(55:N′)与(55:L′)一致。排除 $S_* = \ominus$ 是必要的。这一选择会产生一个不是

---

① 鉴于 $p=0$，(55:23)给出 $\bar{\omega} - \omega^* = -(\alpha_* + 1)$，从而，我们可以有 $\omega^* > \bar{\omega}$，所以 $\mathrm{Max}_{\vec{\alpha}\text{属于V}}\, \alpha_n = \mathrm{Max}_{-1 \leqq y \leqq \omega^*}\, y = \omega^*$，尽管它应该是 $\bar{\omega}$！

当 $S_* \neq \ominus$ 时，(55:L′:b)，(55:L′:c)给出 $\mathrm{Min}_{i=1,\cdots,n-1}\, \underline{\alpha}_i = \alpha_*$；当 $S = \ominus$ 时，它们给出 $\mathrm{Min}_{i=1,\cdots,n-1}\, \underline{\alpha}_i > \alpha_*$，尽管前者是 α_* 的定义！——498，①

② $S = \ominus$ 时(55:L′)的 V 不是得自我们对解的列举的一个集合，从而它根本不是解。本来，验证这一点并非难事。——498，②

(55:G)的解的 V,且事实上它根本就不是解。

55.11.3 我们以如下结果来结束这一部分:

(55:P′)

(55:P′:a)　　在情况(II′),即 $S_* = (1, \cdots, n-1)$, $p = n-1$ 时,我们有:$\omega^* = -1$,即(55:L′:e)的区间 $-1 \leqq \gamma \leqq \omega^*$ 缩成了一个点。另外,$\alpha_* = \frac{1}{n-1}$。

(55:P′:b)　　在情况(II″),即 $S_* \subset (1, \cdots, n-1)$, $p < n-1$ 时,我们有 $\omega^* > -1$,即(55:L′:e)的区间 $-1 \leqq \gamma \leqq \omega^*$ 并不缩成一个点。另外,$\alpha_* < \frac{1}{n-1}$。

证明:(55:P′:a)的证明:我们已经在(55:N′)中证明 499
了这些说法。

(55:P′:b)的证明:在(55:B′)的证明中,我们看到,$\alpha_* < \frac{n-p}{p}$,因此,$\omega^* + 1 = n - p - p\alpha_* > 0, \omega^* > -1$。$\alpha_* < \frac{1}{n-1}$是(55:B′)中说过的事情。

55.12 结果的解释

55.12.1 下面,我们解释这一结果。出于两个理由,我们很难做到详尽:第一,包含在(55:O′),即(55:G)、(55:K′)和(55:L′)中的最后结果非常复杂,因此一个严格的陈述只能是数学的陈述而非口头的陈述,而且,

口头说明无法恰当地处理数学结果所表达的若干细微差别;第二,我们仍然缺乏透彻解释目前这种情况所必需的经验和观察力。正如我们在 54.1.2 和 54.3 中预先设定的那样,我们正在以某些有意义的方式分析典型 n 人博弈。但是,我们在确定其全部解方面所取得的成功仍然是一件孤立的事情(尽管有 54.2.1 的情况)。在真正详尽解释典型 n 人博弈之前,会有很多这样的讨论。

给出一定的解释总归是有益的,我们不求全面。我们已经在前面的若干例子中看到,这样的解释对于理论的进步有指导意义。另外,这一过程的确有助于我们理解十分复杂的数学结果的含义。

由于我们并不追求全面,我们用几点说明来给出我们的解释。

55.12.2 第一:(55:G)中描述的情况(I)的解是一个无穷分配集。(55:L′)中描述的(II″)的解也是这样[见(55:N′)],因为其中的 y 的取值范围是一个没有缩为一个点的区间。[见(55:P′:b)。]另一方面,正如我们在 55.7 末尾看到的那样,情况(II′)的解是一个有限分配集。[1] 这个解的另一个吸引人的性质是,它具有该博弈的充分对称性,即它在玩家 $1,\cdots,n-1$ 的置换下保持不变。

因此,以若干方式,它是我们的博弈的最简单解。关于其特殊情况 $n=3,4$(分别见第 22 节和 35.1)的试探性

---

① 读者可以比较(55:P′:a)和(55:P′:b)。——499,①

分析导致了这个解，而且不难将其开展到一般的 n。[①] 要找出其他解，我们只需机械照搬我们的正式理论。

至此，读者应该充分清楚的一点是，这些其他解无论如何都不能被忽视。另外，一个有限解的存在性和惟一性是目前这一博弈中一个有利的偶然事情，根本不具有一般性。[②] 500

55.12.3 第二：上述解对应着最大的 S_*：$(1,\cdots,n-1)$。另一个极端情况是与 $S_* = \ominus$有关的解[见(55:O′)]。这是(55:G)中描述的情况(I)中的解。与上一点说明中的解类似，它具有该博弈的充分对称性。事实上，这两种情况——(I)和(II′)——是仅有的具有对称性的情况。[③]

---

① （试探性）论述也许会这样进行：首要玩家需要一个盟友以取得胜利，在任何这样一个联盟条件下，他获得 $n-2$。因此，如果他希望留下数额 ω（这对应着我们的严格演绎中的 $\bar{\omega}$），他能够向每个盟友让出 $n-2-\omega$。如果他的 $n-1$ 个潜在的盟友合起来能够得到大于这一数额的量，即如果

$$(n-1)(n-2-\omega)<1,$$

那么，他找到一个盟友的机会就被破坏了，而且这是他进行勒索时受到的惟一限制。

因此，ω 仅仅受到 $(n-1)(n-2-\omega)\geqq 1$ 的限制，即 $\omega \leqq n-2-\dfrac{1}{n-1}$。所以，$\omega = n-2-\dfrac{1}{n-1}$。

这样，如果首要玩家成功建立一个联盟，那么，他得到 $n-2-\dfrac{1}{n-1}$；如果他失败了，他当然得到 -1。对于其他玩家来说，相应的数额是 $\dfrac{1}{n-1}$和 -1。

现在，读者能够验证，这正是(55:V)中得到的解，即情况(II′)。——499，②

② 有关存在性的不确定性，见 53.2.2 中第二点说明。缺乏惟一性的一个例子见 38.3.1。——500，①

③ 其他解都属于情况(II″)，从而有 $S_* \neq \ominus, (1,\cdots,n-1)$。所以，玩家 $1,\cdots,n-1$ 的适当置换将把 S_* 的一个元素变成不属于 S_* 的元素，从而改变 S_* 以及相应的解。——500，②

另一方面，这个解是无穷的。正如我们在55.3中看到的那样，它表达的是这样一个组织原理，即从33.1意义上说，该博弈中的首要玩家被隔离了。(55:G)告诉我们，这一行为标准——即解绝对不提供其他玩家之间的分配原理——即首要玩家收到预先规定的数额的所有分配都属于这个解。按照常识，这完全合理：首要玩家被排除了，其他玩家只能全体相互一致地联合起来。他们的关系中的所有数量研究(即加入首要玩家的联盟的可能性)都被禁止了，无法知道他们之间讨价还价的具体结果会是什么。

55.12.4 第三：其余解是(55:L')[见(55:N')]中描述的情况(II″)中的那些解，即 $S_* \neq \ominus$, $(1, \cdots, n-1)$ 时的解。与上面两个解相比，它们形成一组更为复杂的解。事实上，它们占据了我们的数学演绎的相当大部分，也是最复杂的一部分。它们的解释也更加困难和复杂。我们将只提一提其中的要点。

我们在(55:L')中详细描述了，在这类行为标准的所有
501 有分配——即解——中，$(1, \cdots, n-1) - S_*$ 中的玩家与首要玩家之间的因果联系。也就是说，他们得到的数额惟一地取决于设定给首要玩家的数额。这一联系表达为有限个函数。① 这些函数能够以多种不同方式选取，从而产生不同行为标准——即解，但有限个行为标准意味着这些函数的有限个选择。因此，在第二点说明中至关重要的是，玩家 $1, \cdots, n-1$ 的互不相关性消失了。显然，在首要玩家

① $\alpha_i(y)$，i 属于 $(1, \cdots, n-1) - S_*$。——501，①

和$(1,\cdots,n-1)-S_*$中的玩家之间持续存在着某种不确定的讨价还价[1]，后一类玩家之间的关系却完全由行为标准决定。

值得再次强调的一点是第二点说明中描述的情况与当前情况之间的不同，即情况(I)与(II″)之间的不同。在前一种情况下，除首要玩家之外，全体玩家之间存在着讨价还价，不存在有关这些讨价还价的规则或关系[2]，以致没有这方面的行为标准。现在，我们有首要玩家与某些其他玩家之间的讨价还价，但这一次，行为标准为首要玩家的对手们提供了有限多个相互关系和规则。相应地，存在着可能的行为标准的多样性。

如上面讨论的那样，情况(I)和(II″)中产生的性质上的未确定性是我们在47.8和47.9中研究的那种未确定性的较一般形式。那里关于那些解的二维（区域）和一维（曲线）部分的说明也分别适用于我们这里的情况(I)和(II″)。

为这一区别提供一个有某种合理性的文字论述是可能的，但它们远不可信。单单数学演绎就给出了真正理由，其相对复杂性表明，要将其转换为普通文字必定十分困难。这是如下现象的另一个例子：结果能够被表达出来，却几乎没有文字证明。

55.12.5　第四：其余玩家，即S_*中的玩家的境况也有其有意思的方面。

(55:L′)告诉我们，我们的解中的每个分配中，要么这

---

① 这对应着(55:L′:e)中γ的可变动性。也可参见(55:P′:b)。——501，②

② 为被隔离的首要玩家设定的数额除外。——501，③

些玩家都得到数额 $\alpha_\bullet$，要么他们中的一个得到 $\alpha_\bullet$ 而其他的得到数额 -1。我们可以从这一点直接推断：

(a) 如果 $S_\bullet$ 是一个一元集，那么，$S_\bullet$ 中的那个玩家总是得到同一数额：$\alpha_\bullet$。

(b) 如果 $\alpha_\bullet = -1$，那么，$S_\bullet$ 的每一玩家总是得到相同数额：-1。

(c) 如果情况既不是(a)，也不是(b)，即(55:U)的条件[也是(55:D′)中提到的条件]得到满足，那么，
502 $S_\bullet$ 中的每位玩家总得到两个不同的数额 $\alpha_\bullet$ 和 -1 之一，且两者都不能被忽略。①

根据这些，我们能够得出如下解释性结论：

(d) 在情况(a)和(b)之中，而不是在情况(c)中，$S_\bullet$ 的玩家从 33.1 的意义上说被隔离了。

(e) $S_\bullet$ 是一个一元集的情况(a)：$S_\bullet = (i), i = 1, \cdots, n-1$，表达的是玩家 i 独自被隔离。赋予他的值 $\alpha_\bullet$ 受到的限制是(55:B′)：

$$-1 \leqq \alpha_\bullet < \frac{1}{n-1}。\tag{55:29}$$

这是对第二点说明中描述的首要玩家被隔离的情况(I)的一个令人满意的补充。② 那里赋予首要玩家的值 $\overline{\omega}$ 受到的限制是(55:G)：

$$-1 \leqq \overline{\omega} < n - 2 - \frac{1}{n-1}。\tag{55:30}$$

(f) 如果 $S_\bullet$ 不是一个一元集，那么，在情况(a)、(b)

---

① 即两者都在解中的某个分配中出现。——502，①

② 这解决了第 475 页脚注③中指出的困难。——502，②

之中，惟一可能的情况是(b)：$\alpha_* = -1$。

换句话说：

如果一个以上的玩家被隔离了，那么，他们的集合必定不包含首要玩家，也不同时包含所有其他玩家，且被隔离的玩家必须都被赋予下面的值：

(55:31) $$\alpha_* = -1。$$

(g) 我们从(e)、(f)得出，能够被隔离的这些玩家集合恰好是 L 中的集合[①]——失败集合。

(h) 如果只有一位玩家被隔离了，那么，(e)说明，他不一定会受到绝对不利的歧视。也就是说，他可能被赋予大于 -1 的值。(55:29)和(55:30)还指出了这个设定值的上限能够是什么：显然，这个玩家将会得到的数额与第一点说明中讨论的情况(I)的有限解中的数额相同。[②] 十分令人满意的是，这把 33.1.2 的结果从 $n=3$ 推广到了任意的 n。

(i) 另一方面，如果有一个以上玩家被隔离了[③]，那么，(55:31)表明，不可能存在让步：他们必须都被给予绝对最小值 -1。

---

① 这一点的最好证明方法是回忆 52.3 中情况 C_{n-1} 中 W 的元素的枚举。——502，③

② 对于首要玩家来说是 $n-2-\frac{1}{n-1}$，对于其他玩家来说是 $\frac{1}{n-1}$。设定值必须小于这些数额。——502，④

③ 即 S_* 中的元素个数 $p \geqq 2$。由于 $p \leqq n-2$ [见(55:L:a)]，这种情况只能发生在 $n-2 \geqq 2$，即 $n \geqq 4$ 时。这也正是 $n=3$ 的讨论中不曾观察到(i)和(j)的现象的理由。——502，⑤

503 (j)这一断言必须在如下程度上成立:如果 S_* 有一个以上的元素,(55:29)的 α_* 仍旧可能——事实上,有(55:B′)的(55:L′)明确允许它们。但是,S_* 中的玩家的境况由(c)描述,不能再称被隔离:他们可以加入联盟以改善他们的处境。

显然,这些说明,尤其是(g)、(h)、(i)有待进一步说明。然而,我们将限于这些说明,并有机会再次回到这个话题。

55.12.6 第五:我们找到了大量解,它们由众多参数描述,其中一些甚至是有相当大的选择自由的函数。然而,其主要分类却十分简单:它受到集合 $S_* \subseteq (1,\cdots,n-1)$ 的影响。① $S_*, -S_*$ 显然穷尽了 $I=(1,\cdots,n)$ 分为两个集合的全部拆分。很有可能,这是一个一般原理的第一个指标。在一个简单博弈中,分为两个互补集合的分拆似乎决定所有事情,因为其中之一必然是胜利的,而另外一个必然是失败的。在一般博弈中,分为更多集合的分拆也许同样重要。无论如何,S_* 在目前这一特殊情况中的作用是,提供了全部博弈的一般分类准则的初步想法。

不过,现在我们还没有资格给这一猜想一个严格的形式。

① 如第二点说明中那样,我们用 $S_* = \ominus$ 记情况(I),尽管有(55:O′)前面的讨论。——503,①

第 11 章　一般非零和博弈

56. 理论的扩展

56.1　问题描述

56.1.1　我们的分析已经达到了有可能放弃零和假设的阶段。我们曾一度将这一条件放宽到分析常数和——一个不等于零的和——博弈，但是，这不是零和情况的真正有意义扩展，因为这些博弈通过策略等价这一同构而联系到零和博弈（见 42.1 和 42.2）。现在，我们要放弃对和的所有约束条件。 504

我们在前面指出过，零和约束大大弱化了博弈与经济问题之间的联系。① 具体来说，它强调的是分配问题，忽

① 应该注意，零和博弈不仅包括娱乐性的游戏（见 5.2.1），而且它们中的很多也相当充分地描述着社会关系。回想我们曾经在不同地方给出的解释，读者会充分意识到这一说法的正确性。

因此，零和博弈与非零和博弈之间的区别在一定程度上反映的是纯社会问题与社会一经济问题之间的区别。（正文中的下一句表达的也是这一概念。）——504，①

略了真正的生产问题(尤其见第34页脚注②以及5.2.1)。在一人博弈情况下,这一点尤为清楚:这种情况下的行为显然仅仅是一个生产问题,不存在玩家之间的分配。事实上,在零和情况下,一人博弈根本就不是个问题,而且在非零和情况下,它完全是一个最大值问题(见12.2.1)。

相应地,把理论扩展到全部非零和博弈的计划将使我们更加接近熟悉的经济问题。在下面的讨论中,读者很快就会看到例子选择方面的这一倾向以及解释方面的变化:我们将开始研究双边垄断、寡头垄断、市场等。

56.1.2 正如我们在42.1中指出的那样,彻底放弃零和约束意味着,11.2.3中描述一个博弈的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 完全不受任何约束。即11.4和25.1.3中的

$$(56:1) \qquad \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv 0$$

505 被放弃,并且没有任何其他约束来代替它。因此,从此以后,我们的研究就以此为基础。

这一变化必然要求全面重新审查我们的理论及以其为基础的相应概念。当(56:1)被放弃时,特征函数、占优和解,这些概念都不再有定义。我们要强调的一个事实是,这里出现的问题是一个概念性问题,而不仅仅是第6章至第10章中以零和博弈理论为基础处理的那些技术问题。①

56.1.3 一切都必须重新从头开始,这未免有点令人

① 在这些技术问题中,有一个问题是靠特定概念的推广来解决的:常数和博弈的情况,我们将在后面再次提到它。——505,①

泄气:我们已经在这些概念和以其为基础的理论上付出了那么多努力。还有,我们面对着一个概念性问题,而且作为我们的理论基础的那些定性原理似乎无法超越零和博弈的情况。因此,这一最后推广——从零和到非零和情况的过渡——似乎要把我们前面的所有努力都付之一炬。因此,我们必须找出回避这一困难的出路。

这里,我们也许会想起 42.2 中出现的类似情形。那里,我们从零和情况向常数和情况的转变中也遇到过类似的情形,不过,困难程度轻一些。正如我们在 42.3 和 42.4 中所做那样,我们巧妙地利用策略等价同构避开了这些困难。

然而,这一特殊工具的有用性是有针对性的:策略等价把全部零和博弈族扩展到全部常数和博弈族,并且无法再扩展。(根据 42.2.2、42.2.3 或 42.3.1 的分析,这一点应该是清楚的。)

所以,我们必须另找出路,把非零和博弈理论与已有的零和博弈理论联系起来。

56.2　虚构玩家:零和扩展 $\overline{\Gamma}$

56.2.1　在进一步深入讨论之前,我们必须澄清一些术语。我们将要分析的博弈是这样的博弈,正如 56.1.2 中指出的那样,条件(56:1)被放弃,而且没有其他约束取而代之。我们称这些博弈是非零和博弈,但是,要认识到,我们的这一扩展并不想排除(56:1)恰好成立的那些博弈。因此,我们更倾向于给这些博弈一个不那么带有否定意思的名字,所以,我们称 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 丝毫不受约束的

博弈为一般博弈。[1]

我们已经说明了以某种方式把一般博弈理论与零和博弈理论联系起来的计划。实际上，我们可以更进一步：任一给定的一般博弈都能够被当作一个零和博弈来重新解释。

506 这似乎是一个悖论，因为一般博弈形成一个比零和博弈大得多的族。不过，我们的计划是，把一个 n 人一般博弈作为一个 $(n+1)$ 人零和博弈来解释。因此，从一般博弈到零和博弈的转变中引入的约束条件由参与者个数的增加来补偿——事实上，这是可能的。[2]

56.2.2 把一个给定的 n 人博弈当作一个 $(n+1)$ 人零和博弈重新解释的计划是一个十分简单而自然的计划。

这一计划的具体内容是引入虚构的第 $n+1$ 个玩家，假设他损失的数额正好等于其余 n 个——实——玩家总共赢得的数额，反之亦然。当然，他决不能直接影响博弈进程。

让我们对此给出数学表述：考虑一般 n 人博弈 Γ，它有 n 个玩家 $1,\cdots,n$，有 11.2.3 意义上的特征函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)(k=1,\cdots,n)$。我们用如下定义引入虚构玩家 $n+1$：

$$(56:2)\qquad H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv-\sum_{k=1}^{n}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。$$

变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 分别受控于实玩家 $1,\cdots n$。它们代表着他们对博弈进程的影响。由于我们倾向于使虚构玩家

---

① 这与 12.1.2 一致。——505，②

② 这再次说明了我们多次说过的一个原理，即参与者个数的任何增加必然带来博弈结构的推广和复杂化。——506，①

不影响博弈进程，我们也就没有引入他所控制的变量 τ_{n+1}。①

以这种方式，我们得到一个 $(n+1)$ 人零和博弈，称其为 Γ 的零和扩展，记为 $\overline{\Gamma}$。

56.3 有关 $\overline{\Gamma}$ 的特征的一些问题

56.3.1 说到我们已经把一般 n 人博弈当作一个 $(n+1)$ 人博弈 $\overline{\Gamma}$ 来重新解释时，乍一看，我们是说，有关 $\overline{\Gamma}$ 的全部理论对于 Γ 来说也成立。这一说法需要详细研究。

我们必须理解，这不可能是一个纯粹的数学分析，不可能像前面几章中的分析那样基于确定的理论。我们正在分析一个假设中的理论基础。因此，这一分析必须以具有表面合理性的论述为主，中间也许混杂着辅助性的数学分析。这种情形类似于我们建立零和二人、三人、n 人博弈理论的做法。（关于二人零和博弈，见 14.1—14.5 及 17.1—17.9；关于三人零和博弈，见第 5 章；关于 n 人零和博弈，见 29、30.1 和 30.2；关于一般 n 人博弈——即 $\overline{\Gamma}$ 的理论与 Γ 的理论之间的关系，对等节次是从 56.2—56.12。）

我们的分析结果是，适用于 Γ 的不是 $\overline{\Gamma}$ 的全部理

---

① 11.2.3 形式化描述为每位玩家 k 提供了变量 k。（为了用现在的情况代替它，我们必须用 $n+1$ 替代那里的 n。）因此，你可以坚持虚构玩家 $n+1$ 的变量 τ_{n+1} 的出现。

这个要求容易得到满足。为此，我们只需引入一个仅取一个值（即令 $\beta_{n+1}=1$）τ_{n+1}。实际上，只要 $H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 独立于 τ_{n+1}，你甚至能够使用 τ_{n+1} 的任何值域（即任意的 β_{n+1}），以保证它们实际上是正文中使用的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。——506，②

论——即作为30.1.1中的一个$(n+1)$人零和博弈——而是其有待我们确定的一部分。换句话说，我们将会发现，将被解释为Γ的解的，不是$\overline{\Gamma}$的全部解所组成的系，而仅仅是其一个特定的子系。

56.3.2 虚构玩家是被当作一个数学工具引入的，目的是使玩家得到的数额之和等于零。因此，绝对基本的一点是，他不应该对博弈进程产生任何影响。正如56.2.2中给出的那样，在$\overline{\Gamma}$的定义中，我们也观察到了这一原则。无论如何，我们还是要为自己提出这样一个问题：虚构玩家是否被绝对排除在与这一博弈有关的交易了呢？

这一警告并不多余。一旦$\overline{\Gamma}$中包括三个或更多个人①，正如我们在分析的早期阶段就已经看到过的那样，联盟就在该博弈中占据主导地位。虚构玩家参与任何一个联盟——其中大概会包括玩家之间的补偿性支付——完全与我们将其引入时的精神相悖。具体来说：虚构玩家根本不是一个玩家，仅仅是服务于形式目的的一个形式上的工具而已。只有在他不以任何直接或间接的方式参与该博弈时，这才是允许的。一旦他真正参与其中，将其引入该博弈——即从Γ到$\overline{\Gamma}$的转变——就失去合理性了。也就是说，此时的$\overline{\Gamma}$不能被看作Γ的一个等价体，或Γ的重新解释，因为$\overline{\Gamma}$的实玩家，$1,\cdots,n$也许不得不面对Γ中不存在的危险或收益。

---

① 即当$n+1\geq 3$时。因此惟有一般一人不会遇到下面的障碍。这是与我们一再强调的这样一个事实吻合，即惟有$n=1$时，一般n人博弈才会成为一个纯粹最大值问题。——507，①

56.3.3 我们也许认为，根据虚构玩家被引入的方式，这一障碍被避开了。事实上，实玩家 1，…，n 在一局博弈结束时得到的数额

$$H_1,\cdots,H_n$$

并不依赖于他所控制的任何变量①——即他在该博弈中没有任何动机。那么，他又如何能够成为一个联盟需要的同伙呢？

乍一看，这种观点有一些道理。我们描述的条件看似使得任何实玩家联盟都不会因为虚构玩家出现与否有所不同。难道他仅仅是一个哑玩家吗？果真如此，那么，Γ 的理论就能够被用于 $\bar{\Gamma}$ 而无需其他条件。然而，情况并非如此。 508

的确，虚构玩家没有影响博弈进程的动机，不是任何联盟需要的同伙。也就是说，任何玩家或玩家团伙都不会对其加入而给其一个（正的）补偿。然而，他自己也许有兴趣找一个盟友。博弈结束时，他得到的数额——H_{n+1}——取决于其他玩家的动作——即 $\tau_1,\cdots,\tau_n$，而且，对他来说，因停止与其他玩家合作而补偿一个或多个玩家的做法也许是值得的。不要误解的重要一点是：当 Γ 进行时，即当虚构玩家真的是一个形式上的虚构时，这样的事情并不会发生；但是，如果真正进行的博弈是 $\bar{\Gamma}$，即如果虚构玩家表现得好像一个实玩家，那么，他向其他玩家发出

---

① 同样，他所得到的数额 $H_{n+1}=-\sum_{k=1}^{n}H_k$ 也不依赖于他所控制的变量。——507，②

补偿要约就成了必然的事情。

56.3.4 一旦虚构玩家开始向与他合作的其他玩家发出补偿要约——如我们在前面看到的那样，这等于他们不与其他玩家合作，他就成了一个需要受到考虑的因素了。他提出加入联盟的要求并要求为这一特权支付一个价格，而且他的这一心愿如同做出显著动作一样直接影响着博弈。

因此，尽管虚构玩家没有能力通过直接动作来影响博弈进程，他事实上进入了该博弈。正是这一无能为力决定着他向其他玩家提出补偿的措施并使上述机制发挥作用。

为了更好地理解这种情形，我们给出一个具体例子。

56.4 $\overline{\Gamma}$ 的运用所受到的限制

56.4.1 考虑一个一般二人博弈，其中，玩家1、2中的每一位都能够保证独自行动得到数额 -1，而两人合起来能够保证数额1。把博弈规则具体化以产生这一结果并不难。① 做到这一点的一个特别简单的组合安排是：②

借助一个个人动作，每位玩家选择号码1、2中的一个。每位玩家都在不知道其他玩家的选择的情况下做出自己的选择。

此后，支付按如下方式进行：如果两位玩家都选择了

① 因此，我们将在60.2、61.2和61.3中看到，双边垄断就对应着这种情况。——508，①

② 这一建构应该与21.1中定义三人简单多数博弈时使用的结构比较，两者有一定相似之处。——508，②

号码 1，每人得$\frac{1}{2}$，否则每人得 -1。①

容易验证，这个博弈具有我们需要的性质。 509

现在，让我们考虑虚构玩家 3 并构造 56.2.2 中定义的博弈及其特征函数 $\mathrm{v}(S)$，$S \subseteq (1,2,3)$。根据我们上面的分析

$$\mathrm{v}[(1)] = \mathrm{v}[(2)] = -1,$$
$$\mathrm{v}[(1,2)] = 1。$$

显然，

$$\mathrm{v}(\ominus) = 0,$$

而且，根据（零和博弈的）特征函数的一般性质

$$\mathrm{v}[(3)] = -\mathrm{v}[(1,2)] = -1,$$
$$\mathrm{v}[(1,3)] = -\mathrm{v}[(2)] = 1,$$
$$\mathrm{v}[(2,3)] = -\mathrm{v}[(1)] = 1,$$
$$\mathrm{v}[(1,2,3)] = -\mathrm{v}(\ominus) = 0。$$

总之：

$$(56:3) \qquad \text{当 } S \text{ 有} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{个元素时，} \mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

公式(56:3)恰好是 29.1.2 的(29:1)，即 $\overline{\Gamma}$ 是取简化型的本质三人零和博弈，$\gamma = 1$。因此，它同样等同于 21 节

① 用 11.2.3 的符号：$\beta_1 = \beta_2$ 且

$$H_1(\tau_1, \tau_2) = H_2(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \tau_1 = \tau_2 = 1, \\ -1 & \text{其他。} \end{cases}$$ ——508，③

中讨论的三人简单多数博弈。①

现在，我们从第 21—23 节的试探性讨论中学到的是，这一博弈不过是全体玩家之间进行结盟的竞争。事实上，考虑到三人简单多数博弈的实质（见 21.2.1），这是十分明显的。因此，一个虚构玩家肯定表现出强烈的结盟倾向。事实上，仅就特征函数而言，博弈 $\overline{\Gamma}$ 对其三位玩家完全对称。所以，两位实玩家 1、2 与虚构玩家 3 扮演的角色完全相同，从而我们没有理由认为他们进入联盟的能力应有所不同。②

56.4.2 我们还能够回到 56.3.3 最后一部分中使用的论点并将其运用于这一博弈：如果虚构玩家 3 在博弈 $\overline{\Gamma}$ 表现得如同一个实玩家，他就有理由阻止玩家 1、2 结成联盟，因为如果这个二人联盟得以形成，他的损失额是 -1，
510 如果这个联盟没有形成，他将赢得的数额是 2。③ 因此，他将向玩家 1 或玩家 2 提供补偿以破坏这一联盟，即使选择 τ_1 或 τ_2 的值等于 2 而不等于 1。根据第 22 节和 23 节的

① 当然，仅就其特征函数而言时，这些博弈才相同，而 30.1.1 的整个理论仅仅以特征函数为基础。——509，①

② 为避免误解，我们再次强调：博弈 $\overline{\Gamma}$ 的规则，由 H_k 充分表达，并不就其三位玩家对称。H_k 仅仅依赖于 τ_1、τ_2，并不依赖于 τ_3。就 1、2、3 对称的是特征函数 $v(S)$，$S\subseteq(1,2,3)$。但是，我们知道，惟有 $v(S)$ 才是重要的。（见上面脚注①。）——509，②

③ 根据第 508 页脚注③和(56:2)：

$$H_3(\tau_1,\tau_2)=-H_1(\tau_1,\tau_2)-H_2(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases}-1 & \tau_1=\tau_2=1,\\ 2 & \text{其他。}\end{cases}$$

——510，①

分析，这个补偿数额是能够确定的，它等于$\frac{3}{2}$。① 读者可以自己验证这一结果，同时，这一过程导致有关三人简单多数博弈的已知结果。

56.4.3 56.4.1 的例子给出了 56.3.3 和 56.3.4 中阐述的反对观点的本质。因此，虚构玩家 $n+1$ 能够影响博弈 $\overline{\Gamma}$，其影响不是直接通过个人动作，而是间接地通过提供补偿从而改变竞相结盟的条件和结果。正如我们在 56.3.3 末尾指出过的那样，这并不意味着，这样的事情真的发生在 Γ 中，即当虚构玩家只是形式上的虚构的时候。如果 30.1.1 的理论被一字不漏地应用于 $\overline{\Gamma}$，即如果允许虚构玩家（提供补偿方面）表现得如同一个实玩家，那么，上述事情的确发生在 $\overline{\Gamma}$ 中。换句话说，最后一段分析并不意味着，我们想赋予虚构玩家与我们将其引入的初衷相悖的影响力。它们仅仅有助于说明，把我们当初的理论僵硬地运用于 $\overline{\Gamma}$ 会使我们面对这样的冲突。因此，我们不得不得出这样的结论：零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 无法被当作一般博弈 Γ 的一个无条件等价物。

接下来，我们该做什么呢？为了回答这个问题，我们最好回到 56.4.1 的具体例子的分析，那里，困难得到了充分的表达。

---

① 这是阻止（与虚构玩家 3 结盟的）玩家 1 或 2 从损失 -1 转到赢得$\frac{1}{2}$的补偿，后者是玩家 1 或 2 在一个二人联盟——玩家 1 和 2 的联盟——中本可以得到的收益。它也使虚构玩家的收益从 2 减少到$\frac{1}{2}$，这是其应有的收益。——510，②

56.5 两种可能的过程

56.5.1 我们也许认为，根据 56.4.1 中的研究，不使用特征函数，以此来避开当前的困难。事实上，博弈 $\overline{\Gamma}$ 与三人简单多数博弈之间的相同仅仅在于它们有相同的特征函数——联盟形成的机制相同，但它们的 H_k 并不相同（尤其见第 509 页脚注①、②）。因此，一个可能的适宜做法是放弃惟有特征函数重要的说法，并把理论建立在 H_k 本身之上。

然而，详细研究发现，这一建议似乎没有什么优点——至少对于我们正在考虑的问题来说是这样。

首先：放弃特征函数 v(S)转而热衷于潜在的 H_k 会使
511 我们失去处理这一问题的所有手段。对于零和博弈来说，除了 30.1.1 中完全以 v(S)为基础的理论之外，我们没有其他一般理论。因此，接受这一计划就会使我们从一般博弈 Γ 到零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 的过渡完全没有意义，因为这会使我们像当初在一般博弈面前那样，在零和博弈面前也手足无措。因此，只有在实在找不出出路的情况下，放弃全部现有理论才是合理的。然而，这两个条件都不具备。

第二：从特征函数退回到 H_k 并不会遇到前面提到的反对意见。事实上，在 56.3.2 末尾和 56.4.2 中，我们的确把 H_k 考虑进去过。我们证明了 $\overline{\Gamma}$ 的虚构玩家直接提出补偿的必要性——这一必要性并不以任何方式依赖于 $\overline{\Gamma}$ 被换成一个有着相同特征函数的不同博弈。[①]

---

① 我们在 56.4.1 中多次使用了这样的替换，但不是在 56.4.2 的后续论述中使用这样的替换。——511，①

第三：后面的讨论表明，我们没有必要放弃以特征函数为基础的理论，而是通过对其使用范围加以简单约束来克服其缺陷。

56.5.2　重新思考 56.3.2—56.4.2 告诉我们，我们没有理由把我们当前有关虚构玩家的行为的困难都归罪于 30.1.1 的理论。

56.3.2—56.3.4 和 56.4.2 的分析都是试探性的。在 56.4.2 情况下，这一点尤其重要，那里，我们以确定的方式就一个具体例子得到了不希望看到的结果。事实上，56.4.2 的研究提到的是第 21—23 节中本质三人零和博弈的"准备性的"试探性讨论，而不是第 32 节中的严格理论。

那里——56.4.2 和 56.4.1 中——发生的事情能够用严格理论描述如下：56.4.1 的一般二人博弈 Γ 导致一个三人零和博弈 $\overline{\Gamma}$，它与三人简单多数博弈相同。30.1.1 的严格理论提供了这一博弈的各种解，33.1 对这些解进行了分类和研究。现在，56.4.1 和 56.4.2 的分析等于从这些解中选择了一个特殊的解：33.1.3 的无歧视解。

因此，我们必须自问：恰恰选择这个无歧视解是否合理呢？难道这些解中就没有一个能够绕开阻挡我们前进道路的解——即 33.1.3 意义上的有歧视解吗？

56.6　有歧视的解

56.6.1　假如我们从任何角度逼近了本质三人零和博弈——即三人简单多数博弈，而且我们必须从其解中选择一个，那么，我们有强有力的理由选择无歧视的那个。 512
这个解——即它所代表的行为标准——给予三位玩家同

等完成结盟的机会，而且在没有歧视动机的情况下，我们倾向于认为这个解是该博弈最“自然的”解。[①]

然而，在当前情况下，进行歧视的理由是充分的：在博弈 Γ 中，玩家 1、2 是实玩家，是 Γ 的最初参与者，而玩家 3 如我们一再强调的那样只不过是形式上的虚构。在前面几段的讨论中，我们已经强调过，这位玩家不应该竞争加入一个联盟，而且他也不应该享有其他玩家的待遇。换句话说：如果我们想把 30.1.1 的理论运用于这种情况，那么，歧视虚构的玩家 3 是绝对必要的，即选择 33.1 中的一个所谓有歧视解，被排斥的玩家是虚构玩家 3。

同上，我们看到，这些有歧视解是由这样一个事实描述的，即在所有的解中，被排斥的玩家——即没有资格竞争加入一个联盟的玩家——都被赋予一个固定的数额 c。33.1.2 的分析告诉我们，这个数额也不一定是这个被排斥的玩家独自能够保有的最小数额，即未必有 $c=-1$。实际上，c 能够从一个特定的区间中选取：$-1 \leqq c < \frac{1}{2}$。

56.6.2 这里，我们要简单评述在最坏情况下——即 $c=-1$ 时——排斥虚构玩家的有歧视解。根据 33.1.1，这个解恰好由这样一些分配组成，在这些分配中，虚构玩家 3 得到的数额是 -1，而且两个实玩家中的每一个得到的数额都 $\geqq -1$。

---

① 当然，从 30.1.1 意义上说，其他解也一样好，但上述说法毕竟更为合理。——512，①

正如我们在 33.1.1 中指出的那样，这意味着，解——即行为标准——并不以任何方式限制两位实玩家之间的成果分配。那里给出的理由现在仍然成立且更为基本：玩家 1、2 之间的讨价还价完全不受限制，不仅因为接受的行为标准排斥了玩家 3 的介入——在玩家 1、2 的关系中这是惟一的规范影响，而且还有着更好的理由，即玩家 3 并不存在。不难看出，这去除了这样一种威胁，即玩家 1 或 2 在没有得到“公平份额”时愤然离开并转而与玩家 3 合作并从中得到补偿的威胁。

56.7 其他情况

56.7.1 下面，我们继续 56.6.1 末尾的讨论。

一个问题是，我们是否应该坚持 $c=-1$ 或允许其在 513
$-1\leqq c<\frac{1}{2}$ 中变化？前者似乎更为合理。事实上，$c>-1$ 意味着，实玩家没有尽最大可能剥夺虚构玩家，即他们没有努力得到尽可能大的（总）收益。你也许把这一自我克制看作按照公认的稳定行为标准而支付给虚构玩家的一个补偿。而且，因为我们已经决定排除联盟相互作用和补偿中虚构玩家的任何参与，禁止上述自我克制也是合理的。

然而，我们必须承认，这一论点并不总是有说服力。由虚构玩家支付的一个（正的）补偿与支付给虚构玩家的补偿是性质上不同的事情。前者明显错误，因为虚构玩家并不存在，从而不支付补偿。相反，后者并不荒谬。它只不过表达了利用可能的集体优势时的克己，而且我们有若

干例子说明一个稳定的行为标准能够要求这样的行为。[①]这样的克己不属于我们当前要考虑的问题，这一点并非一个先验的事实。[②] 将其排除则意味着，在完全信息情况下，一个稳定的行为标准必然意味着最大集体利益的实现。熟悉现有社会学文献的读者知道，关于这一点的讨论远没有定论。

无论如何，在我们的理论框架之内，我们将成功地解决这一问题，证明 c 必须被限制于其最小值。[③]

56.7.2 然而，暂时地，我们必须同时发展这两种可能情况。

为此，我们回到一般 n 人博弈 Γ 和与之相应的$(n+1)$人零和博弈 $\overline{\Gamma}$。现在，我们能够严格描述相关概念了。

(56:A:a) 用 Ω 记 $\overline{\Gamma}$ 的全部解 $\overline{V}$ 组成的集合。

(56:A:b) 给定一个常数 c，用 Ω_c 记 $\overline{\Gamma}$ 的这样一些解组成的系，对于 $\overline{V}$ 的每个分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$，总有 $\alpha_{n+1}=c$。[④]

---

① 当然，这恰恰是表达 33.1.2 的可能性的另一种方式。一个四人零和博弈中的另一个例子是在 38.3.2 的(38:F)中给出的。46.11 中对于全部可分解博弈给出了一个例子。（在最后这个例子中，克己是由 $\overline{\varphi}>0$ 时 Δ 的玩家和 $\overline{\varphi}>0$ 时 H 的那些玩家做出的，见 46.11。）

我们强调，这样的克己是在已接受的行为标准的压力下做出的，虽然我们的理论中假设玩家们充分知道该博弈的可能结果。——513，①

② 然而，如果它出现了，它通常会被看作社会组织的一种无效形式，虽然它是稳定的。——513，②

③ 问题中不出现克己现象，最大社会利益总是得到实现。这一结果并不像其表面看来那样有力，因为我们正假设着一个数字的和不受约束地可转换的效用函数以及完全信息。——513，③

④ 即在这个解的所有分配中，虚构玩家总得到数额 c。——513，④

(56:A:c)　　用 Ω' 记全部集合 Ω_c 的并集。 514

(56:A:d)　　用 Ω'' 记 $c = \mathrm{v}[(n+1)] = -\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$ 时的 Ω_c。[1]

结合(56:A:c)，我们注意到：

对于某个 c，Ω_c 是空集。在构造 Ω' 时，这些 c 显然可以被忽略。因此，$\alpha_{n+1} \geqq \mathrm{v}[(n+1)] = -\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$ 必然要求 $c \geqq -\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$，不然的话，$\Omega_c$ 是空集。再有，

$$\alpha_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqq -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}[(k)]$$

必然要求 $c \leqq -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}[(k)]$，不然的话，$\Omega$ 也是空集。所以，c 满足如下约束条件：

(56:4)　　$-\mathrm{v}[(1,\cdots,n)] \leqq c \leqq -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}[(k)]$。

实际中，Ω 常常受到更为严厉的约束。[2] (56:A:d)的 Ω'' 属于(56:4)的最小的 c。

56.8 新结构

56.8.1 56.3.2—56.4.3 的分析表明，Ω 的解对 Γ

---

① 即在这个解的全部分配中，虚构玩家只得到这样一个数额，即便他一人敌对全部其他玩家，他也能够得到这一数额。如我们所知，这意味着，实玩家合起来得到最大集体利益。——514，①

② 因此，在本质三人零和博弈中，(56:4)给出

$$-1 \leqq c \leqq 2,$$

而 32.2.2 告诉我们，Ω_c 非空时，c 的严格值域是

$$-1 \leqq c < \frac{1}{2}。——514，②$$

来说并非都有意义。56.6.1 的分析进一步缩小了这些解的范围，但它留下了一个尚未回答的问题：全部有意义的解的系是否是 Ω' 或 Ω''？

因此，系 Ω' 和 Ω'' 对应着我们在前面提到的两种选择。

接下来，我们要继续讨论 Ω' 和 Ω'' 之间的区别。

考虑博弈 $\overline{\Gamma}$ 的分配

$$(56:5) \qquad \vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}。$$

分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中，前面 n 个分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 表达的是现实：实玩家 $1, \cdots, n$ 就要从这一分配得到的数额。另一方面，最后一个分量 α_{n+1} 表达的是一个虚运算：赋予虚构
515 玩家 $n+1$ 的数额。另外，分量 α_{n+1} 不仅在 $\overline{\Gamma}$ 的解释中是虚的，数学上它也是没有必要的，即如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 被给定了，它也就被决定了。事实上（由于分配 $\vec{\alpha}$ 的全部分量之和必须等于 0），

$$(56:6) \qquad \alpha_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k。$$

所以，我们宁愿通过指定其分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 来表达 $\vec{\alpha}$，时刻牢记 α_{n+1} 能够得自(56:6)。因此，我们写

$$(56:7) \qquad \vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\}。$$

注意，我们不打算用这一符号取代原来的符号，即我们希望视情况需要自由地使用(56:5)和(56:7)。事实上，正是为了避免双重符号可能带来的误解，我们才在(56:7)中使用双括号 $\{\{\quad\}\}$ 而不像(56:5)那样用单括

号{ }。①

56.8.2 (56:5)形式上的分配 $\vec{\alpha}$ 服从零和约束，而且满足如下约束：

(56:8) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n,n+1$。

我们必须就(56:7)[有(56:6)]表达(56:8)。

现在，对于 $i=1,\cdots,n$，(56:8)并不受从(56:5)到(56:7)的过渡的影响，但对于 $i=n+1$，我们必须利用(56:6)。这样，它变成

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq -\mathrm{v}[(n+1)] = \mathrm{v}[(1,\cdots,n)]。$$

从而，(56:8)变成了： 516

(56:9) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n;$

(56:10) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$。

---

① 当然了，我们本来就能够做到这一点，即我们能够对于最初的 n 人零和博弈做到这一点。这里，要确定一个分配

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$$

只要对任意给定的 i_0，给定其分量 $\alpha_i(i \neq i_0,)$，因为

$$\alpha_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0}^{n} \alpha_i。$$

与此相似，我们在 31.2.1 中的(31:I)中看到，本质 n 人零和博弈形成一个$(n-1)$维多面体，而不是一个 n 维多面体。

然而，回避 α_{i_0} 并没有给我们带来特别的好处，而且，即便有这样一个 i_0，我们也没有办法确定它到底是哪一个。在本质三人零和博弈的几何讨论中，我们实际上努力让全部 α_i 都出现在图形中。(见 32.1.2。)

考虑到 α_{n+1} 的特殊作用，现在的情况则完全不同。对于我们后面的演绎来说，去除 α_{n+1} 是基本的。——515，①

56.9 Γ是零和博弈情况的重新分析

56.9.1 让我们暂停片刻，对这些约束做出解释。

(56:9)并非什么新东西。它再次表达了我们关于零和博弈已经有的东西，即在任何情况下，任何一个人愿意接受的数额都不会小于他独自一人敌对全部其他玩家时能够得到的数额。然而，(56:10)第一次出现。要弄清楚它的含义，我们需要更仔细考虑数量 $v[(1,\cdots,n)]$。

$v[(1,\cdots,n)]$是该博弈对于由全部实玩家 $1,\cdots,n$ 组成的、与虚构玩家 $n+1$ 相敌对的复合玩家来说的值。这个复合玩家在博弈结束时得到的这个数额当然是

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。$$

他控制着变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$，即出现在这一表达式中的全部变量。因此，在二人零和博弈中，实玩家控制全部动作，虚构玩家丝毫不影响博弈进程。

将这一结果与 14.1.1 中描述的二人零和博弈方案相比，我们的 $\sum_{k=1}^{n} H_k$ 对应着那里的 H，全部变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 对应着那里的一个变量 τ_1，不过，在我们的新结构中不存在与那里的变量 τ_2 相应的变动范围。

直觉上清楚的一点是，这样一个博弈（对于第一个玩家而言）的值得自就所有变量（这些变量都由他控制着）求最大值。这是我们现在的结构中的

$$(56:11) \qquad \mathrm{Max}_{\tau_1,\cdots,\tau_n} \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

14.1.1 中相应的表达式是

(56:12)　　$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)$　（τ_2 实际上不存在）。

当然了，第 14 和 17 节的系统化理论给出同样的结果：14.4.1 中的 v_1、v_2 相等，并等于(56:12)，因为运算 Min_{τ_2} 被避免了。所以，该博弈是严格决定的，而且，从 14.4.2和 14.5 意义上说，取值(56:12)。因此，第 17 节的一般理论必然给出相同的值。 517

这样，我们有：

(56:13)　　$\mathrm{v}[(1, \cdots, n)] = \mathrm{Max}_{\tau_1, \cdots, \tau_n} \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$。

所以，(56:10)表达的是：任何分配向全体（实）玩家提供的数额都不应该超过最有利情况下——即完全合作并使用最优策略时——能够期望的总额。[①][②]

总之：

(56:B)　　(56:7)的分配服从下面的约束条件：

(56:B:a)　　向任何一位玩家提供的数额都绝对不会少于他一人敌对全体其他玩家时能够得到的数额[见(56:9)]。

(56:B:b)　　向全体实玩家合起来提供的数额绝对

---

① 注意，对于全体实玩家而言的最优策略显然是这样定义的：如果存在着完全合作，那么，全体玩家的整体上面对的是一个纯粹最大化问题。——517，①

② 如果最初形式的博弈——即 12.1.1 和 11.2.3 的正规化之前的博弈——包含机会动作，那么，上述“最有利的”情况绝对不能也被包括在这些讨论之中。也就是说，我们只假设了合作和策略的最优选择，而机会动作必须通过建立数学期望来考虑。事实上，正是以这种方式，我们在 11.2.3 中从

$$G_k(\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n)$$

（τ_0 代表着全部机会动作的影响）过渡到 $H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$，后者是我们现在正在使用的形式。——517，②

不会大于最有利情况下——即完全合作且采取最优策略时——能够得到的数额[见(56:10)和(56:13)]。

这一表述使得我们的约束条件(56:9)、(56:10)[即(56:B:a)、(56:B:b)]的常识性的含义相当清楚:违背(56:9)[即(56:B:a)]意味着,(实)玩家之一接到这样一个要约,这一要约比他被迫做的事情更为不利。违背(56:10)[即(56:B:b)]意味着,全体(实)玩家收到这样一个要约,这个要约比它曾经能够预想的更为有利。我们似乎可以合理地认为这些恰好是这样一些条件,在这些条件下,理性的玩家将拒绝考虑一个分配方案(分配),原因是这个方案是荒谬的。

56.9.2 在继续下去之前,我们必须回顾我们走过的脚印,把我们当前的结构与前面的结构就两者都适用的情况进行比较。

特别是:假设我们正在把上一节的方法应用于一个已经是零和博弈的 n 人博弈 Γ。相应地,如56.2.2中描述的那样,我们就这一博弈构造 $(n+1)$ 人零和博弈 $\overline{\Gamma}$,并像56.8.2那样进行。

518 重要的是不要误解这一运算的含义。显然,如果 Γ 本身是一个零和博弈,那么,56.2.2和56.8.2的运算完全没有必要。我们有解决这种情况的理论。但是,如果一个对于所有博弈都成立的更为一般的理论要在这个基础上建立起来,那么,我们必定要求它与旧理论在旧理论成立的范围内是一致的。也就是说,在旧理论的范围之内,新理论是不必要的,新理论必须与旧理论一致。①

---

① 这是众所周知的数学推广方法论原则。——518,①

56.9.3 Γ 是一个 n 人零和博弈意味着

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv 0,$$

即 $H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv 0$。因此，在 S 中添加或去掉虚构玩家 $n+1$ 并不影响 $\mathrm{v}(S)$。也就是说：

$$(56:14)\qquad \mathrm{v}(S)=\mathrm{v}[S\cup(n+1)],\quad S\subseteq(1,\cdots,n)。$$

特殊情况 $S=\ominus,(1,\cdots,n)$ 给出

$$(56:15)\qquad \mathrm{v}[(n+1)]=0,$$

$$(56:16)\qquad \mathrm{v}[(1,\cdots,n+1)]=0。$$

(56:14)、(56:15)合起来表明，博弈 $\overline{\Gamma}$ 是可分解的，有裂集 $(1,\cdots,n)$ 和 $(n+1)$。其 $(1,\cdots,n)$ 成分是最初的博弈 Γ，而虚构玩家 $n+1$ 是一个哑玩家。① （关于这一分解，见 42.5.2 末尾和 43.1。关于哑玩家，见第 340 页脚注①和 43.4.2 末尾。）

这样，我们能够看到：

56.9.4 第一：由于 $\overline{\Gamma}$ 得自 Γ 添加哑玩家，Γ 的解与 $\overline{\Gamma}$（在旧理论中）的解相互对应着，惟一的区别是后者要照顾到哑玩家（虚构玩家 $n+1$），赋予其数额 $\mathrm{v}[(n+1)]$，即零。[见 46.9.1 或 46.10.4 中的(46:M)。]

我们设想的新理论将从 $\overline{\Gamma}$（在旧理论中）的解中得到

---

① 请读者回忆一下，在博弈 $\overline{\Gamma}$ 中，一般来说，虚构玩家并不是一个哑玩家。这很像一个悖论，但是我们的确在 56.3 中就一般二人博弈 Γ 的特殊情况证明了这一点。事实上，这恰恰是因为博弈 $\overline{\Gamma}$ 的规则一般来说并不把他规定为一个哑玩家，以致我们必须把 $\overline{\Gamma}$ 的解 $\overline{V}$ 限制为这样一些解，在这些解中，他被限制为一个哑玩家。这是 56.3.2—56.6.2 的讨论的含义。

我们将在 57.5.2 中确定 Γ 的哪些性质是虚构玩家成为哑玩家的充分必要条件。——518，②

Γ 的解。因此，上述分析证明，要得到的 Γ 的全部新解存在于旧解之中。另外，我们看到，在这种情况下，我们能够——事实上也必须——采用 56.7.2 中（56:A:a）的整个系 Ω。然而，必须注意的一点是，在这种情况下，Ω 的全部解自动给予虚构玩家 $n+1$ 数额 $v[(n+1)]$。即，这里
519 $\Omega=\Omega_c$，$c=v[(n+1)]$，即 $\Omega=\Omega''$。［见（56:A:b）和（56:A:d），同上］因此，在 Ω 与 Ω″之间，尤其在（56:A:c）和（56:A:d）的 Ω′与 Ω″之间，我们有可能定义的任何集合都与 Ω 一致，就我们当前的目的而言都是可以接受的。

换句话说：在这种情况下，摆在我们面前的 Ω′与 Ω″之间的选择没有实际意义。这里，两种选择都与旧理论一致。事实上，这里根本没有必要放弃旧理论。①

56.9.5 第二：对于一个 n 人零和博弈来说，旧理论中的解是以如下方式定义的：

(56:C:a) $\qquad \vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$；

(56:C:b) $\qquad \alpha_i \geqq v[(i)] \quad i=1,\cdots,n$；

(56:C:c) $\qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$。

56.8.1 中（56:7）我们的新方案与此不同。这里，我们有

(56:C:a*) $\qquad \vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\}$；

而且，根据（56:9）、（56:10）以及（56:16），

(56:C:b*) $\qquad \alpha_i \geqq v[(i)],\quad i=1,\cdots,n$；

(56:C:c*) $\qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \leqq 0$。

---

① 限制 Ω 的必要性是 56.5—56.6 中分析一个非零和博弈 Γ 时推导出来的。——519，①

前面的说明告诉我们，在当前情况下，旧理论与新理论之间不可能有真正的不同。[①] 不过，明白这样一点总是有益的：（从旧理论的角度看）(56:C:a)—(56:C:c)和(56:C:a*)—(56:C:c*)这两种方法不会有真正的不同。

这两者之间的惟一不同在于(56:C:c)和(56:C:c*)。回想 44.7.2 的定义，我们看到，(56:C:a)—(56:C:c)与(56:C:a*)—(56:C:c*)之间的不同也能够被表述为：前者等于就 $E(0)$ 考虑解；后者是就 $F(0)$ 考虑解。我们已经在 46.8.1 中注意到，0 落在博弈 Γ 的"正常"范围之内，而且，根据 45.6.1 中的(45:O:b)，$E(0)$ 和 $F(0)$ 有相同解。因此，我们说明了它们完全一致。

这两点说明系统地利用了第 9 章的合成和分解理论，为的是分析计划中的新方法对零和博弈 Γ 的影响。这一方法的主要内容是从 Γ 到 $\overline{\Gamma}$ 的过渡，如我们看到的那样，这等于给 Γ 添加哑玩家。与第 9 章中研究的一般分解相比，这只是一种极为特殊的情况。相应地，与那里的较为 520
一般的定理相比，我们要用到的特殊结果本来能够更轻易得到。由于第 9 章的一般结果随时可用，更由于上述分析把我们当前的分析更清楚地建立在了适宜背景之上，我们不深入分析这个题目。

56.10　占优概念分析

56.10.1　让我们回到一般 n 人博弈 Γ，其零和扩展

---

① 或沿着这一思路建立起来的任一种新理论——我们尚未在 Ω' 与 Ω'' 之间做出抉择。——519，②

博弈 $\overline{\Gamma}$ 以及 56.8 中引入的新的研究分配的方法。

肯定的一点是，一般来说，$\overline{\Gamma}$ 的全部解不能被用于定义一个令人满意的 Γ 的解。这是我们在 56.5—56.6 中通过特例分析——即决疑法——已经证明了的事情。现在，让我们系统地逐步解决这一问题，即把 30.1.1 中给出的解的正式定义应用于这一博弈并试图完全一般地确定它的哪些性质是不能令人满意的，需要修改。

为此，我们将使用 56.8.1 中新方案(57:7)中 $\overline{\Gamma}$ 的分配概念。这一计划的一个要点是，它强调实玩家在 $\overline{\Gamma}$ 中的基本重要性，即把我们的注意力更多地从 Γ 转移到 $\overline{\Gamma}$。当然，这样做并不破坏这样一个事实，即我们把 30.1.1 的正式理论应用于 $(n+1)$ 人零和扩展博弈 $\overline{\Gamma}$，而不是将其应用于 n 人博弈 Γ（这是不可能的）。

30.1.1 的概念全部以占优为基础。因此，我们首先表述占优对于 $\overline{\Gamma}$ 的分配而言的含义。

考虑两个分配

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\},\quad \vec{\beta}=\{\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}\}。$$

占优

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$$

意味着，存在一个非空集合 $S\subseteq(1,\cdots,n,n+1)$，它是 $\vec{\alpha}$ 的有效集，即

$$(56:17)\qquad \sum_{i\text{属于}S}\alpha_i\leqq \mathrm{v}(S),$$

使得

$$(56:18)\qquad \alpha_i>\beta_i,\ i\text{ 属于 }S。$$

我们希望只用 α_i 和 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 来表达这个占优关系。

因此，有必要区别两种可能性：

56.10.2　第一：S 中不包含 $n+1$，那么，

(56:19)　　$S \subseteq (1,\cdots,n)$ 且 S 不是空集。

(56:17)和(56:18)无需重新阐释，因为它们仅仅涉及 α_i、 521
β_i，$i=1,\cdots,n$。另外，在(56:17)的 $\mathrm{v}(S)$ 中，$S \subseteq (1,\cdots,n)$。

第二：S 的确包含 $n+1$。令 $T = S-(n+1)$，那么，

(56:20)　　$T \subseteq (1,\cdots,n)$，　T 有可能是空集。

条件(56:17)和(56:18)必须重新阐释，因为它们包含 α_{n+1} 和 β_{n+1}。

一个自然的做法是在 $(1,\cdots,n,n+1)$ 中构造 $-S$，即 $(1,\cdots,n,n+1)-S$；在 $(1,\cdots,n)$ 中构造 $-T$，即 $(1,\cdots,n)-T$。这两个集合显然相等，不过，它们各自都有一个符号总归是有好处的。我们用 $\perp S$ 记前者，用 $-T$ 记后者。

因为 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\alpha_i = 0$，所以

$$\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i = -\sum_{i\text{属于}\perp S}\alpha_i = -\sum_{i\text{属于}-T}\alpha_i,$$

$$\mathrm{v}(S) = -\mathrm{v}(\perp S) = -\mathrm{v}(-T)。$$

从而，(56:17)变成

(56:21)　　$$\sum_{i\text{属于}-T}\alpha_i \geqq \mathrm{v}(-T)。$$

这仅仅涉及 α_i，$i=1,\cdots,n$。另外，在(56:21)的 $\mathrm{v}(-T)$ 中，$-T \subseteq (1,\cdots,n)$。接下来，(56:18)变成了

(56:22)　　$\alpha_i > \beta_i$　i 属于 T，

且

$$\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}。$$

最后一个不等式意味着，

(56:23) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i。$$

(56:22)和(56:23)也仅仅涉及 α_i 和 β_i,$(i=1,\cdots,n)$。

总之:

(56:D) $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 意味着,要么

(56:D:a) 存在一个 S 满足(56:19)和(56:17)、(56:18);

要么

(56:D:b) 存在一个 T 满足(56:20)和(56:21)、(56:22)、(56:23)。

注意,这些准则仅仅涉及 $S,T,-T \subseteq (1,\cdots,n)$ 和 α_i、β_i $(i=1,\cdots,n)$。也就是说,它们仅仅涉及最初的博弈 Γ 和实玩家 $1,\cdots,n$。

522 **56.10.3** 占优准则(56:D)得自把 30.1.1 的最初定义一字不漏地直接应用于 $\overline{\Gamma}$,然后转换为 Γ 的描述。这一严格运算已经做出,让我们从解释的角度研究一下这个结果,即看一看(56:D)的条件是否产生当前情况中占优的一个合理定义。

根据(56:D),占优在(56:D:a)和(56:D:b)两种情况下都成立。

(56:D:a)只不过是 30.1.1 的最初定义的重述。[①] 它表达的是,存在着一组(实)玩家[(56:19)的集合 S],其中每一位玩家都认为他在 $\vec{\alpha}$ 中的个人处境优于其在 $\vec{\beta}$ 中的处境[这是(56:18)],而且他们知道他们能够作为一个组,即

① 将其运用于一般博弈 Γ,这种情况下,理论并没有被扩展!——522,①

一个联盟，强制推行他们的偏好[这是(56:17)]。

另一方面，从 Γ 和实玩家的角度看，(56:D)是某种崭新的事情。它再次要求存在一个(实)玩家组[(56:20)的集合 T]，其中每一位玩家认为自己在 $\vec{\alpha}$ 中的处境优于其在 $\vec{\beta}$ 中的处境[这是(56:22)]。这个组强制推行其偏好的能力[即(56:17)]并不是必需的。相反，我们有这样一个条件，即留在这个组外边的实玩家绝不能够阻止这个组所倾向的分配。①

---

① 留在外边的(实)玩家，即 $-T$ 中的那些玩家，能够阻止这个组所倾向的分配，条件是他们能够独自得到 $\vec{\alpha}$ 赋予他们的总额，即

$$\sum_{i\text{属于}-T} \alpha_i < \mathrm{v}(-T)。$$

(注意，我们不得不去掉等号，因为那不能阻止分配 $\vec{\alpha}$。)这一说法的否定是

(56:21) $$\sum_{i\text{属于}-T} \alpha_i \geqq \mathrm{v}(-T)。$$

这可以与最初的组 T 强制推行其偏好的能力的表达式比较，即

(56:17) $$\sum_{i\text{属于}T} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(T)。$$

应该注意的是，(56:17)和(56:21)中的一个并不隐含着另一个：完全有可能，组 T 在其成员受影响的范围之内能够强制推行 $\vec{\alpha}$，与此同时，组 $-T$ 在其成员受影响的范围之内能够阻止 $\vec{\alpha}$。另一方面，还有可能的是，两个组都无力强制推行或阻止任何事情。

然而，如果 Γ 是一个零和博弈，且如果我们要求(如旧理论中那样) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$，那么，(56:17)和(56:21)等价。事实上，在这种情况下，

$$\mathrm{v}(T) + \mathrm{v}(-T) = \mathrm{v}[(1,\cdots,n)] = 0,$$

所以

$$\sum_{i\text{属于}-T} \alpha_i = -\sum_{i\text{属于}T} \alpha_i,\ \mathrm{v}(-T) = -\mathrm{v}(T),$$

由此得出上述等价性。——522，②

最后，存在着一个奇特的条件：全部（实）玩家——即整个社会——在（所倾向的）制度$\vec{\alpha}$下的总体处境必须比其在（被拒绝的）制度$\vec{\beta}$下差［这是(56:23)］。

56.10.4 (56:D:b)，这一奇怪的选择自然源于把
523 虚构玩家$n+1$当作一个实体。如果我们不这么做，并努力在现实意义——即从实玩家的意义——上评价事情，那么，要解释(56:D:b)是十分困难的。我们充其量能够说，它似乎假设着一个有影响力的有效行动，它肯定会伤害社会整体（即全体实玩家整体）。特别地，在这种情况下，当（全部实玩家的）一个特定的组认为他们在$\vec{\alpha}$中的处境优于其在$\vec{\beta}$中的处境时，如果其余（实）玩家无法阻止这一安排，即便它对社会整体有害，这一占优关系就得到肯定。

占优(56:D:b)与普通的(56:D:a)进行比较时，尤其显著的区别有：

第一，在(56:D:a)中强制推行自己的偏好的能力是本质，而在(56:D:b)中，关键是其他人阻止它的能力。第二，在(56:D:a)中，主动的一组决不能是空集，而在(56:D:b)中，它能够是空集［见(56:19)和(56:20)］。第三，反社会观点出现在(56:D:b)中，而根本不出现在(56:D:a)中。

至此，读者会注意到，(56:D:b)相当具有非理性特征，不过毕竟不是完全陌生的。详细述说(56:D:b)是一个严格的形式化并不困难。不过，我们没有必要为此花费更多篇幅。重要的是，我们已经有了充分的理由从(56:D:b)中看出56.5—56.6中就一种特殊情况分析的

哪些困难产生的一般原因。显然，不像(56:D:a)那样，(56:D:b)不是研究占优概念的一个直接合理的方法。

因此，我们将试图解决我们的困难的一个简单办法是干脆拒绝(56:D:b)。

56.11　严格讨论

56.11.1　我们已经决定通过拒绝 56.10.2 的(56:D)中的(56:D:b)并保留(56:D:a)来重新定义占优。这一新的占优概念能够以两种方式表述，且两种方式都值得考虑。

第一：正如我们在 56.10.3 开头指出的那样，(56:D:a)等于是 30.1.1 的相应定义的重复。惟一的区别是，Γ 是一个 n 人零和博弈，而现在它是一个一般 n 人博弈。 *524*

因此，我们当前的方法意味着，我们扩展到当前情况，30.1.1 中占优的定义保持不变，不考虑这一博弈不再要求是零和博弈这一事实。①

第二：让我们从 $\overline{\Gamma}$ 的标准来看(56:D:a)，而不是从 Γ 的标准来看(56:D:a)受到的约束。我们最初在 56.10 中的讨论给出了两种情况：(56:D:a)和(56:D:b)，它们依赖于下面的合取：从 30.1.1 意义上 $\overline{\Gamma}$ 中的占优必须以某个集合 S 为基础。现在，当 $n+1$ 不属于 S 时，有(56:D:a)；当 $n+1$ 属于 S 时，有(56:D:b)。因此，对(56:D:a)的这

① 我们花费这么多篇幅才得出这一简单原理。这显得有些奇怪。事实上，在我们最终接受它之前，我们还需要 56.11.2 的进一步分析。然而，尽管有了极为广泛的推广，仍需警惕不加选择地采取 30.1.1 的定义。这一段中给出的详细归纳法似乎最适合这一目的。——524，①

个约束等于要求集合 S 绝不能包含 $n+1$。

我们重复如下：我们的新占优概念意味着，就 $\overline{\Gamma}$ 而言，在 30.1.1 中占优的定义中，我们给集合 S 受到的约束条件添加一个条件：S 决不能包含一个特定的元素，即 $n+1$。

这还能够被视为有效集的概念受到的一个约束：只有在一个集合不包含 $n+1$ 时，我们视其为一个有效集。[当然，最初的条件(30.3)也是必不可少的。]

56.11.2 接着，我们研究 $\overline{\Gamma}$ 的新的解概念，即以 56.11.1中引入的新的占优概念为基础的 Γ 的解。这一分析中，我们将依靠博弈 $\overline{\Gamma}$ 和分配的形式(56:5)[而不依靠博弈 Γ 和分配的形式(56:7)]以及 56.11.1 的第二点说明中阐述的占优的定义。

我们将通过证明四个引理来得到我们的结果：

(56:E) 如果从新的意义上说 $\overline{V}$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的一个解，那么，$\overline{V}$ 的每个

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$$

都有

$$\alpha_{n+1}=\mathrm{v}[(n+1)]。$$

证明：假设上述命题不成立，那么，必然有 $\alpha_{n+1}\geqq \mathrm{v}[(n+1)]$，从而，$\overline{V}$ 中存在一个 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$，有 $\alpha_{n+1}>\mathrm{v}[(n+1)]$。令$\alpha_{n+1}=\mathrm{v}[(n+1)]+\varepsilon$，$\varepsilon>0$。定义 $\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}\}$，

$$\beta_i=\alpha_i+\frac{\varepsilon}{n},\quad i=1,\cdots,n;$$

$$\beta_{n+1}=\alpha_{n+1}-\varepsilon=\mathrm{v}[(n+1)]。$$

525 由于 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=-\beta_{n+1}=-\mathrm{v}[(n+1)]=\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$，且

$\beta_i > \alpha_i, i = 1, \cdots, n$，所以利用集合$S = (1, \cdots, n)$可证明$\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。[①]由于$\vec{\alpha}$属于$\overline{V}$，$\vec{\beta}$不可能属于它。因此，$\overline{V}$中存在一个$\vec{\gamma}$，$\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$。现在，考虑强制推行这一占优的集合$S$。因为$S$不包含$n+1$，我们有$S \subseteq (1, \cdots, n)$。由于$\beta_i > \alpha_i$，$i = 1, \cdots, n$，那么，$\vec{\gamma} \succ \vec{\beta}$意味着$\vec{\gamma} \succ \vec{\alpha}$。但是，$\vec{\gamma}$和$\vec{\alpha}$都属于$\overline{V}$。这样，我们得到一个矛盾。

(56:F) 如果从新的意义上说$\overline{V}$是$\overline{\Gamma}$的一个解，那么，它在旧的意义上说也是一个解。

证明：我们必须证明 30. 1. 1(30:5:a)和(30:5:b)，在这里的占优关系的新含义中蕴含了其旧有的含义。现在，新意义上的占优意味着旧意义上的占优。因此，我们有关(30:5:b)的断言是直接的。需要详细研究的是(30:5:a)。

假设(30:5:a)在旧意义上不成立，即对于$\overline{V}$中两个分配$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$在旧意义上成立。令$S$是强制推行这一占优的集合。根据(56:E)，$\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = \mathrm{v}[(n+1)]$，因此，$n+1$不可能属于$S$。所以，在新的意义上说，$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$，即(30:5:a)在新的意义上也不成立。证明完毕。

(56:G) 如果在旧理论意义上说$\overline{V}$是$\overline{\Gamma}$的一个解，而且$\overline{V}$的每个

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

都有$\alpha_{n+1} = \mathrm{v}[(n+1)]$，那么，在新理论意义

---

① 这一占优以及这一证明中使用的其他占优都是新的意义上的占优。——525，①

上 $\overline{\mathrm{V}}$ 也是一个解。

证明：我们必须证明的是，这里，有旧理论意义上的占优关系的 30.1.1 的(30:5:a)和(30:5:b)意味着有新理论意义上的占优关系的相同东西。现在，新意义上的占优意味着旧理论意义上的占优，因此有关(30:5:a)的断言是直接的。需要认真研究的只是(30:5:b)。

考虑一个不属于 $\overline{\mathrm{V}}$ 的 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$。由于(30:5:b)在旧意义上成立，$\overline{\mathrm{V}}$ 中存在一个 $\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}\}$，有 $\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$ 在旧意义上成立。令 S 是强制推行这一占优的集合。$\alpha_{n+1}\geqq \mathrm{v}[(n+1)]$ 必然成立，而且根据假设，$\vec{\beta}$ 属于 $\overline{\mathrm{V}}$，所以 $\beta_{n+1}=\mathrm{v}[(n+1)]$。故，$\beta_{n+1}\leqq\alpha_{n+1}$ 且 $n+1$ 不可能属于 S，$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$ 在新的意义上成立，即(30:5:b)在新的意义上成立。证明完毕。

526 (56:H)　　$\overline{\mathrm{V}}$ 在新的意义上是 $\overline{\Gamma}$ 的一个解，其充分必要条件是，它属于 56.7.2 中(56:A:d)的系 Ω''。

证明：必要性是(56:E)和(56:F)的结果，充分性则来自(56:G)。

56.11.3 在解释(56:H)的结果时，我们必须牢记的是，这一分析源于对 $\overline{\Gamma}$ 的全部解组成的系施加约束的必要性，这是 Γ 的理论需要。我们在 56.7 中看到，这一约束的合理结果应该是集合 Ω' 或 Ω''(或两者之间的某个集合)。之后，我们的努力方向是在这两种可行性之间做出抉择。另外，我们在 56.10—56.11.1 中得出结论说，$\overline{\Gamma}$ 中的占优概念的修改有可能回答我们的问题。现在，(56:H)表明，占优概念的这一修改恰好导致集合 Ω''。根据这些共同的

结果，上述抉择是清楚的。我们接受 Ω''作为 Γ 的全部解组成的系。

56.12　解的新定义

56.12　我们结合上述抉择所依据的主要结果重新阐述：

(56:I)

(56:I:a)　对于一个一般 n 人博弈 Γ 来说，一个解是其零和扩展，$(n+1)$ 人博弈 $\overline{\Gamma}$ 的（30.1.1 的最初意义上的）任何一个解，对此，$\overline{\mathrm{V}}$ 中所有的

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$$

有

(56:24)　$\alpha_{n+1}=\mathrm{v}[(n+1)]$。

这些解恰好形成 56.7.2 中(56:A:d)的集合 Ω''。

(56:I:b)　对于这些分配，取形式(56:7)，$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\}$（即强调的是 Γ 及其玩家，而不是 $\overline{\Gamma}$），把(56:24)写成

(56:25)　$\sum_{i=1}^{n}a_i=\mathrm{v}[(1,\cdots,n)]$。

这显然是 56.8.2 中(56:10)的加强形式。

(56:I:c)　在 Γ 本身是零和博弈的特殊情况下，对于 Γ 来说，我们新的解概念与旧的解概念一致，即 30.1.1 不加修改的应用。（见 56.9.4 中第一点说明。）因此，没有必要再区别新旧

理论。（见第518页脚注①。）

527 (56:I:d)　对于一个 n 人博弈 Γ 来说，解也能够通过不加修改地直接把30.1.1的定义应用于 Γ 来得到。Γ 的分配的概念必须取形式(56:7)。（见56.11.1中第一点说明。）

(56:I:e)　(56:I:d)成立意味着，像56.8.2中给出的那样，取(56:7)形式的分配的描述中没有什么必须添加的东西。然而，根据(56:I:b)，方程(56:25)将在每个解 $\overline{V}$ 中自动成立。因此，如果需要的话，我们可以添加(56:25)，即把56.8.2的(56:10)加强为(56:25)。[①]

(56:I:f)　(56:I:a)中，$\overline{\Gamma}$ 的解受到的约束还能够表达为修改 $\overline{\Gamma}$ 的占优概念，但允许修改过的意思上的解。这一修改等于对(30.1.1意义上的)有效集增加一个条件，即它们绝对不能包含 $n+1$。（见56.11.1的第二点说明。）

---

① 允许约束条件

(56:10)
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}[(1,\cdots,n)],$$

变成

(56:25)
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathrm{v}[(1,\cdots,n)],$$

这类似于56.9.5的第二点说明中提到的 $E(0)$ 和 $F(0)$ 之间的等价（但更为一般）。——527,①

57. 特征函数及相关问题

57.1　特征函数:扩展型和受约束型

57.1　现在,我们有了一个理论,它适用于所有博弈,而且——它是 30.1.1 的关于零和博弈的理论扩展,与之类似——它的基础是特征函数。也就是说,真正界定该博弈的 11.2.3 的函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$, $k=1,\cdots,n$ 并不直接影响该理论,而只是通过特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 起作用。①

然而,对于一个零和博弈和一个非零和博弈来说,特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 的使用还是有区别的。对于一个 n 人零和博弈 Γ 来说,特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 是就全部集合 $S\subseteq(1,\cdots,n)$ 定义的,且仅仅对这些集合有定义。(见 25.1)对于一个一般 n 人博弈 $\bar{\Gamma}$ 来说,我们却不得不构造其零和扩展博弈,$(n+1)$ 人博弈 $\bar{\Gamma}$,而且,特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 实际上就像 $\bar{\Gamma}$ 的(旧的意义上的)特征函数那样建立起来。[这正是我们最近,尤其是 56.4.1、56.5.1、56.7.2、56.9.1—56.10.3、 528
56.11.2—56.12 讨论的 $\mathrm{v}(S)$。]相应地,现在的 $\mathrm{v}(S)$ 是对集合 $S\subseteq(1,\cdots,n,n+1)$ 定义的,且仅仅对这些集合有定义。然而,如果我们愿意的话,我们可以仅仅就 $S\subseteq(1,\cdots,n)$ 考虑 $\mathrm{v}(S)$。这么做时,我们将称其为**受约束**特

---

① 当然,$\mathrm{v}(S)$ 是借助 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 来定义的。见 25.1.3 和 58.1。——527,②

征函数；最初定义域中的函数 v(S)包括所有 $S\subseteq(1,\cdots,n,n+1)$，是扩展特征函数。

在零和博弈的特殊情况下，我们由此得出结论：旧理论的特征函数是新理论的受约束特征函数。[①]

回到一般博弈，我们看到，特征函数是我们当前理论的基础。在该理论的各种等价表述中，56.12 中的(56:I:a)使用的是扩展特征函数，而(56:I:d)使用的是受约束特征函数。

所以，我们的下一个目标必然是确定这些特征函数及其相互关系的实质。

57.2 基本性质

57.2.1 考虑一个一般 n 人博弈 Γ 及其如上定义的两个特征函数：一个是对 $I=(1,\cdots,n)$ 的全部子集 S 定义的受约束特征函数 v(S)，另一个是对 $\bar{I}=(1,\cdots,n,n+1)$ 的全部子集定义的扩展特征函数 v(S)。[②]

在随后的分析中，如 56.10.2 中第二点说明中那样，我们必须区别 $-S$ 的两种可能性。对于 $S\subseteq\bar{I}=(1,\cdots,n,n+1)$，我们能够构造 $\bar{I}$ 中的 $-S$，即 $\bar{I}-S$，而对于 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$，我们还能够构造 I 中的 $-S$，即 $I-S$。[③] 我们仍

① 所有这些区别和定义不可能且不会影响严格证明过的如下事实：对于零和博弈来说，两种理论相互等价。[见 56.1.2 中的(56:I:c)。]——528,①

② 我们用相同符号记它们，因为在它们同时有定义的地方，它们总有相同取值。——528,②

③ 就同一个 S(当然了，$S\subseteq I$)建立的这两个集合显然不同。在 56.10.2 中，我们声称它们相同，但在那里，我们是就两个不同集合 S 和 T 建立它们的。——528,③

然用 $\perp S$ 记前者,用 $-S$ 记后者。

如我们在 25.3 和第 26 节就 n 人零和博弈的特征函数做的那样,我们要确定一般 n 人博弈的两个特征的基本性质。

首先考虑扩展特征函数。由于它是 $(n+1)$ 人零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 的旧意义上的特征函数,它必定有 25.3.1 中阐述的性质(25:3:a)—(25:3:c)——只不过用 $\bar{I}=(1,\cdots,n,n+1)$ 替换那里的 $I=(1,\cdots,n)$ 而已。如此,我们得到:

(57:1:a)　　$\mathrm{v}(\ominus)=0$,

(57:1:b)　　$\mathrm{v}(\perp S)=-\mathrm{v}(S)$,　　529

(57:1:c)　　如 $S\cap T=\ominus$,则 $\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$。

$(S,T\subseteq\bar{I})$。

接着,我们考虑受约束特征函数。通过把我们自己限制于 I 的子集,我们从(57:1:a)—(57:1:c)得到有关它的条件。对于(57:1:a)和(57:1:c)来说,这直接可行,但是对于(57:1:b)来说,这是不可能的。① 以这种方式,我们得到:

(57:2:a)　　$\mathrm{v}(\ominus)=0$,

(57:2:c)　　如 $S\cap T=\ominus$,则 $\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$。

$(S,T\subseteq I)$

注意,对于 S,我们无法用一个等价的东西替换(57:1:b)。事实上,关于 $-S$,我们能够在(57:1:c)中令 $T=-S$。这给出

---

① S 和 $\perp S$ 不可能同时 $\subseteq I=(1,\cdots,n)$,因为它们中的一个必然包含 $n+1$。——529,① (57:2:b) $\quad v(-S) \leqq v(I) - v(S)$。

即便 $v(I)=0$,(57:2:b)也只不过变成

(57:2:b*) $\quad v(-S) \leqq -v(S)$,

并不等价于 25.3.1 中的(25:3:b)

$$v(-S) = -v(S)。$$

根据其推导,(57:1:a)—(57:1:c)以及(57:2:a)、(57:2:c)只是(扩展或受约束)特征函数的必要条件。下面,我们要研究它们是否也是其充分条件。

57.2.2 如果 $\overline{\Gamma}$ 是任意一个$(n+1)$人零和博弈,那么,我们能够从 26.2 的结果得出结论:满足(57:1:a)—(57:1:c)的任何 $v(S)$ 是某个适宜的 $\overline{\Gamma}$ 的(旧意义上的)特征函数,即一个适宜的一般 n 人博弈 Γ 的扩展特征函数。换句话说:这证明了条件(57:1:a)—(57:1:c)是充分必要条件——它们包含着所有可能的一般 n 人博弈 Γ 的特征函数的一个完备数学描述。

然而,$\overline{\Gamma}$ 并不是随意的。正如我们在 56.2.2 中看到的那样,(虚)玩家 $n+1$ 不影响博弈进程,即他没有个人动作;$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n,\tau_{n+1})$并不直接依赖于他的变量 τ_{n+1}。而且,根据 56.2.2,显然 $\overline{\Gamma}$ 必须服从的惟一一个约束条件是:如果在一个$(n+1)$人零和博弈 Γ 中,玩家 $n+1$ 不影响博弈进程,那么,我们就能够将 $\overline{\Gamma}$ 视为其余 n 个玩家 $1,\cdots,n$ 的一个一般 n 人博弈 Γ 的零和扩展。[①]

---

① 也就是说,在规则允许的情况下,我们能够把 $n+1$ 当作一个虚玩家来对待。我们当然知道,存在着 $\overline{\Gamma}$ 的这样一些解 $\overline{V}$,它们表明他是一个实玩家。[属于 Ω 而不属于 Ω'' 的玩家,见 56.7.2 中的(56:A:a)—(56:A:d)和 56.12 中的(56:I:a);还有,请回忆 56.3.2 和 56.3.4。]——529,②

所以，我们现在面对的问题是：(57:1:a)—(57:1:c)是全部$(n+1)$人零和博弈的旧意义上的特征函数的充分必要条件，那么，我们必须如何加强它们才能等于对玩家$n+1$不影响博弈进程的全部$(n+1)$人零和博弈的(旧意义上的)特征函数做同样的事情呢？ 530

回答这一问题等于给出全部$(n+1)$人博弈的扩展特征函数的完全数学描述。但到那时，仍然留有对有条件特征函数做这些相同事情的问题。

我们将会看到，首先向第一个问题发起攻击，一种较为优越方案产生了：第一个问题能够以多种方式借助后者来解决。然而，我们的方法将以上面的分析为主。

57.3 全部特征函数的确定

57.3.1 接下来，我们要证明的是，必要条件(57:2:a)和(57:2:c)也是充分条件：对于任意满足(57:2:a)和(57:2:c)的数字集合函数$\mathrm{v}(S)$，存在一个一般n人博弈Γ，$\mathrm{v}(S)$是其受约束特征函数。①

为了避免混淆，我们用$\mathrm{v}_0(S)$记满足(57:2:a)和(57:2:c)的给定的数字集合函数。借助于这个函数，我们将定义一个特定的一般n人博弈Γ，并用$\mathrm{v}(S)$记这个Γ的受约束特征函数。这样，我们必须证明$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}_0(S)$。

给定一个满足(57:2:a)和(57:2:c)的数字集合函数。我们定义一般n人博弈Γ如下：②

① 下面的构造过程与 26.1 的过程有很多共同之处。——530,①

② 读者应该将这里的细节与 26.1.2 中内容对比。——530,②

每位玩家 $k=1,\cdots,n$ 将借助一个个人动作选择 I 的一个包含 k 的子集。每个人独立地做出自己的选择。

此后,按如下方式支付:

满足

(57:3) $$S_k = S \quad k\text{属于}S$$

的 S 被称为一个环(ring)。有共同元素的任何两个环等同。换句话说:(一局博弈中实际形成的)全部环的总和是 I 的两两不相交子集的系。

不属于任何环的每位玩家自己形成一个一元集,称单人集(solo set)。因此,(一局博弈中实际形成的)全部环和单人集的总和是 I 的一个分解,即 I 的两两不相交子集的一个系,其和等于 I。用 $C_1,\cdots,C_p$ 记这些集合,它们的元素个数分别记为 $n_1,\cdots,n_p$。

531 现在,考虑一个玩家 k。他恰好属于集合 $C_1,\cdots,C_p$ 之一,如 C_q。那么,玩家 k 得到数额

(57:4) $$\frac{1}{n_q}\mathrm{v}_0(C_q)。$$

这就完成了博弈 Γ 的描述。Γ 显然是一个一般 n 人博弈,而且它的零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 也是清楚的。我们尤其强调的是,在 $\overline{\Gamma}$ 中,虚玩家 $n+1$ 得到的数额是

(57:5) $$-\sum_{q=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_q)。$$①

① 由(57:4),C_q 中的 n_q 个玩家总共得到的数额是 $\mathrm{v}_0(C_q)$。因此,全体玩家 $1,\cdots,n$,$C_1,\cdots,C_p$ 中的全体玩家总共得到的数额是 $\sum_{q=1}^{p}\mathrm{v}_0(C_q)$。故,(57:5)成立。——531,①

下面，我们要证明的是，Γ 有理想的有条件特征函数 $v_0(S)$。

57.3.2　记 Γ 的有条件特征函数为 $v(S)$。要牢记的一点是，(57:2:a) 和 (57:2:c) 对于 $v(S)$ 成立是因为它是一个有条件的特征函数，而且按照假设它也对 $v_0(S)$ 成立。

如果 S 是一个空集，那么，由 (57:2:a)，$v(S) = v_0(S)$。这样，我们可以假设 S 不是空集。在这种情况下，属于 S 的全体玩家的一个联盟能够主导其 S_k 的选择，使 S 肯定是一个环。这只需 S 中的每个 k 都选择其 $S_k = S$。无论（$-S$ 中）其他玩家做什么，S 都将是集合（环或单人集）$C_1, \cdots, C_p$ 之一，如 C_q。$C_q = S$ 中的每个 k 得到数额 (57:4)，因此，整个联盟得到数额 $v_0(S)$。所以，

(57:6)
$$v(S) \geqq v_0(S)。$$

现在，考虑补集 $-S$。属于 $-S$ 的全体玩家的一个联盟能够主导其 k 的选择，使 S 是环与单人集的并集。如果 $-S$ 是空集，那么，这自动地是正确的，因为那样的话，$S = I$。如果 $-S$ 不是空集，那么，$-S$ 中的每个 k 选择他的 $S_k = -S$ 就足够了。因此，$-S$ 是一个环，从而 S 是环与单人集的和。

所以，S 是集合 $C_1, \cdots, C_p$ 中的几个的和，如

$$C_{1'}, \cdots, C_{r'}$$

($1', \cdots, r'$ 是数 $1, \cdots, p$ 中的几个)。C_q ($q = s' = 1', \cdots, r'$) 中的每个 k 得到数额 (57:4)，因此 C_q 中 n_q 个玩家总共得到数额 $v_0(C_q)$，从而 S 的全体玩家总共得到数额 $\sum_{s=1}^{r} v_0(C_{s'})$。由于 $C_{1'}, \cdots, C_{r'}$ 是两两不相交的集合且它们 532
和是 S，重复应用 (57:2:c) 给出 $\sum_{s=1}^{r} v_0(C_{s'}) \leqq v_0(S)$。也

就是说：无论 S 的玩家做什么，他们总共得到的数额 $\leq \mathrm{v}_0(S)$。所以

(57:7) $$\mathrm{v}(S) \leq \mathrm{v}_0(S)。$$

(57:6)和(57:7)合起来给出我们想要的结果

(57:8) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)。$$

57.3.3 现在，让我们考虑扩展特征函数。这里，我们知道，条件(57:1:a)—(57:1:c)是必要的。我们将要证明的是，它们也是充分的：即对于满足(57:1:a)—(57:1:c)的任意数字集合函数 $\mathrm{v}(S)$，存在一个一般 n 人博弈 Γ，这个 $\mathrm{v}(S)$ 是其扩展特征函数。

为避免混淆，我们再次用 $\mathrm{v}_0(S)$ 记满足(57:1:a)—(57:1:c)的给定的数字集合函数。用 $\mathrm{v}(S)$ 记我们即将使用的一般 n 人博弈 Γ 的扩展特征函数。

设数字集合函数 $\mathrm{v}_0(S)$ 满足(57:1:a)—(57:1:c)。暂时地，仅就集合 $S \subseteq I = (1, \cdots, n)$ 分析它，那么，它满足(57:2:a)和(57:2:c)。因此，57.3.1 和 57.3.2 的构造能够被用于 $\mathrm{v}_0(S)$。这样，我们得到一个一般 n 人博弈 Γ，它的有条件特征函数总有 $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$①，而且，对于 $S \subseteq I$，其扩展特征函数有 $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S)$。也就是说，如果我们返回到这些 S 的自然取值范围②，那么，我们有：

(57:9) $$\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}_0(S), \quad n+1 \text{ 不属于 } S。$$

令 $n+1$ 属于 S，那么，它不属于 $\perp S$。因此(57:9)给出 $\mathrm{v}(\perp S) = \mathrm{v}_0(\perp S)$。对于 $\mathrm{v}(S)$ 来说，(57:1:a)—(57:1:c)

---

① 这里的"总有"仅限于 $S \subseteq I$。——532，①

② 在这种情况下，它由 $S \subseteq \bar{I}$ 组成。——532，②

成立，因为它是一个扩展特征函数，而且按照假设，它们对 $v_0(S)$ 也成立。所以，(57:1:b) 给出 $v(\perp S) = -v(S)$，$v_0(\perp S) = -v_0(S)$。这些方程结合起来给出

(57:10)　　$v(S) = v_0(S)$，　如 $n+1$ 属于 S。

(57:9) 和 (57:10) 合起来给出

(57:11)　　$v(S) = v_0(S)$

无条件地成立。

57.3.4　总之：我们已经得到了所有可能的一般 n 人博弈 Γ 的有条件特征函数和扩展特征函数 $v(S)$ 的完备数学描述。前者由 (57:2:a) 和 (57:2:c) 描述，后者由 (57:1:a)—(57:1:c) 描述。

因此，我们遵循 26.2 的类似过程，并分别称满足这些 533
条件的函数为有条件特征函数和扩展特征函数，即便是在仅仅谈到这些函数本身而不提及任何博弈的时候，我们也这样称呼它们。

57.4　可去除玩家集

57.4.1　我们得到的有关扩展特征函数的结果能够被表述为：任何 $(n+1)$ 人零和博弈（旧意义上）的每个特征函数也是某个适宜的一般 n 人博弈的扩展特征函数。① 回想 57.2.2 的讨论，这意味着：任何 $(n+1)$ 人零和博弈的每个特征函数也是一个适宜的 $(n+1)$ 人的特征函数，其中玩家 $n+1$ 丝毫不影响博弈进程。

---

① 事实上，条件 (57:1:a)—(57:1:c) 等于 25.3.1 的 (25:3:a)—(25:3:c) 中用 $\bar{I} = (1, \cdots, n, n+1)$ 替换 $I = (1, \cdots, n)$。——533，①

让我们把这一陈述中的 $n+1$ 换成 n，得到有关 n 人零和博弈和玩家 n 的作用的等价说法。为了便于阐述这一结果，我们定义：

(57:A) 给定一个 n 人零和博弈 Γ，一个集合 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$。我们称 S 对于 Γ 来说是**可去除的**(removable)，如果有可能找到另一个 n 人零和博弈 Γ'，它与 Γ 有相同的特征函数，但在 Γ' 中，属于 S 的玩家都不影响博弈进程。

利用这个定义，我们的断言变成了：集合 $S=(n)$ 是可去除的。给定任一玩家 $k=1,\cdots,n$，我们能够对换玩家 k 与 n 的角色，因此集合 $S(k)$ 也是可去除的。这样，我们看到：

(57:B) 每个博弈 Γ 中的每个一元集 S 都是可去除的。

现在，应该注意到的是，根据我们的理论，在一个博弈中，联盟的全部策略和补偿仅仅依赖于其特征函数。因此，从这个角度看，(57:A)中具有相同特征函数的两个博弈 Γ 和 Γ' 是完全相似的。

所以，(57:B)能够有如下解释：在一个 n 人零和博弈中，任何一位玩家的作用——仅就联盟的策略可能性和补偿而言——都能够在他被剥夺了对博弈进程的影响力的安排中得到完全复制。这里，他的"作用"取其最宽泛的意思：包括他与其他玩家的关系，他对他们之间相互关系的影响。

换句话说：我们在 56.3.2—56.3.4 中描述了一个机

制，借助这一机制，一位不直接影响博弈进程的玩家却能够影响联盟和补偿谈判。我们在(57:B)中表明的是，这一机制完全足以描述任何博弈中任一玩家能够在这方 534
面有的影响。这一说法必须被绝对一字不漏地采纳：我们的结果保证所有可想像的细节和微妙之处都将被复制。

57.4.2 根据(57:B)，每位玩家 $k=1,\cdots,n$ 都是单个地可去除的，即一元集 $S=(k)$ 是可去除的，但这并不意味着，所有这些玩家是同时可去除的——即集合

$$S=I=(1,\cdots,n)$$

是可去除的。事实上，我们有：

(57:C)　　集合 $S=I$ 是可去除的，当且仅当博弈 Γ 是非本质博弈。

证明：玩家 $k=1,\cdots,n$ 都不影响博弈 Γ' 的进程。这意味着所有的函数 $H'_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 都独立于它们的变量 $\tau_1,\cdots,\tau_n$，即它们都是常数

(57:12)　　$$H'_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\alpha_k。$$

由此，

(57:13)　　$$\mathrm{v}(S)=\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k,\quad S\subseteq I。$$

相反，如果(57:13)是必要的，它能够由(57:12)来保证。

所以(57:13)是一个博弈 Γ 的特征函数，对于 Γ，存在着这样一个 Γ'，而(57:13)恰好是非本质博弈的定义。

对于 $n=1,2$，每个博弈 Γ 都是非本质博弈，从而集合

$S = I$——且伴随它的每个集合——是可去除的。[1] 对于 $n \geq 3$，存在着本质博弈，从而 $S = I$ 一般来说不可去除。

因此，出现了这样一个问题：

(57:D) 对于一个本质博弈 Γ 来说，哪些是可去除集？

(57:B)和(57:C)中包含着部分答案：一元集是可去除的，n 元集($S = I$)是不可去除的。界线在什么地方？

57.4.3 当全部$(n-1)$元集都是可去除集时，达到了上界。我们称这样一个博弈为**极端博弈**。这个性质所具有的含义值得想像：在这样一个博弈中，策略局面等价于仅有一位玩家对博弈进程有影响力，其他玩家的作用充
535 其量是影响他的决策。当然，影响的办法是向其提供补偿；这样做的动机是引诱他做出对提供补偿的玩家有利的决策。

现在，我们能够证明：

(57:E) $n = 3$ 时：本质三人零和博弈是极端博弈。

(57:F) $n = 4$ 时：极端博弈和非极端本质四人零和博弈都存在。

更具体说：

(57:E*) 对于本质三人零和博弈来说，全部二元

---

① 有关二人零和博弈的主要结果，根据这一结果，每个这类博弈对于每位玩家来说有一个确定的值(如 v、-v，见 17.8. 和 17.9 的讨论)，这意味着：它说明，该博弈等价于两位玩家得到固定的支付 v、-v。而且，这是他们中的任何一位都没有任何影响的一种安排。

另一方面，在每个本质博弈中，存在着联盟和补偿谈判的相互作用，而且这排除了全部玩家能够同时可去除。——534，①

集都是可去除的。

(57:F*)　对于一个本质四人零和博弈来说，全部三元集都可去除，或者只有一个集合不可去除。①②

这些命题的证明都不十分困难，不过，我们不打算在这里给出它们。

(57:B)、(57:C)、(57:E)和(57:F)表明，有关可去除集和极端博弈的一个一般理论不会十分简单。我们将在随后发表的著作中加以系统讨论。

57.5 策略等价：零和博弈与常数和博弈

57.5.1 我们已经详细论述了一般 n 人博弈 Γ 的零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 的有用性，因此，从此以后，我们将讨论一般 n 人博弈，不再提及这个概念。所以，除非特别指明的相反情况，我们将只利用博弈 Γ 本身及其有约束特征函数。出于这一理由，"有约束"这个限定词将被丢掉，我们将简单地说 Γ 的特征函数。这是与我们在前面就 n 人零和博弈使用的术语一致的，因为现在看来一个特征函数的新旧使用是一致的。(见紧接 57.1 末尾的说明。)

考虑到这些安排，解的概念的定义必须是 56.12 的(56:I:d)中描述的定义。分配最好定义得像(56:I:b)中

---

① 每个二元集都是两个三元集的一个子集(请牢记 $n=4$)，而且，根据上面的分析，这些集合中至少有一个是可去除的。因此，每个二元集都是可去除的。——535,①

② 34.2.2 的立方体 Q 的与这些可能情况对应的部分都能够明确确定下来。——535,②

和(56:I:e)的最后一部分中描述的那样。我们有必要明确重述后一个定义：

一个分配是一个向量

(57:14) $$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\},$$

其分量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 满足的条件是

(57:15) $$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n,$$

536 (57:16) $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\mathrm{v}(I)。$$①

下面，我们把策略等价的概念扩展到当前新结构之中。我们要做的事情完全类似于 42.2 和 42.3.1 中做的事情，即类似于 27.1：

给定一个有函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的一般 n 人博弈 Γ 和一组常数 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$，我们定义一个有函数 $H'_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的新博弈 Γ'：

(57:17) $$H'_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\alpha_k^0。$$

完全像从前那样，我们由此得出结论说，这两个博弈的特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{v}'(S)$ 之间有如下联系：

(57:18) $$\mathrm{v}'(S)=\mathrm{v}(S)+\sum_{i\text{属于}S}\alpha_k^0。$$

我们称这样两个博弈及其特征函数**策略等价**。

由于我们不再受限于零和博弈约束，恰如 42.2.2 中(42:B)中那样，常数 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 不受任何限制。

---

① 正如我们在那里指出的那样，我们本可以等价地使用 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \leqq \mathrm{v}(I)$。事实上，这正是这一条件的最初形式。然而，我们倾向于使用(57:16)。——536,①

我们注意到，正如上面提到的两个例子中的情况那样，这一策略等价引出 Γ 的分配与 Γ' 的分配的同构。具体来说，31.3.3 和 42.4.2 的分析和结论能够不加改变地照搬到当前这种情况，以致没有必要将其重新阐述。

57.5.2　(所有的一般 n 人博弈的)特征函数的取值范围由条件(57:2:a)、(57:2:c)描述。我们将其重述如下：

(57:2:a)　$$\mathrm{v}(\ominus)=0,$$

(57:2:c)　$$\mathrm{v}(S\cup T)\leqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T),\quad S\cap T=\ominus。$$

在这些特征函数中，零和博弈的特征函数，常数和博弈的特征函数形成两个特殊的类。前者由 25.3.1 的(25:3:a)—(25:3:c)描述。(见 26.2。)也就是说，我们必须在(57:2:a)、(57:2:c)[它们与(25:3:a)、(25:3:c)一致]上添加另一个条件

(57:19)　$$\mathrm{v}(-S)=-\mathrm{v}(S)。$$

后者由 42.3.2. 中(42:6:a)—(42:6:c)描述。也就是说，我们必须在(57:2:a)、(57:2:c)[它们与(42:6:a)、 537
(42:6:c)一致]上添加一个条件

(57:20)　$$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(-S)=\mathrm{v}(I)。$$

由于零和博弈是常数和博弈的特殊情况，(57:20)必定是(57:19)的一个结果，总假设有(57:2:a)和(57:2:c)。事情的确是这样。事实上，我们能够证明得更多，即：

(57:G)　(57:19)等价于(57:20)与 $\mathrm{v}(I)=0$ 的结合。

证明：[1]假设 $v(I)=0$，(57:19)和(57:20)显然是相同的命题。因此，我们只需证明(57:19)意味着 $v(I)=0$。事实上，(57:2:a)和(57:19)给出 $v(I)=v(-\ominus)=-v(\ominus)=0$。

注意，(57:20)断言，当 $S\cup T=I$ 时，(57:2:c)中等式成立。[2] 因此，常数和博弈的 $v(S)$ 是由这样一个性质描述的，即两个不同的联盟 S 和 T 包含全部玩家，那么，它们的合并没有额外好处。

对于零和博弈的 $v(S)$ 来说，条件 $v(I)=0$ 是必须添加的。

最后，我们强调，额外条件(57:19)或(57:20)并不意味着，具有这一特征函数的博弈必然是一个零和博弈或常数和博弈。它们仅仅意味着，这样一个特征函数必定属于某个零和博弈或常数和博弈。能够发生这样的事情，一个博弈本身不是零和(或常数和)博弈的博弈有这样一个特征函数，即一个零和(或常数和)博弈的特征函数。在这种情况下，从联盟的策略和补偿的角度看，它表现得类似于一个零和(或常数和)博弈。

57.5.3 下面，我们要解决一个问题，该问题在我们的讨论中多次占据突出地位。56.3.2—56.4.3 的分析提到过这样一个事实：虚构玩家——尽管他不实际出现——并非一个哑玩家。也就是说，从扩展特征

① 从本质上说，这一证明已经在42.3.2中给出。——537，①

② 事实上，$S\cup T=I$ 和(57:2:c)的通常假设 $S\cap T=\ominus$ 意味着，$T=-S$。——537，②

函数和零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 的分解理论的意义上说，它不是一个哑玩家。[1] 在 56.9.3 开头，这个问题再次出现，那里，我们注意到，对于零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 来说，他是一个哑玩家。

现在，我们要回答的问题是：对于哪些一般博弈 Γ 来说，虚玩家是一个哑玩家？[2] 我们证明：

(57:H)　　虚玩家是一个哑玩家的充分必要条件是，Γ 与一个常数和博弈有相同特征函数，即(57:20)得到满足。

证明：正如我们在 43.4.2 末尾看到的那样，一个 538
玩家是一个哑玩家，当且仅当他（作为一个一元集）是该博弈的一个成分。我们必须将此运用于零和博弈 $\overline{\Gamma}$ 中的虚构玩家 $n+1$。$(n+1)$ 是一个成分。这显然意味着，

(57:21)　　$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}[(n+1)]=\mathrm{v}[S\cup(n+1)]$，

其中，$S\subseteq(1,\cdots,n)$。这样，我们有

$$\mathrm{v}[(n+1)]=-\mathrm{v}(I),$$

$$\mathrm{v}[S\cup(n+1)]=-\mathrm{v}[\perp S\cup(n+1)]=-\mathrm{v}(-S)。$$

从而，(57:21)变成

$$\mathrm{v}(S)-\mathrm{v}(I)=-\mathrm{v}(-S),$$

即

(57:22)　　$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(-S)=\mathrm{v}(I)$。

而且，这正是条件(57:20)。

---

① 我们不得不通过明确地把解从 Ω 限制为 Ω'' 来排除他。——537，③

② 56.9.4 中第一点说明表明，对于这些博弈，Ω 和 Ω'' 相同，即对 $\overline{\Gamma}$ 的解的约束是不必要的。——537，④

58. 特征函数的解释

58.1 定义分析

58.1 我们已经得到了一般 n 人博弈理论的一个表述，而且我们发现，特征函数的概念像其在 n 人零和博弈理论中一样基本。因此，我们应该再次研究这一概念的含义，将其数学定义变成明确的形式并添加一些解释说明。

考虑一个一般 n 人博弈 Γ，它由 11.2.3 意义上的函数 $\mathcal{H}_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ $(k=1,\cdots,n)$ 描述。对于一个集合 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$，通过构造 $(n+1)$ 零和博弈 $\bar{\Gamma}$——Γ 的零和扩展——的 $\mathrm{v}(S)$ 来得到 Γ 的特征函数的取值 $\mathrm{v}(S)$。① 因此，我们能够借助 25.1.3 的定义公式来表述它：

$$(58:1)\quad \mathrm{v}(S)=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$$

那里，我们有：

539 $\vec{\xi}$ 是一个向量，有分量 ξ_{τ^S}，

$$\xi_{\tau^S}\geqq 0,\quad \sum_{\tau^S}\xi_{\tau^S}=1;$$

$\vec{\eta}$ 是一个向量，有分量 $\eta_{\tau^{-S}}$

$$\eta_{\tau^{-S}}\geqq 0,\quad \sum_{\tau^{-S}}\eta_{\tau^{-S}}=1;$$

---

① 我们把自己限于 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$，即有约束的特征函数。使用所有的 $S\subseteq\bar{I}=(1,\cdots,n+1)$，即扩展特征函数，与我们当前的立场矛盾。（见 57.5.1 的开头。）——538，①

τ^S 是变量 τ_k(k 属于 S)的综合;τ^{-S} 是变量 τ_k(k 属于 $-S$)的综合;①最后,

(58:2)　　$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{\tau^S,\tau^{-S}} \overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})\xi_{\tau^S}\eta_{\tau^{-S}}$,

其中,

(58:3)　　$\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S}) = \sum_{k属于S} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。②

58.2　获益欲与损人欲

58.2.1　显然,如果联盟 S 采用混合策略 $\vec{\xi}$ 而其敌对联盟 $-S$ ③采用混合策略 $\vec{\eta}$,$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是对于联盟 S 来说一局博弈 $\overline{\Gamma}$ 的期望值。因此,(58:1)定义 $\mathrm{v}(S)$,即对于联盟 S 来说,在如下假设下该博弈的一局的值:联盟 S 想要最

---

①　$-S$ 代表 $I-S$。由于我们正在研究的是 $\overline{\Gamma}$,我们应该已经构造了 $\perp S$,它是 $\overline{I}-S$。(见 57.2.1. 开头)然而,这是无所谓的,因为不存在变量 τ_{n+1}。(见 56.2.2 末尾。)——539,①

②　我们仅仅适用最初的 H_k,$k=1,\cdots,n$,即 56.2.2. 中(56:2)的 H_{n+1}

(58:4)　　$H_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv -\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\tau_n)$

并不出现在这里,其原因自然是 $S\subseteq I=(1,\cdots,n)$。

必须牢记的一点是公式(58:3)是 25.1.3. 中(25:2)的第一个公式。(25:2)的第二个公式给出

(58:5)　　$\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S}) = \sum_{k属于\perp S} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。

(注意,这里我们必须对于那里的 $-S$ 使用 $\perp S=\overline{I}-S$,因为我们正在对付的是 $\overline{\Gamma}$。也可参见脚注①。)由于 $n+1$ 不属于 S,它肯定属于 $\perp S$,所以(58:5)中的 $\sum_{k属于\perp S}$ 并不包含(58:4)的 H_{n+1}。然而,(58:4)必须保证(58:3)的右端与(58:5)的恒等。——539,②

③　脚注①的结果再次适用。——539,③

大化期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，而其敌对联盟 $-S$ 要将其最小化，而且，它们选择各自的（混合）策略 $\vec{\xi},\vec{\eta}$。

在 $(n+1)$ 人博弈 $\bar{\Gamma}$ 中①，这一原理肯定也是正确的，
540 不过，我们实际上正在面对的是 n 人博弈 Γ——$\bar{\Gamma}$ 只不过是一个"工作假说"！而且，在 Γ 中，联盟 $-S$ 要伤害其敌对联盟 S 的欲望并不明显。事实上，联盟 $-S$ 的自然愿望并非减少联盟 S 的期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，而是增加它自己的期望值 $K'(\vec{\xi},\vec{\eta})$。如果 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的减少等价于 $K'(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的增加，那么，这两个原则等同。当 Γ 是一个零和博弈时，情况当然是这样②，但对于一般博弈 Γ 来说，事情未必如此。

---

① 即如果我们视 $-S=I-S$ 好像真的代表着 $\perp S=\bar{I}-S$。——539，④

② 这是因为，当 Γ 是零和博弈时，

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})+K'(\vec{\xi},\vec{\eta})\equiv 0 \tag{58:6}$$

按照常识，这是显然的。一个正式的证明是：

显然，

$$K'(\vec{\xi},\vec{\eta})\equiv\sum_{\tau^S,\tau^{-S}}\overline{H}'(\tau^S,\tau^{-S})\xi_{\tau^S}\eta_{\tau^{-S}}, \tag{58:7}$$

其中，

$$\overline{H}'(\tau^S,\tau^{-S})\equiv\sum_{k\text{属于}-S}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)。 \tag{58:8}$$

[注意，这不是出现在(58:5)中的 $\sum_{k\text{属于}\perp S}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$]。现在，(58:2)与(58:7)的比较告诉我们，(58:6)等价于

$$\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})+\overline{H}'(\tau^S,\tau^{-S})\equiv 0, \tag{58:9}$$

而且(58:3)和(58:5)意味着，(58:9)等于是

$$\sum_{k=1}^{n}H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv 0,$$

即 Γ 是零和博弈的条件。——540，①

也就是说，在一个一般博弈 Γ 中，一组玩家的优势未必是其他玩家的劣势。在这样一个博弈之中，也许存在着对两个组同时有利的动作——或策略变动。换句话说，也许存在着使社会各部门的生产力同时增加的机会。

58.2.2 事实上，这决不仅仅是一种可能性——其所指情形构成经济和社会理论必须应对的主题之一。因此，产生了如下问题：难道我们的方法完全无视这一方面吗？难道因为我们极为强调社会关系的敌对性方面而丢弃其合作的一面吗？

我们认为，事情并非如此。要给出一个完备例子的确困难，原因在于一种理论成立与否最终由其应用中的成功来证明，而且我们的讨论中尚且没有这样的应用。因此，我们将提出支持我们的方法的要点，然后谈一谈能够提供 541
一些确凿证据的应用。

58.3 讨论

58.3.1 这里，如下分析尤其值得注意：

第一：在一个一般（即非零和）博弈中，给对手制造损失也许不会给自己带来直接的好处，但这是给对手施加压力的办法。他也许受这样一种威胁的引导而支付一定的补偿、按照施压者的意愿调整他的策略等。因此，把这类可能的策略考虑进去不是没有道理的；而且，如上面分析的那样，在特征函数的构造中，我们的方法也许是做到这一点的恰当方法。然而，我们必须承认，这并非我们的方法的一个正当理由——它只不过为应用中的成功这一真正的理由提供了背景。

第二：在这个方向上，另一个理由是：我们已经看到，在我们的理论中，所有的解都对应着全体玩家的总体实现最大集体收益。① 当这个最大值得到实现时，一组玩家的进一步获益必定大于或等于其他玩家的损失。的确，过度补偿是能够存在的：即一组玩家可以通过给其他玩家制造较大损失而获得某一收益。然而，我们假设了全体玩家都有完全信息、完全的相互威胁、他们中间的反威胁和补偿。② 因此，我们可以假设，这样的可能性仅仅作为威胁而有效，相应的行动将总是通过谈判和补偿来消除。这并不意味着，这些威胁是永远不会"摊牌"的"虚张声势"。由于对于所有的玩家来说，信息是完全的，永远不会存在怀疑。但是，当一个行动受到这样一个行动威胁时，其中一方遭受的损失大于另一方得到的收益，那么，通过对双方有利的方式进行补偿来避免采取行动的可能就存在。③ 而且，如果事情是这样的话，那么，一方所得再次等于另一方所失。

如果这一观点被一般地接受，那么，我们的困难就消失了。

58.3.2 第三：有人会说，前面两点说明过于粗糙，它并不表明具有我们建议使用的严格形式的理论的合理性。

---

① 见 56.7.1，尤其是第 513 页脚注③。——541，①

② 在零和博弈理论中，我们关于联盟和补偿的总体态度就以此为基础。——541，②

③ 这里，我们并不打算确定补偿的数额——即妥协的本质。这是我们已经有的严格理论的任务。每一实例中，它都将是主题。（见第 61—63 节中的各种解释。）这里，我们只想证明，给全体玩家整体带来损失的行动能够通过上述机制来避免。——541，③

事情的确如此，不过，如 56. 2. 2—57. 1 中给出的那样，十 542
分详细地说明了的我们关于那一理论的动机满足后一个要求。如果读者从前面两点说明的角度重新思考那些章节，那么，你将明白，理想的详细证明正是这些章节的主题。事实上，一个可能的反对意见是，为什么要避开显而易见的捷径呢？[①]

第四：尽管如此，读者也许还会觉得，我们过于强调威胁、补偿等的作用，而且这也许是我们的方法的一个片面性，有可能有损应用中的结果。对此最好的回答，如我们一再指出的那样，是研究那些应用。

因此，我们将分析一些应用。这些应用对应着人们熟悉的经济问题。关于它们的研究将表明，我们的理论带来的结果，在一定程度上，令人满意地符合有关这些问题的常识。只要如下两个条件得到满足，事情就会如此：第一，我们研究的结构要足够简单，以致允许纯粹文字分析，不使用任何数学工具；第二，一些无法从我们的理论中分离出去但又常常在普通的文字方法——联盟和补偿——中排除出去的因素并不起基本作用。我们将会发现，这种情况存在于 61. 2. 2—61. 4 的应用中。事实上，那个例子提供了我们的方法的关键证据。

超过这一点，在第一个条件仍然得到满足、但第二个条件没有得到满足的地方，我们将恰恰在这个方向上发现差异，且其程度足以证明它。在 61. 5. 2、61. 6. 3 和 62. 6

① 一个可能的途径是像 58.1 中那样定义特征函数，然后提出关于零和博弈的理论的推广，即提出 56.12 中的(56:I:d)。——542，①

的应用中，这一点尤为清楚。

最后，即便第一个条件也没有得到满足，由于该问题不再是基本问题，我们逐步到达了理论方法必然取代普通纯文字方法而成为主要方法的境地。①

59. 一般分析

59.1 方案讨论

59.1.1 下面，我们继续我们的一般 n 人博弈理论的应用。我们最好从 n 较小时的全部一般 n 人博弈的系统讨论开始。当 $n\leqq 3$ 时，像零和博弈那样，我们能够做到绝对完备性。关于较大的 n，即 $n\geqq 4$ 的情况讨论的难度不
543 会低于零和博弈的难度，我们只能解决一些特殊情况。

这一次，在分析 $n\geqq 4$ 的博弈时，我们希望大幅度减少篇幅。与我们关于零和博弈的讨论相比，我们这里的讨论能够简短得多；那里，详细讨论是必要的，为的是竖立我们自己对我们的方法、概念及其背后的方法论原理的信心。到了现在这个阶段，理论的一般结构已经得到证实，我们需要的只是竖立对这一章中做出的进一步推广的信心。为此，不那么广泛的应用分析就应该足够了。

---

① 从借助简单情况中可靠的常识性结果来证实理论，到借助复杂情况中的理论来推翻非理论方法，这种重点逐步转移在科学理论的建立中相当典型。——542，②

另外，我们有可能把 $n \leqq 3$ 的一般博弈与一些典型经济问题（如双边垄断、双头垄断等）联系起来。这允许从前面指出的意义上判断我们的理论恰当与否。

$n \geqq 4$ 的博弈的较为详细的研究放在以后将要出版的著述之中。

59.1.2 像第 31 节那样，我们的新理论的系统应用最好从一个一般讨论开始。不过，倒没有必要给出同样详细的讨论。我们必须分析的是，在什么程度上，那里得到的结果能够照搬到当前情况，或需要做什么样的修改。

我们不必像 31.3 那样重新讨论策略等价的作用，因为这个题目已经在 57.5.1 中得到了令人满意的处理。另一方面，我们将拣起源于第 31 节之外的一些问题：简化型、对于特征函数成立的不等式、非本质性和本质性（见 27.1—27.5）；再有：绝对值 $|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$（见 45.3），最后是有关第 9 章的分解理论的一些说明。

59.2 简化型和不等式

59.2.1 如 57.5.1 中介绍的那样，策略等价的概念能够像 27.1 中描述的那样被用于定义特征函数的简化型。

给定一个特征函数 $\mathrm{v}(S)$，其一般策略等价变换由 57.5.1中的（57:18）给出，即

$$\mathrm{v}'(S) = \mathrm{v}(S) + \sum_{k\text{属于}S} \alpha_k^0 \text{。} \tag{59:1}$$

这正好是 27.1.1 中的（27:2），不过，现在的 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 完全不受约束，而那里它们要服从条件（27:1）：$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0$ 。

因此，现在的 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 是 n 个独立参数，而原来它们只代
544 表着 $n-1$ 个独立的参数（见 27.1.3）。①

然而，不要错误地认为，这样导致正规化的可能性较 27.1.4 会受到更多的限制。事实上，我们在那里希望得到一个特殊的 $\mathrm{v}'(S)$——记为 $\bar{\mathrm{v}}$，它满足 $n-1$ 个条件（27:3）：

$$(59:2) \qquad \bar{\mathrm{v}}[(1)]=\bar{\mathrm{v}}[(2)]=\cdots=\bar{\mathrm{v}}[(n)]。$$

然而，那时考虑的特征函数属于零和博弈。因此，我们自动有

$$(59:3) \qquad \bar{\mathrm{v}}[(1,\cdots,n)]=0。$$

将此作为正规化的一个要求，我们就有了 n 个条件：（59:2）和（59:3）。这样，我们得到

$$(59:4) \qquad \mathrm{v}(I)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0,$$

$$(59:5) \qquad \mathrm{v}[(1)]+\alpha_1^0=\mathrm{v}[(2)]+\alpha_2^0=\cdots=\mathrm{v}[(n)]+\alpha_n^0。$$

（59:4）表达的是（59:3）；（59:5）表达的是（59:2）。这些方程对应着（27:1*）和（27:2*），而且容易验证，它们的解恰好是 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 的一个系：

$$(59:6) \qquad \alpha_k^0=-\mathrm{v}[(k)]+\frac{1}{n}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]-\mathrm{v}(I)\Big\}。②$$

---

① 在这方面，我们目前的观点类似于 42.2.2 中我们对常数和博弈采取的观点。——544，①

② 证明：用 β 记（59:5）中 n 项的共同值，那么，（59:5）等于是 $\alpha_k^0=\mathrm{v}[(k)]+\beta$，从而（59:4）变成 $\mathrm{v}(I)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]+n\beta=0$，即

$$\beta=\frac{1}{n}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]-\mathrm{v}(I)\Big\}。——544，②$$

这样，我们能够说：

(59:A)　我们称一个特征函数 $\overline{v}$ 是简化型的特征函数，当且仅当它满足(59:2)和(59:3)。[①] 那么，每个特征函数 $v(S)$ 恰好策略等价于一个简化型特征函数 $\overline{v}$。$\overline{v}$ 由公式(59:1)和(59:6)给定，我们将其称为 $v(S)$ 的简化型。

59.2.2 对 n 个参数 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 的另一个可能要求是要求 $v'(S)$——记为 $\overline{v}$——满足如下 n 个条件：

(59:7)　$\overline{v}[(1)] = \overline{v}[(2)] = \cdots = \overline{v}[(n)] = 0$。

这意味着 545

(59:8)　$v[(1)] + \alpha_1^0 = v[(2)] + \alpha_2^0 = \cdots = v[(n)] + \alpha_n^0 = 0$

即

(59:9)　$\alpha_k^0 = -v[(k)]$。

这样，我们能够说：

(59:B)　我们称一个特征函数 $v(S)$ 是零简化型特征函数，当且仅当它满足(59:7)。这样，每个特征函数 $v(S)$ 都恰好策略等价于一个零简化型特征函数 $\overline{v}(S)$。$\overline{v}$ 由公式(59:1)和(59:9)给定，我们将其称为 $v(S)$ 的零简化型。

59.2.3 让我们考虑简化型特征函数 $\overline{v}(S)$。我们用 $-\gamma$ 记(59:2)中 n 项的连结值，即

(59:10)　$-\gamma = \overline{v}[(1)] = \overline{v}[(2)] = \cdots = \overline{v}[(n)]$。

因此 $-\gamma = v[(k)] + \alpha_k^0$，从而(59:6)给出

---

① 这恰好是 27.1.4 的定义。——544，③

(59:11) $\gamma=\frac{1}{n}\{\mathrm{v}(I)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]\}$。

如果我们使用同一 v(S)的零简化型特征函数 $\bar{\mathrm{v}}(S)$，那么，我们有 $\bar{\mathrm{v}}=\mathrm{v}(I)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0$，因此，根据(59:9)，$\bar{\mathrm{v}}=\mathrm{v}(I)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{v}[(k)]$，即使用(59:11)：

(59:12) $n\gamma=\bar{\mathrm{v}}(I)$。

回到简化型特征函数 $\bar{\mathrm{v}}(S)$，我们看到，27.2 的有些等式和全部不等式仍然成立。

首先，(59:10)能够被陈述为：

(59:13) 对于每个一元集 S，$\bar{\mathrm{v}}(S)=-\gamma$。

这与(27:5*)一致，而(27:5**)并不成立，因为我们在 57.2.1 中看到，25.3.1 中(25:3:b)的等价条件现在不见了，而且这个条件是从(27:5*)推出(27:5**)所必需的。

由(59:13)，57.2.1 中的(57:2:c)重复应用于集合(1)，…，(n)，给出 $-n\gamma\leqq 0$，即

(59:14) $\gamma\geqq 0$。

这与 27.2 中的(27:6)一致。

接下来，考虑 I 的随意一个子集 S。令 p 是其元素个

546 数：$S=(k_1,\cdots,k_p)$。根据(59:13)，57.2.1 中的(57:2:c)重复应用于集合(k_1)，…，(k_p)，给出

$$\bar{\mathrm{v}}(S)\geqq -p\gamma。$$

将这一结果应用于有 $n-p$ 个元素的 $-S$。根据 57.2.1 中的(57:2:b)和(59:3)，我们有

$$\overline{\mathrm{v}}(-S) \leqq -\overline{\mathrm{v}}(S)^{①},$$

因此,前面的不等式现在变成了

$$\overline{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma。$$

结合这两个不等式给出:

(59:15)　　对于每个 p 元集 S, $-p\gamma \leqq \overline{\mathrm{v}}(S) \leqq (n-p)\gamma$。

这与 27.2 中的(27:7)一致。

(59:13)和 $\overline{\mathrm{v}}(\ominus)=0$[即 57.2.1 中的(57:2:a)]还能够被表述为:

(59:16)　　对于 $p=0,1$,我们有(59:15)中第一个关系中的等号。

这与 27.2 中的(27:7*)一致。$\overline{\mathrm{v}}=0$[即(59:3)]还能够被表述为:

(59:17)　　对于 $p=n$,我们有(59:15)的第二个关系中的等号。

这与(27:7**)一致,只是 $p=n-1$ 丢失了,理由同(27:5**)的等价条件的丢失[见(59:13)后面的说明]。

59.3 各种各样的题目

59.3.1 这些不等式现在能够以 27.3.1 中的同样方式来处理。

基于(59:14),有两种情况:

第一种情况:$\gamma=0$。在这种情况下,(59:15)给出,

---

① 注意,在我们现在的应用中,这个不等式取代了 25.3.1 中这个丢失的等式(25:3:b),它曾经在 27.2 中被用到。——546,①

对于所有 S,$\bar{v}(S)=0$。这正是 27.3.1 中讨论的非本质博弈,有那里列举的所有属性。考虑到(59:A),非本质博弈恰好是等价于有 $\bar{v}\equiv 0$ 的那些博弈,完全没有内容的博弈。

第二种情况:$\gamma>0$。通过改变单位,我们能够使 $\gamma=1$,有 27.3.2 中指出的结果。而且,正如那里的情况,我们避免直接这么做。出于与那里相同的理由,联盟策略是这样一个博弈的关键。我们称这种情况下的博弈为本质博弈。

27.4 中有关非本质博弈和本质博弈的准则(27:B)、(27:C)和(27:D)再次成立:在(27:B)中,$\sum_{k=1}^{n} v[(k)]$ 必须换成

547

$$\sum_{k=1}^{n} v[(k)]-v(I),$$

而(27:C)和(27:D)则完全不受影响。事实上,容易验证,那里给出的证明可以照搬到这里,它们的基础是 59.2.1。

我们把 27.5——有关 $\gamma=1$ 的本质博弈——的分析在当前情况的应用留给读者。

59.3.2 现在,我们能够给出与第 31 节相应的分析了。

31.1.1—31.1.3 有关占优、肯定必要集和肯定不必要集概念结构的说明能够不加改变地再照搬到这里。我们也能够像 31.1.4 那样引入凸集和平集的概念。除了 31.1.4 中的(31:E:b)、31.1.5 中的(31:G)和 $p=n-1$ 时的(31:H)之外,31.1.4—31.1.5 的结论也不受影响。这些只不过是 25.3.1 的(25:3:b)中使用的那些结论(见

57.2.1)。

最后,31.1.5 末尾的说明必须被修改。由于上述讨论,值 $p=n-1$ 只不过像包括在(31:8)中的那些结果一样值得怀疑。也就是说,使 S 的必要性令人怀疑的 p 限于 $p\neq 0,1,n$,即满足区间

$$2\leqq p\leqq n-1。 \tag{59:18}$$

因此,这个区间在 $n\geqq 3$ 时开始起作用,并不像 31.1.5 所说那样,$n\geqq 4$ 时才起作用。①

接下来,我们分析 31.2 的结果。读者不难验证,(31:I)、(31:J)和(31:K)不受影响。在(31:L)中,借助于 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的结构能够同样得到说明。第一个结果,$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$ 不再成立,因为它用到 31.1.5 中的(31:H)部分,而(31:H)不再成立。第二个结果,$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$ 不成立,不受影响。(31:L)的这一弱化去除了(31:M)。(31:N)保持成立,因为它只用到(31:L)中未受影响的部分。(31:O)和(31:P)不受影响。

59.3.3　最后,让我们考虑第 9 章的某些概念。

我们在 45.1 中定义了 $|\Gamma|_1$,在 45.2 中定义了 $|\Gamma|_2$,并在 45.3 中讨论了它们的性质。

这两个定义——即 45.1 和 45.2 的相关讨论——能够照搬过来。然而,45.3 中存在着基本变化:在(45:F)中,只有该证明的第二部分成立,第一部分并不成立,因为 548
后者用到了 25.3.1 中的(25:3:b)(见 57.2.1)。

---

① 这与一般 n 人博弈与 $(n+1)$ 人零和博弈之间的关系一致,在 56.2—56.12 中,这一关系至关重要。——547,①

尤其是,我们仍然有

$$(59:19)\qquad |\Gamma|_2 \leqq \frac{n-2}{2}|\Gamma|_1,$$

从而,我们能够用 $|\Gamma|_1$ 来估计 $|\Gamma|_2$。但是,我们没有

$$(59:20)\qquad |\Gamma|_1 \leqq (n-1)|\Gamma|_2\text{①},$$

我们也无法用 $|\Gamma|_2$ 来估计 $|\Gamma|_1$。事实上,我们将在 60.2.1 中看到,对于有些博弈来说,

$$(59:21)\qquad |\Gamma|_1 > 0,\quad |\Gamma|_2 = 0。$$

所以,45.3.3—45.3.4 的说明变得没有意义了。对于 45.3.1 来说也是这样,即其结果(45:E)每当涉及 $|\Gamma|_2$ 时不再成立。对于 $|\Gamma|_1$ 来说,它是成立的,但这不过是定义的简单重复。考虑到这一点以及上面的(59:19)和(59:21),我们看到,(45:E)必须以如下方式弱化:

(59:C) 如果 Γ 是非本质博弈,那么,$|\Gamma|_1=0$,$|\Gamma|_2=0$。

如果 Γ 是本质博弈,那么,$|\Gamma|_1>0$,$|\Gamma|_2\geqq 0$。

作为第 9 章的主题,合成和分解理论就其本质来说能够被扩展到我们当前的结构之中。上面讨论的 $|\Gamma|_1$ 和 $|\Gamma|_2$ 的不同表现需要稍加改变,不过,这些很容易应用。当然了,集合 $E(e_0)$ 和 $F(e_0)$ 中的剩余和解的理论必须被扩展到当前结构中——这同样没有太大困难。

这个题目的详细分析会超出我们在 59.1.1 中设定的范围。另外,在分析零和博弈时,这些结果与第 4 章和第 9 章中得出的结果解释不会有实质性不同。

---

① (59:20)和(59:19)表达的分别是(45:F)的两个部分。——548,①

60. $n \leqq 3$ 一般博弈的解

60.1　$n=1$ 的情况

60.1　下面，像 59.1.1 中声称的那样，我们讨论 $n \leqq 3$ 时的一般 n 人博弈。

首先考虑 $n=1$ 的情况。这种情况已经在 12.2 中考虑过，而且就实际目的而言已经得到解决。尤其是，我们在 12.2.1 中指出过，在这种情况（且只有在这种情况）下，我们有一个纯粹最大值问题。不过，我们希望验证一下我们的一般理论在这种特殊情况下是否给出常识结果。[①] 因此，我们以完全的数学严格性应用我们的理论。

$n=1$ 时，一个一般博弈 Γ 必然是非本质博弈：考虑 549
到其简化型的特征函数，这一点是显然的，因为这样的话，59.2.3 中的(59:16)和(59:17)（在 $p=1=n$ 时）给出 $-\gamma=0$。我们也可以不加简化地应用 27.4 的准则 (27:B)、(27:C)和(27:D)中的任何一个（见 59.3.1）。例如，(27:C)显然得到满足，有 $\alpha_1 = \mathrm{v}[(1)]$。注意，这是 $\mathrm{v}(I)$，即根据 56.9.1 中的(56:13)（根据 12.2.1 的符号），这是 $\mathrm{Max}_\tau H(\tau)$。我们将其重述如下：

(60:1)　　$\alpha_1 = \mathrm{v}[(1)] = \mathrm{v}(I) = \mathrm{Max}_\tau H(\tau)$。

由于 Γ 是非本质博弈，我们能够应用 31.2.3 中的(31:O)

① 这使我们回到 58.3.2 中的第四点说明。——548，②

或(31:P)(见 59.3.2)。这给出:

(60:A) Γ 恰好有一个解,一元集($\vec{\alpha}$),其中,

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1\}\},$$

其中的 α_1 是(60:1)中的 α_1。

这显然是 12.2.1 的"常识"结果。

60.2 $n=2$ 的情况

60.2.1 下面,考虑 $n=2$ 的情况。一个主要事实是,$n=2$ 的一个一般博弈未必是非本质博弈——从而不同于 $n=2$ 时的零和博弈。

事实是:其简化型的特征函数 $\bar{v}(S)$ 完全由 59.2.3 中的(59:16)和(59:17)决定。它是

$$(60:2)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\text{个元素时,}\\2\end{cases}\quad \bar{v}(S)=\begin{cases}0\\-\gamma\text{。}\\0\end{cases}$$

现在,你可以直接验证,(60:2)的一个 $\bar{v}(S)$ 满足 57.2.1 的条件(57:2:a)和(57:2:c),即当且仅当 $\gamma \geqq 0$,它是一个适宜的 Γ 的特征函数(见 57.3.4)。这恰好是 59.2.3 中的条件(59:14)。这样,我们看到:59.2.3 的(59:14)的 $\gamma \geqq 0$ 恰好是(60:2)的可能情况。

因此,如我们曾经断言的那样,$\gamma > 0$,即本质性,是可能情况之一。在 Γ 是本质博弈的情况下,我们可以将其正规化,使 $\gamma = 1$,从而完全确定(60:2)。所以,仅仅存在着一种类型的本质一般二人博弈。

注意,有可能 $|\Gamma|_1 = 2\gamma > 0$,(对于 $n=2$)却总存在着 $|\Gamma|_2 = 0$。我们只需就简化型(60:2)证明之。

事实是：回想 45.2.1 和 45.2.3 的定义，我们看到，当 $\alpha_1, \alpha_2 \geqq -\gamma, \alpha_1 + \alpha_2 \geqq 0$ 时，$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$ 是独立的，且相应的 $e = \alpha_1 + \alpha_2$ 最小值是 0。① 因此，$|\Gamma|_2 = 0$。

总之：当 $n = 2$ 时，一个零和博弈必定是非本质博弈，一个一般博弈未必是本质博弈。相应地，前者必定有 $|\Gamma|_1 = 0$；后者可以有 $|\Gamma|_1 > 0$。但两者都有 $|\Gamma|_2 = 0$。 550

我们请读者参照前面的讨论（尤其是 45.3.4）解释这个结果。

60.2.2 对于一个 $n = 2$ 的一般博弈来说，解的确定是容易的。

根据 31.1.5 中（31:H）的成立的部分（见 59.3.2 中的相关结果），有 0、1 或 n 个元素的集合 $S \subseteq I$ 都是肯定不必要集——由于 $n = 2$，这穷举了全部子集。因此，我们可以确定 Γ 的解，好像占优永远不会成立。所以，一个解简单地由这样一个性质定义：任何分配都在解之内。也就是说，恰好存在着一个解：所有分配构成的集合。

在这种情况下，一般分配被给定为 $\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$，满足 57.5.1 中的条件（57:15）和（57:16），这些条件现在变成了

(60:3)　　$\alpha_1 \geqq \mathrm{v}[(1)], \quad \alpha_2 \geqq \mathrm{v}[(2)]$,

(60:4)　　$\alpha_1 + \alpha_2 = \mathrm{v}[(1,2)] = \mathrm{v}(I)$。

我们把上述结果重述如下：

(60:B)　　Γ 恰好有一个解，即全部分配的集合。这些分配是

① 假设如此，如 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$。——549，①

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2\}\}$$

其中，α_1,α_2 满足(60:3)和(60:4)

注意，(60:3)和(60:4)确定惟一一对数 α_1,α_2（即 $\vec{\alpha}$），其充分必要条件是

(60:5) $\quad v[(1)]+v[(2)]=v[(1,2)]$。

按照27.4的准则，这恰好表达了 Γ 是非本质博弈。恰如应该的那样，这个结果与31.2.3中的(31:P)一致（见59.3.2）。

如若不然，

(60:6) $\quad v[(1)]+v[(2)]<v[(1,2)]$，

且存在着无穷多的 α_1,α_2，——即 $\vec{\alpha}$。这是 Γ 是本质博弈的情况。

这些结果的解释将在61.2—61.4中给出。

60.3 $n=3$ 的情况

60.3.1 最后，考虑 $n=3$。这些博弈包括 $|\Gamma|_1>0$，$|\Gamma|_2>0$ 的本质三人零和博弈（见45.3.3）。这样，我们看到：

$n=3$ 时，一个零和博弈以及一个一般博弈可以是本质博弈，且 $|\Gamma|_1>0$ 和 $|\Gamma|_2>0$ 是可能的。

551 Γ 是非本质博弈的情况被包括在31.2.3中的(31:O)或(31:P)之中（见59.3.2）。因此，我们假设 Γ 是本质博弈。

利用 Γ 的 $\gamma=1$ 简化型，那么，我们能够借助59.2.3中的(59:16)和(59:17)描述其特征函数 $\bar{v}(S)$：

$$(60:7)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\text{个元素时},\\3\end{cases}\quad \bar{\mathrm{v}}(S)=\begin{cases}0\\-1,\\0\end{cases}$$

且 S 有 2 个元素时，

$$(60:8)\qquad \bar{\mathrm{v}}[(2,3)]=a_1,\bar{\mathrm{v}}[(1,3)]=a_2,\bar{\mathrm{v}}[(1,2)]=a_3。$$

我们可以直接验证，当且仅当，

$$(60:9)\qquad -2\leqq a_1,a_2,a_3\leqq 1,$$

(60:7)和(60:8)的 $\bar{\mathrm{v}}$ 满足 57.2.1 的条件(57:2:a)和(57:2:c)，即它们是某个适宜的 Γ 的特征函数。

注意，这个 Γ 能够被选成一个零和博弈，即 25.3.1 的(25:3:b)成立的充分必要条件是

$$(60:10)\qquad a_1=a_2=a_3=1。$$

换句话说：域(60:9)代表着所有的一般博弈，而其上界(60:10)代表着零和博弈。

60.3.2　现在，让我们确定这个(本质)一般三人博弈。

在这种情况下，一般的分配被给定为 $\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\}$，满足 57.5.1 中的条件(57:15)、(57:16)，这些条件现在成了：

$$(60:11)\qquad \alpha_1\geqq -1,\alpha_2\geqq -1,\alpha_3\geqq -1,$$

$$(60:12)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0。$$

这些条件恰好是 32.1.1 的关于 α_1、α_2、α_3 的那些条件[见那里的(32:2)和(32:3)]，即本质三人零和博弈中使用的那些条件。除了因子 $1+\frac{e_0}{3}$ 之外，这些条件也与 47.2.2 的关于 α^1、α^2、α^3 的那些条件相同[见那里的(47:2*)和(47:3*)]，即与有剩余的本质三人零和博弈的理论中使

用的那些条件相同。所以，我们能够利用32.1.2中的图形描述，尤其是图52。我们得到，$\vec{\alpha}$ 的取值范围是32.1.2的图53中的基本三角形。它还类似于47.2.2中图70中的基本三角形。

我们在这一图形表示中表达占优关系。关于一个占
552 优关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的30.1.1的集合 S，我们能够有如下说法：根据31.1.5中(31:H)的成立的部分（见59.3.2中的有关结果），有0、1或 n 个元素的集合 $S \subseteq I$ 都是肯定不必要集，但由于 $n=3$，这把我们的分析限制于那些二元集 S。

令 $S=(i,j)$[①]，那么，占优意味着，

$\alpha_i+\alpha_j \leqq \bar{\mathrm{v}}[(i,j)]=a_k$ 且 $\alpha_i>\beta_i$，$\alpha_j>\beta_j$。

由(60:12)，第一个条件可以被写成 $\alpha_k \geqq -a_k$。

我们将其重述为：占优

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

意味着，

$$(60:13)\quad \begin{aligned} &\alpha_1>\beta_1, \quad \alpha_2>\beta_2, \quad 且 \quad \alpha_3 \geqq -a_3; \\ 或\ &\alpha_1>\beta_1, \quad \alpha_3>\beta_3, \quad 且 \quad \alpha_2 \geqq -a_2; \\ 或\ &\alpha_2>\beta_2, \quad \alpha_3>\beta_3, \quad 且 \quad \alpha_1 \geqq -a_1。\end{aligned}$$[②]

---

① i,j,k 是1,2,3的一个排列。——552,①

② 这相当类似于47.2.3中的(47:5)，只不过我们在那里用 $-\frac{2e_0}{3}$ 取得了 a_1,a_2,a_3。还存在着刻度的变化，其变化变数是(60:11)、(60:12)之后提到的 $1+\frac{e_0}{3}$。

其与32.1.3中(32:4)的关系如同47.2.3中(47:5)，见第406页脚注②。——552,②

现在,(60:13)所描述的情形能够被添加到基本三角形的图形中。其与第 47 节的相似性胜过其与第 32 节的相似性。这一运算对应着从图 70 到图 71、图 72 或到图 84、图 85 的过渡。事实上,其与(在相继情况下描述类似运算的)图 71、图 84 和图 87 的不同仅仅在于:

组成该图形描述的六条线

(60:14)

$$\begin{cases}\alpha^1 = -\left(1+\frac{e_0}{3}\right),\alpha^2 = -\left(1+\frac{e_0}{3}\right),\alpha^3 = -\left(1+\frac{e_0}{3}\right),\\ \alpha^1 = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),\alpha^2 = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),\alpha^3 = -\left(1-\frac{2e_0}{3}\right),\end{cases}$$

被分别换成了另外六条线:

(60:15) $$\begin{cases}\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -1,\\ \alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = -a_2, \quad \alpha_3 = -a_3。\end{cases}$$

因此,出现在(由前面的三条线形成的)基本三角形里面的(由后面的三条线形成的)第二个三角形未必被放置得与前者对称,即未必如前面提到的三个图中那样。

60.3.3 为了方便,我们区别两种情况,这两种情况 553
对应着,(60:15)的后三条线的

(60:16) $\alpha_1 \geqq -a_1$, $\alpha_2 \geqq -a_2$, $\alpha_3 \geqq -a_3$,

侧面[(60:13)的三个占优关系成立的地方]是否相交于一个共同的区域。由(60:12),前者意味着,

(60:17:a) $$a_1 + a_2 + a_3 > 0,$$

而后者意味着,

(60:17:b) $$a_1 + a_2 + a_3 \leqq 0。$$

我们分别将其称为情况(a)和情况(b)。

情况(a):除了里面的那个三角形未必被放置得与基本三角形对称之外,我们有图71、图72中的状况。将这一点牢记心头,那么,如47.4—47.5中给出的那样,情况(IV)的讨论就能够照搬到这里了。因此,解是图82、图83中的那些解。

我们要注意的是,如果 a_i 之一等于1,那么,里面的三角形和基本三角形的相应的一侧重合[见(60:15)],而且相应的区域消失。①

情况(b):我们基本上有图84、图85的条件——图87、图88的变形,像情况(a)那样,相同的附带条件是非对称性。

我们用图92重新画出图84的摆放方式,用实线代表基本三角形,用虚线代表里面的三角形。这一摆放方式有几个变形,原因在于里面的三角形能够以不同方式刺破基本三角形。② 图92—95画出了这些不同情况。③④

---

① 因此,在零和博弈情况下,$a_1=a_2=a_3=1$,根据第32节的结果,这些曲线一条也不出现。——553,①

② 由(60:9),$-2\leq a_i\leq 1$。正如读者不难验证的那样,这意味着,里面的三角形的每一侧都必须从基本三角形和与其相对着的顶点之间通过。我们的图92—95穷尽了满足这一约束的所有可能情况。——553,②

③ 在一个零和博弈中,即 $a_1=a_2=a_3$ 的情况下,惟一可能发生的事情是那些能够是对称的情况:图92和图95。在这些情况中,图92对应着图84,而图95对应着图87。——553,③

④ 图92—95按照②、③、④相继消失而相互不同。另外,区域①和⑤、⑥、⑦中一个或多个可能退化为一个线性区间甚或一个点。有时候,要区别上述"消失"和"退化"并不那么容易。允许区别对应于图92—95的四种情况且不遇到这一困难的一个法则是:图92-95分别对应着的情况是,"内部"三角形面对着基本三角形的0,1,2,3条边。(面对一个顶点算作面对着它所属的两条边。)——553,④

如果我们把这些情况牢记在心，那么，如 47.6 给出
的那样，情况（V）的讨论就能够照搬过来了。[①] 因此，解 554
是图 86 中图示的那些解，但要考虑到不对称性和①—⑦
中某些区域的消失和退化（见图 92—95 和第 553 页脚
注④）。

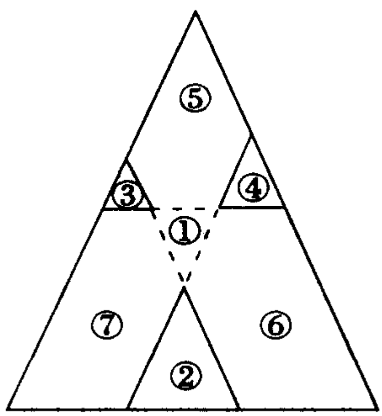


图 92

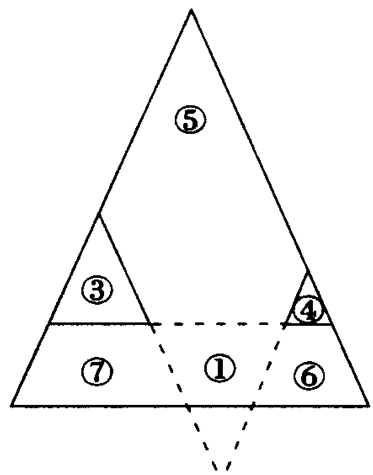


图 93

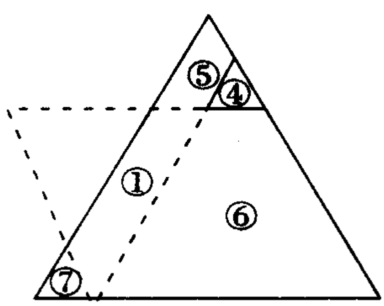


图 94

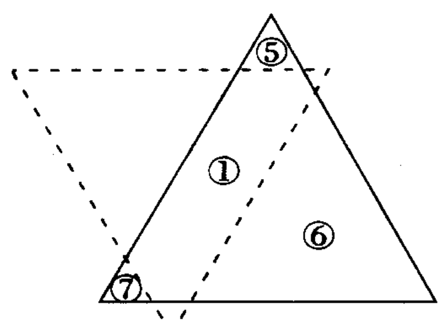


图 95

---

① 47.7 中情况（V）的讨论也可以被看作极为简单情况下这里的讨论的重复。——554，①

60.4 与零和博弈的比较

60.4.1 我们已经以一种严格的方式确定了 $n=3$ 时一般 n 人博弈的全部解，但我们尚未分析这些结果的含义。这正是我们接下来的任务。

让我们首先给出一些正式的说明。我们已经看到，一个一般博弈能够成为本质博弈的最小的 n 是 $n=2$，而对于零和博弈来说，相应的数是 $n=3$。我们还看到，$n=2$ 时，恰好存在一个本质的一般博弈，而 $n=3$ 时也恰好存在着一个本质零和博弈。再有，$n=3$ 的本质一般博弈（在上述同样假设下）形成一个有三个参数的多面体，而对于零和博弈来说，相应的数字是 $n=4$。所有这些暗示着一般 n 人博弈与 $(n+1)$ 人零和博弈之间的一个相似之处。当然
555 了，其理由是我们知道的：一般 n 人博弈的 $(n+1)$ 人零和扩展博弈是 $(n+1)$ 人零和博弈，而且，我们看到，每个 $(n+1)$ 人零和博弈也总能够以这种方式得到。[1]

60.4.2 然而，必须牢记的一点是，虽然 $(n+1)$ 人零和博弈被按照这种方式穷尽了，它们的解却没有被穷尽——一个一般 n 人博弈的解仅仅是其零和扩展的解的一个子集［见 56.12 中的 (56:I:a)］。

因此，我们说确定了所有一般三人博弈的全部解仅仅意味着，我们知道四人零和博弈的某些解，而不是其全部解。事实上，第 7 章的篇幅大而不完全的讨论表明，确定

---

① 确切地说：它策略等价于一个以如此方式得到的博弈。（见 57.4.1 开头。）——555，①

所有四人零和博弈的全部解是相当艰巨的任务。然而，我们关于一般三人博弈的结果在很大程度上隐含着：对于每个四人零和博弈来说，解是存在的。（第 7 章的试探性分析并没有揭示这一点。）

61. $n=1,2$ 时结果的经济学解释

61.1 $n=1$ 的情况

61.1 让我们进入当前这一分析的主题：$n=1,2,3$ 时结果的解释。

首先考虑 $n=1$ 的情况：这种情况下的重要事情都已经在 60.1 中提到过了。如其必然，我们的结果是简单最大值原理的重复，这是这种情况的特征，而且，只有在这种情况下描述的才是“鲁滨孙”或共产主义完全计划经济。

61.2 $n=2$ 的情况：二人市场

61.2.1 接着，考虑 $n=2$ 的情况：对于这种情况，我们在 60.2.2 中得到的结果能够有如下文字解释：

恰好存在着一个解。它由这样一些分配组成，其中每位玩家得到的数额至少是他自己能够确保的数额，而且两个人合起来恰好得到它们合起来确保的数额。

这里，“一位玩家能够自己得到的数额”必须被理解为，无论其对手做什么，他都能够得到的数额，哪怕其对手

有宁愿遭受损失而不想取得收益的欲望。[①]

在研究解时，我们发现了兑现58.3.2中的第四点说明中许下的诺言的机会：我们必须弄明，假设对手有遭受损失而不想有收益的欲望，“一位玩家能够为保证自己得
556 到的数额”的定义是否仍然给出常识结果呢？[②] 为了以这种方式将我们的理论的这一结果与“常识”进行比较，我们要把一般二人博弈描述得较符合普通的直觉。通过分析能够存在于两个人之间的一些基本关系，不难发现这样一种形式。

61.2.2 所以，我们分析的市场中有两个人：一个买者和一个卖者。我们只分析一次交易，而且这等价于一般二人博弈。显然，它还等价于双边垄断这一经典经济问题的最简单形式。

两位参与者是1和2：1是卖者，2是买者。我们要考虑的交易是参与者1出售一单位特定商品A给参与者2。用u记对于参与者1来说占有A的价值，用v记对于参与

---

① 见58.2.1末尾和58.3中的详细讨论。玩家k能够确保自己得到的数额自然是$v[(k)]$。——555，②

② 读者将会明白，我们并没有把这种欲望归属于对手。只不过，我们的理论能够被描述得好像他有这种欲望。重要的不是这一可能描述，而是该理论的结果。

事实上，对手的这一“恶意”行为仅仅决定解的某些特征，而非全部特征：它给出每位玩家必须个别地得到的数额的下限，但两人合起来得到的数额只能由完全合作的对立假设来描述。（见上。）

这恰恰是一般事实的一个特殊情况，即只有完整严格的理论才是所有情况下的可靠指导原理，而其部分的文字讨论只具有局部的适用性，且有可能相互冲突。

58.3的讨论能够更好地说明这一点。——556，①

者 2 来说占有 A 的价值。也就是说，u 代表对于卖者来说 A 的最大备择用途，而 v 代表着它对于买者来说的价值。

为了使一次交易有意义，对于买者来说 A 的价值必须超过对于卖者来说 A 的价值，即我们必须有

$$u < v。 \tag{61:1}$$

为了方便，当没有交易发生时，我们假设买者的状态——即他的初始金融状况——是他的效用是零。[①]

下面，让我们把这描述为一个博弈。在这么做时，我们最好使 A 在我们的描述中彻底消失，取而代之的是与其转移或其备择用途有关的价值。这样，我们可以将这一博弈的规则描述如下：

参与者 1 向参与者 2 提出一个“价格”p，参与者 2 可以“接受”或“向下压”。在第一种情况下，参与者 1、2 分别得到的数额是 p 和 $v-p$。在第二种情况下，他们得到的数额分别是 u 和 0。[②]

这一博弈的常识结果是，价格 p 将落在这两位参与者的备择价值决定的界限之间，即 557

$$u \leqq p \leqq v。 \tag{61:2}$$

p 将具体落在(61:2)的两个极限之间的什么地方取决于没有进入这一描述的那些因素。事实上，该博弈的规则只给出一次叫价，它必须被接受或拒绝——这显然是该交易的最

---

① 我们有目的地避免把一次出售描述为一次易货交换。由于我们一再重复过的理由，我们的理论迫使我们使用一个不受限制的可转移的数字效用函数，我们也可以用货币来描述之。

我们仅仅在第 12 章中偏离这一观点。——556，②

② 我们请读者用我们最初的组合数学定义来描述这一博弈。——556，③

终叫价。此前也许有着谈判、讨价还价、签约和重新签约等。对此,我们只字未提。因此,这个极为简化的模型的一个令人满意的理论应该使(61:2)的整个区间是 p 的取值范围。

61.3 二人市场及其特征函数的讨论

61.3.1 这一博弈是我们正在考虑的经济结构的一个模型。在进一步深入讨论之前,我们对这一博弈的描述做两点说明。

第一:使用更精巧的模型允许(有限的)更多次叫价是可能的。

现实市场中,所有参与者的相继叫价受到精细程度更大或更小的规则的约束,要理解它们的特征,在我们的模型中允许多次叫价是很基本的。另外,我们在第 19 节中详细研究了扑克游戏。这一博弈的基础是全部参与者的叫牌的相互影响,而且,我们在那里看到,这些叫牌的序列和排列对于博弈的结构和理论来说是至关重要的。(尤其见 19.1—19.3 的描述部分,19.11—19.14 中讨论的不同变形以及 19.16 的总结。)

然而,较为仔细的研究表明,在我们当前这一结构中,这些细节变得无足轻重了。现在的情形完全不同于扑克游戏,因为扑克游戏是一个零和博弈且一位玩家的失必然是另一位玩家的得。① 尤其是,就像我们将在 61.3.3 中就

① 如第 19 节分析的那样,这直接适用于作为一个二人博弈的扑克游戏。如果有多于两个以上的人参与,那么,我们借助联盟来处理,如同两人情形。——557,①

简单情况所分析的那样，读者可以用同一方式讨论更为复杂(但只有两个参与者!)的市场。你将发现与我们在61.3.3中得到的(61:5)和(61:6)相同的特征函数。事实上，那里给出的演绎适用于任何(二人!)市场：进行了这一比较的读者将会看到，这些证明[①]中真正重要的事情是，卖者(或买者)可以绝对地坚持上述价格，不管他可以得到的还价以及要求相继叫价的次数是多少。[②]

这些详尽阐述基本上给出了我们的简单模型的相同结果。因此，我们不予考虑。

61.3.2 第二：另一方面，我们的模型还能够被进一 558
步简化。事实上，我们的理论中一直假设的(合作的)玩家之间的补偿机制足以取代竞价。也就是说，没有必要把价格要约、接受或压价作为博弈规则的一部分。补偿机制足以覆盖这些，包括最初的谈判、讨价还价、签约和重新签约。

这样一个简单博弈能够被描述如下：玩家1、2都可以选择交换或不交换。如果其中之一选择不交换，那么，1、2得到的数额分别为u和0。如果两者都选择交换，那么，他们得到的数额分别是u'和u''——u'、u''是和为v的两个随意的数量。[③]

---

① 最明显的一个是61.3.3中(61:5)的证明。——557,②

② 回到前面关于扑克的说明：读者可以验证，一个相应的简单措施如何在那里不起作用，原因在于博弈规则使任何过分的叫牌或简单的叫牌方式受到惩罚。

当然了，你能够在指导一个市场的规则中引入类似的条款。事实上，存在着属于这种类型的特定传统交易方式，如期权。不过，在我们对问题的初步研究中考虑这样的规则似乎不足取。——557,③

③ (61.2.2方案和上述方案)两种方案的特征函数将在61.3.3中确定，而且它们将被证明是等同的。——558,①

换句话说：博弈规则可以提供一个随意的"价格"$p=u'$（那么，$v-p=u''$），这个价格是两位玩家所不能影响的——他们将通过补偿机制实现其他价格。

因此，61.2.2 中选定的方案既不是最简单的，也不是最完全的。我们现在利用它是因为它最适合得出此种情况的基本特征而无需细节。

61.3.3 用分配的术语来说，61.2.2 的"常识"结果等于是：恰好存在着一个解，而且它是如下分配的集合：

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2\}\},$$

其中，

$$\alpha_1 \geqq u,\quad \alpha_2 \geqq 0, \tag{61:3}$$

$$\alpha_1+\alpha_2=v。 \tag{61:4}$$

将这些东西与我们在 60.2.2 中的理论的应用进行比较，我们看到，当(61:3)、(61:4)与那里的(60:3)、(60:4)一致时，两者并不矛盾。这意味着，我们必定有

$$\mathrm{v}[(1)]=u,\quad \mathrm{v}[(2)]=0, \tag{61:5}$$

$$\mathrm{v}[(1,2)]=v。 \tag{61:6}$$

容易验证，(61:5)、(61:6)的确成立。为了完美，我
559 们就 61.2.2 和 61.3.1、61.3.2 的两种方案证明这一点，第一个在正文中处理，对于第二个来说需要的变形放在中括号内。

(61:5)的证明：通过提出价格 $p=u$（通过选择不交换）玩家 1 能够确保得到 u。通过压低每一价格（通过选择不交换）玩家 2 能够确保玩家 1 得到 u。因此，$\mathrm{v}[(1)]=u$。

用 $p=v$ 替换 $p=u$（两位玩家的共同行为）以相同方式产生 $\mathrm{v}[(2)]=0$。

(61:6)的证明:两位玩家合起来得到 u 或 v,后者来自 $p+(v-p)$(来自 $u'+u''$)。根据(61:1),v 更好。所以,

$$\mathrm{v}[(1,2)]=v。$$

61.4　第 58 节中观点的正当理由

61.4　正如我们在 61.3.3 中看到的那样,特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 与 u、0、v 的一致也许显得无足轻重。然而,重要的一点是,为获得它,我们使用了我们的特征函数定义,对此,58.3 和 61.2 的批评是站得住脚的。也就是说,在该理论的特定部分,它依赖于每一位玩家认为其对手宁愿遭受损失而不要收益。

重要的是,要认识到,这一依赖性是真正有意义的,即这一假设的修改将会改变结果,因为这一结果在当时看来是正确的。我们最好借助 61.2.2 的方案来做到这一点。

事实上,假设玩家 2 在特定条件下倾向于取得收益而不是要给玩家 1 造成损失;假设这些条件存在,比如当玩家 1 提出一个大于 u 但小于 v 的价格 p_0 时。在这种情况下,如果玩家 2 接受,他得到 $v-p_0$;如果他压价,他得到 0。因此,接受玩家 1 提出的价格使他获益。另一方面,如果玩家 2 接受了,玩家 1 得到 p_0;如果玩家 2 拒绝,他得到 u。因此,玩家 2 通过压价给玩家 1 造成损失。所以,我们现在关于玩家 2 的企图的假设意味着,他将接受。

因此,在这些条件下,玩家 1 能够指望获得数额 p_0。这与我们前面的结果冲突,根据前面的结果,整个价格区间(61:2)都应该是允许的,而且我们在 61.2.2 中看到,后者是自然的结果。

总之：我们在61.2—61.4中给出的一般二人博弈的讨论已经证明，在决定特征函数是否应该构造得像我们的理论中使用的那样时，一般二人博弈至关重要。这一结构非常简单，足以让我们对结果给出一个“常识”性的预测，而且构造特征函数过程中的任何变化都会显著改变理论结果。这样，我们借助该理论的应用得到了58.3中第四点说明意义上的一个确凿证据。

61.5 可分割的物品：“边际对”

560 **61.5.1** 61.2—61.4涉及的是十分基本的情况，不过，对于我们为自己设定的“举证”任务来说，这是足够的。另外，通过解释一个本质一般二人博弈，所有的事情都得到了解释，因为它们全部策略等价于一个（能够被正规化为$\gamma=1$的）简化型。

至此，一切都十分顺利。但是，仍有待证明的是，我们的理论是否能够同等地对待并非无关紧要的经济结构呢？为此，我们将首先扩展关于二人市场的描述。我们将会看到，这并不给出新的东西。然后，我们将转向一般三人博弈。那里，我们将发现更为基本的解释的新证据和机会。

61.5.2 让我们回到61.2.2中描述的情况：在一个市场中，存在着一个卖者1和一个买者2。现在，我们允许交易任意s个单位的商品：$A_1, \cdots, A_s$（它们是不可分的，而且能够相互替代）。[1] 用u_t记玩家1拥有这些中的t个

---

① 我们也可以允许连续可分性，不过这不会造成实质上的不同。——560，①

单位($t=0,1,\cdots,s$)的价值,用 v_t 记玩家 2 拥有这些中的 t 个单位($t=0,1,\cdots,s$)的价值。因此,数量

(61:7) $$u_0=0,\quad u_1,\cdots,u_s,$$

(61:8) $$v_0=0,\quad v_1,\cdots,v_s$$

描述的是这些单位的物品对于每位参与者来说的可变动的价值。正如 61.2.2 中那样,我们取买者在最初状况的效用为零。

没有必要重复 61.2.2、61.3.1 和 61.3.2 有关博弈规则的分析。

容易看到它的特征函数必定是什么:由于每位玩家都能够阻止出售①,像 61.3.3 中那样,我们有

(61:9) $$\mathrm{v}[(1)]=u_s,\quad \mathrm{v}[(2)]=0。$$

由于这两位玩家合起来能够确定将会被转移的单位数,又由于 t 单位转移使他们总共得到 $u_{s-t}+v_t$,所以

(61:10) $$\mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t}+v_t)。$$

这个 $\mathrm{v}(S)$ 是一个特征函数,因此它必定满足 57.2.1 的(57:2:a)和(57:2:c)。考虑到(61:9)和(61:10),它们中不那么明显的一个是

(61:11) $$\mathrm{v}[(1,2)]\geqq\mathrm{v}[(1)]。$$

根据(61:10),(令 $t=0$)上式左边 $\geqq u_s+v_0$,且右边 $=u_s$,所以上式成立。

61.5.3 现在,我们考虑(61:10)取最大值时的 t,如 561

$t=t_0$。对于所有 t,$u_{s-t_0}+v_{t_0}\geqq u_{s-t}+v_t$。我们只需就 $t\neq t_0$ 这

---

① 玩家 1 通过提出一个令人难以接受的高价格,玩家 2 通过压低每个价格。——560,②

么说，而且我们能够分别就 $t>t_0$，$t<t_0$ 陈述。我们可以把这些不等式写成

(61:12) $$u_{s-t_0}-u_{s-t}\geqq v_t-v_{t_0},\quad t>t_0,$$

(61:13) $$u_{s-t}-u_{s-t_0}\leqq v_{t_0}-v_t,\quad t>t_0。$$

(61:12) 中令 $t=t_0+1$ [$t_0=s$ 除外，此时(61:12)没有意义]：

(61:14) $$u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}\geqq v_{t_0+1}-v_{t_0},$$

而且，(61:13) 中令 $t=t_0-1$ [$t_0=0$ 除外，此时(61:13)无意义]：

(61:15) $$u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}\leqq v_{t_0}-v_{t_0-1}。$$

注意，(61:12)和(61:13)(在没有令 $t=t_0\pm1$ 时)能够被写成

(61:16) $$\sum_{i=t_0+1}^{t}(u_{s-i+1}-u_{s-i})\geqq\sum_{j=t_0+1}^{t}(v_j-v_{j-1}),\quad t>t_0,$$

(61:17) $$\sum_{i=t+1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i})\leqq\sum_{j=t+1}^{t_0}(v_j-v_{j-1}),\quad t<t_0。$$

一般来说，我们能够说，(61:14)和(61:15)只是必要的，而(61:16)和(61:17)则是充分必要的。然而，在这里引入效用递减假设——即对于每位参与者来说，每额外增加一单位商品的效用递减，总效用递增。作为一个公式

(61:18) $$u_1-u_0>u_2-u_1>\cdots>u_s-u_{s-1},$$

(61:19) $$v_1-v_0>v_2-v_1>\cdots>v_s-v_{s-1}。$$

这意味着

(61:20)

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=t_0+1}^{t}(u_{s-i+1}-u_{s-i}) \geqq (t-t_0)(u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}) \\
&\sum_{j=t_0+1}^{t}(v_j-v_{j-1}) \leqq (t-t_0)(v_{t_0+1}-v_{t_0})
\end{aligned}\right\} & t > t_0, \\
\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=t+1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i}) \leqq (t_0-t)(u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}) \\
&\sum_{j=t+1}^{t_0}(v_j-v_{j-1}) \geqq (t_0-t)(v_{t_0}-v_{t_0-1})
\end{aligned}\right\} & t < t_0。
\end{cases}
$$

因此,(61:14)和(61:15)意味着(61:16)和(61:17)。 562
所以,(61:14)和(61:15)也是必要且充分的。结合(61:14)、(61:15)和(61:18)、(61:19)的部分,我们还可以写

(61:21)
$$
\begin{cases}
u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1},\, v_{t_0}-v_{t_0-1} \\
\text{中的每一个大于} \\
u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0},\, v_{t_0+1}-v_{t_0} \\
\text{中的任何一个。}
\end{cases}
$$
①

按照通常的想法,最大化的 $t=t_0$ 是实际转移的单位数。我们已经证明,它由(61:21)描述,而且读者可以验证,(61:21)恰好是伯姆巴沃克的“边际对”定义。②

这样,我们看到:

---

① 第一行的第一项与第二行的第二项的比较是(61:14),第一行的第二项与第二行的第一项的比较是(61:15)。第一项与第一项的比较是得自(61:18)的一个不等式;第二项与第二项的比较是得自(61:19)的一个不等式。——562,①

② 伯姆巴沃克(E. von Böhm-Bawerk):*Positive Theorie des Kapitals*,4th Edit,耶纳,1921,P. 266ff。——562,② (61:A)　　交易规模,即转移的单位数 t_0,是按照伯姆巴沃克的"边际对"准则决定的。

在这个程度上,我们可以说,我们理论给出了普通常识结果。

最后,我们还可以看到,当这个博弈是简单博弈时,这种情况有一个简单的含义。这里,按照(61:11)中的不等式,非本质性意味着

$$v[(1,2)]=v[(1)]+v[(2)]。$$

考虑到(61:9)和(61:10),这意味着,在后者中,在 $t=0$,即 $t_0=0$ 时取得最大值。所以,我们看到:

(61:B)　　我们的博弈是非本质博弈的充分必要条件是,其中不发生转移,即 $t_0=0$。[①]

61.6 价格

61.6.1 现在,让我们考虑这一结构中价格的决定。为了在这方面提供一个解释,就像 60.2.2 的分析给出的那样,我们必须较为详细地分析我们的博弈的(惟一)解。

从数学上说,当前这一结构并不比 61.2—61.4 中分析的结构更具一般性:两者都代表本质一般二人博弈,而且,我们知道,存在惟一一个这样的博弈。不过,那里的结构只不过是我们当前这一结构的一个特殊情况:对应着 $s=1$。当我们转向解释时,我们会感受到这一差别。

563 (61.3.3)中的(61:5)、(61:6)与 61.5.2 中的

---

① 注意,在 61.2.2 的方案中,我们通过(61:1)强制发生一次转移。我们现在的结构允许两者都可能。——562,③

(61:9)、(61:10)的比较告诉我们,这两个结构在数学上的等同在于按照

$$(61:22)\qquad u = u_s, v = \text{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t} + v_t)$$

替换前者的 u, v。

因此,惟一的解由如下分配组成:

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}\}$$

满足 61.3.3 中的(61:3)、(61:4)。用 α_2 来表达,这意味着

$$(61:23)\qquad 0 \leqq \alpha_2 \leqq v - u。$$ [1]

现在,让我们用普通的价格概念阐述。[2] 正如我们在 61.5.3 得出的结论那样,t_0 个单位将被转移给买者 2,如果单位价格为 p,那么,必定有

$$(61:24)\qquad v_{t_0} - t_0 p = \alpha_2。$$

所以,用 p 来表达,(61:23)意味着,

$$(61:25)\qquad \frac{1}{t_0}(u_s - u_{s-t_0}) \leqq p \leqq \frac{1}{t_0} v_{t_0}。$$ [3]

这也能够被写成

$$(61:26)\qquad \frac{1}{t_0}\sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-i+1} - u_{s-i}) \leqq p \leqq \frac{1}{t_0}\sum_{j=1}^{t_0}(v_j - v_{j-1})。$$

61.6.2　现在,(61:26)中的界限根本不是伯姆巴沃克理论给出的界限。根据那个理论,价格必须落在 61.5.3 的(61:21)中的两个边际对的效用之间,即落在如下区间之中:

---

① 我们也能够基于 α_1 进行我们的讨论,但当前这一方法更适合在三人市场情况下重复。——563,①

② 值得重申的一点是,这是解释,不是理论本身!——563,②

③ 注意,根据(61:22),$u = u_s, v = u_{s-t_0} + v_{t_0}$。——563,③ (61:27) $$\begin{Bmatrix} u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0} \\ v_{t_0+1}-v_{t_0} \end{Bmatrix} \leqq p \leqq \begin{Bmatrix} u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1} \\ v_{t_0}-v_{t_0-1} \end{Bmatrix}。$$

这也能够被写成

(61:28) $$\begin{aligned} &\operatorname{Max}(u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0}, v_{t_0+1}-v_{t_0}) \\ &\leqq p \\ &\leqq \operatorname{Min}(u_{s-t_0}-u_{s-t_0-1}, v_{t_0}-v_{t_0-1})。\end{aligned}$$

为了方便这个区间与(61:26)的比较,我们构造另一个区间

(61:29) $$u_{s-t_0+1}-u_{s-t_0} \leqq p \leqq v_{t_0}-v_{t_0-1}。$$

564 61.5.3 中(61:20)的后两个不等式($t=0$)给出,(61:26)的下限≧(61:29)的下限,且(61:29)的上限≦(61:26)的上限。因此,区间(61:29)被包含在区间(61:26)之内。再有,(61:29)显然包含区间(61:27),即(61:28)。总之:区间(61:26)、(61:29)和(61:28)按这一顺序相继包含。

这样,我们看到:

(61:C) 单位价格 p 被限于区间(61:26)之内,而伯姆巴沃克的理论将其限制于一个更窄的区间(61:28)。

61.6.3 结果(61:A)和(61:C)精确地描述了我们当前应用中的理论与普通常识性观点的关系。① 它们表明,关于即将发生的事情——即转移的单位数——存在着共识,但关于这件事情在什么条件——即单位价格——下发生,存在着分歧。我们的理论给出了那一价格的一个较普

① 我们取伯姆巴沃克的理论作为那种观点的一个代表。事实上,自门格尔以来,大多数作家在这个题目上的观点基本上与他的观点相同。——564,①

通观点更宽的区间。

分歧出现在这一点和这个方向上，这是可以理解的。我们的理论（除其他事情之外）基本上依赖于玩家之间的一个完全的补偿机制。这等于说，视转移的单位数不同，支付有所不同。现在，（由伯姆巴沃克的“边际对”定义的）普通观点的较窄的价格区间显著地依赖于一个惟一的价格的存在性——对于实际发生的所有转移来说都是这样。如上所述，由于我们允许溢价和折扣，价格的惟一性不复存在。我们的单位价格 p 只不过是一个平均价格——事实上它由诸如 61.6.1 中的（61:24）定义，而且，相当自然的事情是，我们得到一个较“边际对”所定义的区间更宽的区间。

最后，我们看到，价格结构的建立中表现的这一反常完全符合这样一个事实，即我们考虑的市场是一个双边垄断的市场。

62. $n=3$ 时结果的经济学解释：特殊情况

62.1　$n=3$ 时的特殊情况：三人市场

62.1.1　最后，我们考虑 $n=3$ 的情况。我们希望得到 61.2.1 中那样的解释。为此，我们将把 61.2.2 的有关二人市场的模型推广为一个三人市场模型。

正如我们在前面指出的那样，我们穷尽了前者的讨论，因为只存在一个本质一般二人博弈。另一方面，我们 565

知道，本质一般三人博弈构成一个具有三个参数的族而且60.3.2中有关它们的详细讨论迫使我们区别许多可能情况。[①] 相应地，为了说明所有可能的本质一般三人博弈，我们需要多个模型。我们的讨论仅限于一类典型情况。详尽的讨论十分烦琐，且不会明显增加我们对该理论的理解——不过，这些讨论并不增加新的困难。

62.1.2 我们考虑一个市场中有三个人的情形，其中一个卖者和两个买者。有关两个卖者和一个买者的讨论将给出相同数学结构和相同结论。为了清楚，我们只讨论第一类问题，第二类问题的类似讨论留给读者完成。

三位玩家是1、2、3——1是卖者，2和3是买者。我们将依次考虑61.2.2的特殊方案和61.5.2的较为一般的方案。与我们在那里的发现相比，后者将提供前者的一个真正的推广。

让我们从61.2.2的结构开始：我们要分析的交易是（不可分的）一单位商品A被售给2或3。用u记对于1来说拥有一单位A的价值；用v记它对于2来说的价值，用w记它对于3来说的价值。

为使这些交易对于全体玩家来说有意义，对于每位买者来说，A的价值必须超过它对于卖者的价值。还有，除非玩家2、3恰巧处于同等地位，他们中的一位必须比另一位更有力量，即能够从A的占有中得到更大的效用。我们可以假设，在这种情况下，较有力量的买者是3。这些假

---

① 两种主要情况(a)和(b)中，后者又被分成图92—95所代表的四种子情况。——565，①

设意味着，我们有：

(62:1)　$u < v \leqq w$。

正如 61.2.2 和 61.5.2 中那样，我们取每位买者的初始状态为他的零效用。

正如 61.5 中那样，没有必要重复 61.2.2 和 61.3 的有关这一博弈规则的分析。

不难看出该博弈的特征函数：每位买者都能够单独阻止向自己出售，卖者能够阻止出售，两位买者能够共同阻止出售（见 61.5.2）。所以，像 61.3.3 那样，

(62:2)　$v[(1)] = u, v[(2)] = v[(3)] = 0$,

(62:3)　$v[(1,2)] = v, v[(1,3)] = w, v[(2,3)] = 0$,

(62:4)　$v[(1,2,3)] = w$。①

这个 v(S) 是一个特征函数，所以它满足 57.2.1 中 566
(57:2:a) 和 (57:2:c) 的不等式。验证它们并不困难，我们将其留给读者完成。

就其本质而言，v(S) 所属博弈不是常数和博弈②，因此它更是一个本质博弈。

62.2　预备性讨论

62.2　下面，我们要运用 60.3 中得到的有关本质一般三人博弈的结果，以得到我们当前问题的全部解。我们将再次把数学结果与普通常识所给出的结果进行比较。

---

① 当然了，这用到 $u < v \leqq w$。——565，②

② 证明：57.5.2 中的 (57:20) 未得到满足，如 $v[(1)] + v[(2,3)] = u < w = v[(1,2,3)]$。——566，①

在一定程度上，两者的一致性比 61.2—61.6.3 中的情况还要好，尤其是，两种方法得到的价格上下限是相同的。这大概归于这样一个事实，即正如 61.2.2 中那样，我们正在研究的只是 1 单位商品的交易。在 63.1—63.6 中，当我们过渡到 s 个单位时，61.5.2—61.6.3 的复杂性将再次出现。

然而，超过上面所指的点，我们的理论与普通观点之间会存在着性质上的差异。我们将会看到，这归因于建立联盟的可能性。这种可能性第一次成为现实首次出现于有三位参与者的情况。我们的理论将充分考虑到这一点，而普通方法往往忽略它。因此，从我们的方法的角度看，两种方法的不同是情理之中的事情。

62.3 解：第一种子情况

62.3.1 下面，我们把 60.3.1 和 60.3.2 应用于 (62:2)—(62:4) 的 $v(S)$。

这一结构中的分配是

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\},$$

其中，

$$(62:5) \qquad \alpha_1 \geqq u, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_3 \geqq 0,$$

$$(62:6) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = w。$$

为了应用 60.3.1 和 60.3.2，我们必须把这一分配变成其简化型，并将其正规化，$\gamma = 1$。

第一个运算对应着我们的 α_1、α_2、α_3 被 α'_1、α'_2、α'_3 取代，

$$(62:7) \qquad \alpha'_k = \alpha_k + \alpha_k^0。$$

这一运算是 57.5.1、31.3.2 和 42.4.2 中提到或讨论过

的。α_1^0、α_2^0、α_3^0 的取得类似于 59.2.1 中(59:A)的推导。具体来说, 567

(62:8) $$\alpha'_1=\alpha_1-\frac{w+2u}{3},\alpha'_2=\alpha_2-\frac{w-u}{3},$$

$$\alpha'_3=\alpha_3-\frac{w-u}{3}。$$

v(*S*)的相应变化由 59.2.1 中的(59:1)给定;它们把(62:2)—(62:4)变成

(62:9) $$\mathrm{v}'[(1)]=\mathrm{v}'[(2)]=\mathrm{v}'[(3)]=-\frac{w-u}{3},$$

(62:10) $$\mathrm{v}'[(1,2)]=\frac{3v-2w-u}{3},\mathrm{v}'[(1,3)]=\frac{w-u}{3},$$

$$\mathrm{v}'[(2,3)]=-\frac{2(w-u)}{3},$$

(62:11) $$\mathrm{v}'[(1,2,3)]=0。$$

因此,$\gamma=\frac{w-u}{3}$,从而第二个运算是用这个量去除每个量。我们并不这么做,而宁愿直接应用 60.3.1 和 60.3.2,在各处(其中假设了 $\gamma=1$)插入比例因子$\frac{w-u}{3}$。① 与 60.3.1 中(60:8)的比较告诉我们,

$$a_1=-\frac{2(w-u)}{3},a_2=\frac{w-u}{3},a_3=\frac{3v-2w-u}{3}。$$

60.3.2 中(60:15)的六条线描述我们据以得出我们的解的三角形。现在,这六条线变成了:

---

① 这一方法类似于第 47 节中有剩余的本质三人零和博弈讨论中使用的方法,尤其见 47.2.2 和 47.3.2[情况(Ⅱ)]、47.4.2[情况(Ⅳ)的一个特定阶段]。——567,①

(62:12)

$$\begin{cases}\alpha'_1=-\frac{w-u}{3},\alpha'_2=-\frac{w-u}{3},\alpha'_3=-\frac{w-u}{3},\text{①}\\ \alpha'_1=\frac{2(w-u)}{3},\alpha'_2=-\frac{w-u}{3},\alpha'_3=-\frac{3v-2w-u}{3}\text{。②}\end{cases}$$

62.3.2 现在,我们能够讨论 60.3.3 那样的图示了。显然,

$$a_1+a_2+a_3=v-w\leqq 0,$$

568 因此,我们有(60:17:b),即我们有那里的情况(b),而且仍有待决定的是,图 92—95 所代表的其四种子情况中的哪一个将会出现。因此,我们从这里开始图形表示。

对于这一表示方式,像从前那样,我们利用图 52 的平面。像 60.3.2 中的(60:15)那样,画出(62:12)的六条线,我们得到图 96。这个图有如下性质:

(62:A:a) 第二条 α'_1 线通过第一条 α'_2 线和第一条 α'_3 线的交点。事实上:

$$\frac{2(w-u)}{3}-\frac{w-u}{3}-\frac{w-u}{3}=0\text{。}$$

(62:A:b) 两条 α'_2 线等同。

(62:A:c) 第二条 α'_3 线位于第一条 α'_3 的左侧。事实上:它有一个更大的 α'_3 值,因为

---

① (60.15)中的 -1 代表着 $-\gamma$,所以我们必须用上述比例因子$\frac{w-u}{3}$去乘它。——567,②

② 在这里再次出现的(60:15)中的 $-a_1$、$-a_2$、$-a_3$ 已经包含着因子$\frac{w-u}{3}$。——567,③

$$-\frac{3v-2w-u}{3}+\frac{w-u}{3}+\frac{w-u}{3}=w-v\geqq 0。$$

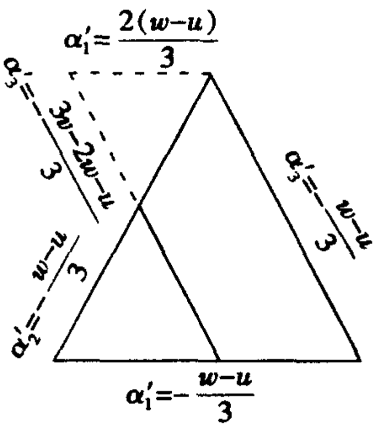


图 96

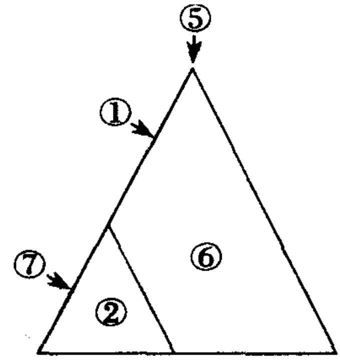


图 97

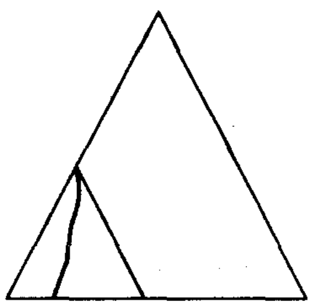


图 98

将这些图与图 92—95 比较表明，它是图 94 的一个（旋转的）退化型：[①]区域⑤退化成了一个点（基本三角形 △ 的上顶点），区域①、⑦也退化了，但退化成了两个线段 569
（基本三角形 △ 的左边的上下两段），而区域⑥、②尚未退化（基本三角形 △ 被分为一个梯形和一个较小的三角形）。图 94 的五个区域的这一划分如图 97 所示。如

① 关于这一点和下面的说明，见第 553 页脚注④。——568，①

60.3.3末尾指出过的那样，通过把图 86 的图形变成图 97 描述的情况，我们就得到了一般解 V，结果见图 98。[①]

62.4 解：一般形式

62.4 在进一步深入下去之前，我们要提醒的一点是，图 97 有着一般性，假设

(62:13) $$u < v \leqq w,$$

但是，它给出的这个图满足

(62:14) $$v < w。$$

当

(62:15) $$v = w$$

时，图 97 中的区域①——即基本三角形左边的上段——退化为一个点。[见 62.3.2 中的(62:A:c)。]因此，在这种情况下，图 98 假设着图 99 的出现。

借助下面的假设，这里的讨论能够被弄得对于玩家 2、3——两个买者——来说相当对称：

假设(62:14)或(62:15)，我们可以用较弱的条件

(62:16) $$u < v, w$$

来替换(62:13)。让我们仅仅假设(62:16)——且不再假设(62:13)。这意味着，每位买者都比卖者从 A 的占有中得到更大效用。(见 62.1.2 的第一部分中的讨论。)

570 这样，(62:16)留下了三种可能性：(62:14)、(62:15)和

(62:17) $$v > w。$$

(62:14)、(62:15)的解由图 98 和图 99 给定。(62:17)得

---

① 图 98 中的曲线满足 47.5.5 中(47:6)。——569，①

自(62:15)中玩家 2、3——两位买者——和 v、w 对换。这意味着,图 98 必须(在对换 v、w 后)沿着其垂直中线折射,如图 100 所示。

总之:

(62:B)　假设(62:16),对于 $v<$、$=$、$>w$,一般的解 V 分别由图 98、99 和 100 给出。

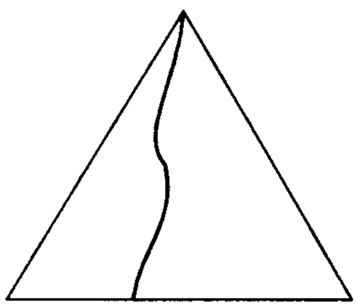


图 99

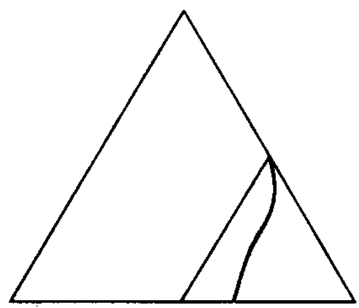


图 100

62.5 结果的代数形式

62.5.1 图 98 所表达的结果能够被代数地表述如下:①

解 V 由基本三角形的左边的上面的一段和穿过小三角形的曲线组成。

V 的第一部分有下面的式子描述:

$$\alpha'_2=-\frac{w-u}{3},\ -\frac{3v-2w-u}{3}\geqq\alpha'_3\geqq-\frac{w-u}{3}。$$

由于 62.3.1 中的(62.8),这意味着,

① 注意,尽管有(62:B),只要 $v\leqq w$,它就成立。——570,①

$$\alpha_2 = 0, \quad w - v \geqq \alpha_3 \geqq 0。$$

这样,62.3.1 中的(62:6)给出

$$\alpha_1 = w - \alpha_3,$$

因此,上述条件能够被写成

(62:18) $\quad v \leqq \alpha_1 \leqq w, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = w - \alpha_1$。

V 的第二部分(曲线)是从上述最小的 α'_1 到 $\alpha'_1\left(-\frac{w-u}{3}\right)$的绝对最小值的扩展。其几何形状[见 47.5.5 中(47:6)]能够被描述为:沿着它,α'_2、α'_3 都是 α'_1 的单调递减函数。我们可以再次通过 62.3.1 中的(62:8)从 α'_1、α'_2、α'_3 过渡到 α_1、α_2、α_3。这样,α_1 从其在(62:18)中的最小值(v)变化到其绝对最小值(u),而且 α_2、α_3 仍然是 α_1 的单调递减函数。所以,我们有:

(62:19) $\quad u \leqq \alpha_1 \leqq v$, α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。①②

571 因此,一般解 V 是(62:18)和(62:19)给出的两个集合的并集。我们将会看到,(62:19)中提到的函数(在一定范围内)具有随意性,但一个明确的解(即一个明确的行为标准)对应着明确选定这些函数。这种情形十分类似于 47.8.2 的(47:A)中和 55.12.4 中分析的那些情况。

62.5.2 只要 $v \leqq w$,(62:18)、(62:19)就能够被利用(见第 570 页脚注①)。对于 $v = w$,(62:18)简单地是

---

① 当然,它们必须符合 62.3.1 中的(62:5)和(62:6)。——570,②

② 如图 98 所示,V 的第一部分的最低点与第二部分的最高点重合。也就是说,(62:18)和(62:19)的点 $\alpha_1 = v$ 相同。

所以,我们能够从(62:18)和(62:19)之一中排除 $\alpha_1 = v$。(但不能从两者中都将其排除!)——570,③

(62:20)　　$\alpha_1 = v, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$。

因此，只有当 $v < w$ 时，我们才利用(62:18)和(62:19)；当 $v = w$ 时，我们利用(62:20)和(62:19)。[①]

如果 $v > w$，那么，通过对换玩家 2、3——两位买者——和 v、w，我们能够利用(62:18)和(62:19)。这样，(62:18)和(62:19)变成了

(62:21)　　$w \leqq \alpha_1 \leqq v, \quad \alpha_2 = v - \alpha_1, \quad \alpha_3 = 0$。[②]

(62:22)　　$u \leqq \alpha_1 \leqq w$，　α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。[③]

总之：

(62:C)　　假设(62:16)，对于 $v <$、$=$、$> w$，一般解分别由(62:18)、(62:19)，(62:20)、(62:19)，(62:21)、(62:23)给出。

62.6　讨论

62.6.1　接下来，让我们对一个卖者、两个买者和一单位不可分的商品的市场进行普通常识性分析，为的是将结果与(62:C)中的数学结果进行比较。

这一常识方法的轮廓是清楚的：我们在这里面对的是

---

① 第 570 页脚注③有关(62:18)和(62:19)的结果也适用于(62:20)和(62:19)。所以，我们能够干脆忽略(62:20)，不过，为了便于62.6中的解释，我们将其保留。——571，①

② 注意，由于上述玩家对换，62.1.2 中的(62:4)变成了

(62:22)　　$\mathrm{v}[(1,2,3)] = v$，

从而 62.3.1 中的(62:6)变成了

(62:6*)　　$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v$。——571，②

③ 第 570 页脚注③关于(62:18)、(62:19)的说明也适用于(62:21)、(62:23)。当然了，我们必须用 w 替换其 v。——571，③

“边际对”理论的最简单特殊情况。理由是：

卖者只有一单位不可分的商品且存在着两位买者。因此，买者中的一个进入交易，而另一个被排斥在外。显然，较有力量的那个买者将被排在第一位——除非两位玩家同样有力量，此时，两者都有这一资格。相应地，交易发生的价格将位于被接纳和被排斥的买者的界限之间——如果他们恰好同样有力量，那么，价格必定恰好是他们的共同界限。为了有一个真正的三人市场，卖者的界限必须
572 被假设得低于任何一位买者的界限，并不起作用。

在我们的数学公式中，卖者的极限和两位买者的界限分别是 u、v、w。上面的说明意味着，

(62:16) $$u<v,w。$$

关于价格的这些说法等于说

(62:24) $$v \leqq p \leqq w, \quad v<w,$$

(62:25) $$p=v, \quad v=w,$$

(62:26) $$w \leqq p \leqq v, \quad v>w。$$

被排斥的买者在他的起点结束——即在我们的效用正规化中位于零效用。

因此，正如(62:C)给出的那样，我们的当前的陈述严格对应着(62:18)、(62:20)和(62:21)。

至此，数学结果与常识一致。但是，这种一致的有限性也是显而易见的：(62:C)还给出了(62:19)、(62:23)这两个分配，而且，如上所述，在普通处理中，这些分配并不出现。

那么，(62:19)、(62:23)的含义是什么呢？难道它们代表着我们的理论与常识性观点之间的冲突吗？

不难回答这些问题，并看出真正的冲突并不存在，不过，(62:19)、(62:23)代表着常识观点的真正扩展。

62.6.2 卖者在一个给定的分配中得到的数额 α_1 显然是提出这一分配时想到的价格 p。在(62:19)和(62:23)中，α_1 的变化范围是从 u 到 v 或 w(视哪一个较小而定)——也就是说，价格的变动范围是从卖者的界限到较弱的买者的界限。两位买者得到的(可变)数额之间存在着确定的(单调)函数关系。[①]

这两个事实强烈暗示着(62:19)和(62:23)的如下文字解释：以一定的利益分配规则为基础，两位买者已经形成一个联盟，并正在与卖者讨价还价。利益分配规则被包含在(62:19)和(62:23)中出现的单调函数之中。任何讨价还价都不可能使卖者位于他本人的极限之下。[②] 另一方面，高于较弱的买者的价格则会排除他施加任何影响的可能性。

包含在(62:19)、(62:23)中的特定规则以及所有参与者在这些情形中的作用可以有更为宽泛的文字解释。这不是我们这里的任务，因为上述讨论应该充分地证明了我们的要点：一方面，(62:18)、(62:20)和(62:21)(即图 98—100 中 V 的居于上面的部分)对应着两位买者为交易而展开的竞争——其中，如果存在的话，较强的买者肯定会胜利；另一方面，(62:19)、(62:23)(即图 98—100 中 V 573

① 所有这些"数额"都指我们所谓的仅存的一单位不可分商品的效用。——572,①

② 卖者的极限是把 A 出售之外的最优备择用途。——572,②

的居于下面的部分，曲线）对应着两位买者针对卖者的一个联盟。

经典的分析——至少在 62.6.1 中使用的形式上——仅仅给出第一种可能性，没有考虑到联盟。我们的理论必然在这方面有所不同：它包含两种可能性，事实上，在它产生的解中，它把它们结合为一个整体。视是否有联盟而将它们分离仅仅是相对简单的三人博弈的一个文字评述，没有理由相信，这样的评述对于所有博弈来说都能够做到，而数学理论严格适用于所有情况。

63. $n=3$ 时结果的经济学解释：一般情况

63.1 可分物品

63.1.1 我们接下来的任务是，像 61.5.2 和 61.5.3 中给出的 61.2.2 的二人结构扩展那样，我们要把 62.1.2 的三人结构加以推广。

相应地，我们要回到 62.1.2 中描述的情形：在一个市场中有一个卖者 1 和两个（可能的）买者 2、3。现在，我们允许 s 个单位（不可分的且相互替代的）某种商品 $A_1, \cdots, A_s$ 中的任意多个单位的交易。（见第 560 页脚注①。）用 u_t 记这些单位的第 $t(=0,1,\cdots,s)$ 个单位对于 1 来说的价值，用 v_t 记它对于 2 来说的价值，用 w_t 记它对于 3 来说的价值。因此，数量

(63:1) $$u_0=0, \quad u_1, \cdots, u_s,$$

(63:2)　$v_0=0,\quad v_1,\cdots,v_s,$

(63:3)　$w_0=0,\quad w_1,\cdots,w_s,$

描述这些单位对于每位参与者来说的可变效用。

如前面那样，我们取每位买者的初始状态为其零效用。

如 61.5.2、61.5.3 和 62.1.2 中那样，我们不必重复 61.2.2、61.3.1 和 61.3.2 中关于这一博弈的规则的分析。

容易看出，其特征函数必定是：因为每位买者都能够阻止向他本人出售，每位卖者能够阻止出售，且两位买者能够合起来阻止任何出售(见 61.5.2 和 62.1.2)，如 61.3.3那样，我们有：

(63:4)　$\mathrm{v}[(1)]=u_0,\mathrm{v}[(2)]=\mathrm{v}[(3)]=0,$

(63:5)　$\mathrm{v}[(2,3)]=0$。

用 t、r 分别记从卖者 1 向买者 2、3 转移的单位数，那么，要表达其余联盟(1,2)、(1,3)和(1,2,3)——卖者与买者之一或全部——能够取得什么也不难。熟知的论述 574
给出

(63:6)　$\mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t}+v_t),$

$\mathrm{v}[(1,3)]=\mathrm{Max}_{r=0,1,\cdots,s}(u_{s-r}+w_r),$

(63:7)　$\mathrm{v}[(1,2,3)]=\underset{\substack{t,r=0,1,\cdots,s\\ t+r\leq s}}{\mathrm{Max}}(u_{s-t-r}+v_t+w_r)$。[1]

这个 $\mathrm{v}(S)$ 是一个特征函数。我们请读者验证隐含其中的不等式。

有关该博弈在什么时候是本质博弈的讨论能够像

① Max 下的额外条件表达的是，售出的单位数 $t+r$ 不会超过卖者当初拥有的个数。——574,①

61.5.2 和 61.5.3 那样给出，我们也将其留给读者。[①] 我们还有可能确定两位买者 2、3 之一在什么情况下成为我们的分解理论意义上的哑玩家。我们将不对此进行讨论。结果并不难得到，不过，不那么有意义。

63.1.2 把(63:7)的最大值中的 r 限定为 0，那么，这就变成了(63:6)第一个最大值。进一步令 $t=0$，它就变成了 u_t。这两个运算中的每一个都使结果变得≦原来的值，即我们有

(63:8) $\quad \mathrm{v}[(1)] \leqq \mathrm{v}[(1,2)] \leqq \mathrm{v}[(1,2,3)]$。

如果对 r、t 以相反的顺序做同样的运算，我们得到

(63:9) $\quad \mathrm{v}[(1)] \leqq \mathrm{v}[(1,3)] \leqq \mathrm{v}[(1,2,3)]$。

考虑(63:8)的第一个不等式。要这个不等式成立，(63:6)中第一个最大值必须在 $t=0$ 时实现。根据有关这个题目的常有概念，这意味着，在买者 3 不出现的情况下，卖者和买者 2 不会实现转移。也就是说，在买者 3 不出现的情况下，买者 2 无法使市场发挥作用。

考虑(63:8)中的第二个不等式。要这一不等式成立，(63:7)中的最大值必须在 $r=0$ 时实现。根据有关这个题目的常有概念，这意味着，在买者 2 不出现的情况下，卖者和买者 3 不会实现转移。也就是说，在买者 2 不出现的情况下，买者 3 无法参与市场。

将这些结果与有关(63:9)的相应说法结合起来，我们有：

---

① 其余 $s=1$ 时的 62.1.2 中的(62:1)或 62.4 中的(62:16)的关系也不难说明。请记住 61.5.3 末尾(61:B)的讨论和第 562 页脚注③。——574，②

(63:A)　在(63:8)和(63:9)的四个不等式中,任何一个等号都是其中一个买者变弱的迹象。

在(63:8)[(63:9)]的第一个不等式中,它意味着,在买者3(2)不出现的情况下,买者2(3)不能够使市场发挥作用。在(63:8)[(63:9)]的第二个不等式中,它意味着,在买者2(3)不出现的情况下,买者3不能够影响市场。

显然,当所有这些弱化都被排除了的时候,真正有意义的情况就出现了。因此,我们可以合理做出如下假设: 575

(63:B:a)　在(63:8)和(63:9)的第一个不等式中,我们有<。

(63:B:b)　在(63:8)和(63:9)的第二个不等式中,我们有<。

63.2 有关不等式的分析

63.2.1 暂时地,假设我们有(63:B:a),但没有(63:B:b)。这意味着,两位玩家之一绝对地比另一位玩家更有力量。更确切地说:他至少与另外一位玩家同样有力量,即便他想把另一位玩家彻底逐出市场。

因此,在这种情况下,我们可以预期结果将类似于62.1.2—62.5.2中只有一单位(不可分的)A时的结果。也就是说,这里,把供给分成单位$A_1,\cdots,A_t$的这一可分性应该给出预期结果。

情况的确如此。为证明它,引入数量u、v、w:

(63:10) $\quad v[(1)]=u, v[(1,2)]=v, v[(1,3)]=w$。

这样,(63:8)和(63:9)的第二个不等式和(63:B:b)的否定给出

(63:11) $\quad v[(1,2,3)]=\mathrm{Max}(v,w)$。

而(63:8)和(63:9)的第一个不等式以及(63:B:a)给出

(63:12) $\quad u<v,w$。

现在,我们恰恰有62.1.2—62.5.2的条件:(63:12)与62.4中的(62:16)相同,而(63:4)、(63:10)给出62.1.2中的(62:2)、(62:3),而且,(63:11)给出62.1.2中的(62:4)(当$v\leqq w$时)或62.5.2中的(62:22)(当$v\leqq w$时)。

所以,62.4和62.5.2的结果成立,其中有(63:10)的u、v和w。根据图98—100,一般解像62.4中(62:B)描述的那样求得。

63.2.2 从现在开始,我们假设(63:B:a)和(63:B:b)都成立。我们引入数量u、v、w、z如下:

(63:13) $\quad v[(1)]=u, v[(1,2)]=v, v[(1,3)]=w$,

(63:14) $\quad v[(1,2,3)]=z$。

这样,(63:8)、(63:9)和(63:B:a)、(63:B:b)说明,

(63:15) $$u<\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}<z。$$

576 这一方案不同于62.1.2,不过,将其进行详细比较还是值得的:(63:15)对应着那里的(62:1),而(63:4)、(63:13)和(63:14)对应着那里的(62:2)—(62:4)。

这里,像61.5.2和61.5.3那样,引入递减效用假设也有方便之处。事实上,与那里相比,我们在更早的阶段

就需要它：现在，在该理论的数学部分中，它是有用的①，而在那里我们只是在解释部分才用到它。

我们把对于所有三位玩家 1、2、3 来说的效用递减陈述如下：

(63:16)　$u_1 - u_0 > u_2 - u_1 > \cdots > u_s - u_{s-1}$，

(63:17)　$v_1 - v_0 > v_2 - v_1 > \cdots > v_s - v_{s-1}$，

(63:18)　$w_1 - w_0 > w_2 - w_1 > \cdots > w_s - w_{s-1}$。

在直接的应用中，只有(63:16)是必需的。这是说：

(63:19)　$v + w > z + u$。②

证明：由(63:6)、(63:7)和(63:13)、(63:14)，命题(63:19)能够被重写为：

$$\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t} + v_t) + \mathrm{Max}_{r=0,1,\cdots,s}(u_{s-r} + w_r)$$
$$> \mathop{\mathrm{Max}}_{\substack{t,r=0,1,\cdots,s\\ t+r\leq s}}(u_{s-t-r} + v_t + w_r) + u_s。$$

考虑右边取得最大值的 t、r。因为我们有(63:B:b)，即(63:8)、(63:9)的第二个不等式中的 <，我们能够从 63.1.2 的论述中得出结论：这些 t 和 $r \neq 0$。我们将其记为 t_0、r_0。因此，我们的命题变成了

$$\mathrm{Max}_{t=0,1,\cdots,s}(u_{s-t} + v_t) + \max_{r=0,1,\cdots,s}(u_{s-r} + w_r)$$
$$> u_{s-t_0-r_0} + v_{t_0} + w_{r_0} + u_s。$$

即，我们断言：存在 t、r 满足

---

① 但并非必然。这一性质的缺失只会使讨论变得复杂一些。——576，①

② 在 62.1.2 中，这是平凡的。事实上，利用(63:13)、(63:14)，我们在那种情况下得到

$$u < v \leq w = z。$$

而且，这直接给出(63:19)。——576，②

$$u_{s-t}+v_t+u_{s-r}+w_r > u_{s-t_0-r_0}+v_{t_0}+w_{r_0}+u_s。$$

当 $t=t_0, r=r_0$ 时，情况的确如此。上面的不等式可以被重写为

(63:20) $$u_{s-r_0}-u_{s-t_0-r_0} > u_s-u_{s-t_0}。$$

概念上应该清楚的一点是，这得自我们的递减效用假设。形式上，它以如下方式得自(63:16)：(63:20)说明，

577 (63:21) $$\sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-r_0-i+1}-u_{s-r_0-i}) > \sum_{i=1}^{t_0}(u_{s-i+1}-u_{s-i})。$$

(63:16)意味着，当 $s'<s''$ 时，

$$u_{s'}-u_{s'-1} > u_{s''}-u_{s''-1},$$

从而，

$$u_{s-r_0-i+1}-u_{s-r_0-i} > u_{s-i+1}-u_{s-i},$$

而且，这直接给出(63:21)。

63.3 准备性讨论

63.3 下面，我们要把 60.3.1 和 60.3.2 应用于当前这一结构。事实上，这很类似于 62.3 中给出的其在 62.1.2的结构中的应用。因此，下面的阐述将较为简要，读者最好对照着 62.3 的相应部分阅读。

至于数学结果与普通常识结果的比较，62.2 的说明再次适用。我们已经在那里指出了当前这一结构所带来的复杂性。我们只简要地分析这种情况，尽管它相当重要。我们前面的简单例子充分说明了一般的观点，而且关于这一结构的具体而详尽解释性分析——其他更为一般的分析——将在以后的著述中给出。

63.4 解

63.4.1 当前结构中的分配是

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

其中，

(63:22)　　$\alpha_1 \geqq u, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_3 \geqq 0,$

(63:23)　　$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = z$。

引入简化型再次成为必要。这等于 62.3 中那样的一个变换

(63:24)　　$\alpha'_k = \alpha_k + \alpha_k^0$。

那里的讨论决定 α_1^0、α_2^0、α_3^0，从而，(63:24)变成

(63:25)　　$\alpha'_1 = \alpha_1 - \frac{z+2u}{3}, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 - \frac{z-u}{3},$

$$\alpha'_3 = \alpha_3 - \frac{z-u}{3}。$$

v(S)的相应变化再次由 59.2.1 中(59:1)给出。它们把(63:4)、(63:13)和(63:14)变成

(63:26)　　$v'[(1)] = v'[(2)] = v'[(3)] = -\frac{z-u}{3},$

(63:27)　　$v'[(1,2)] = \frac{3v-2z-u}{3},$ 578

$$v'[(1,3)] = \frac{3w-2z-u}{3},$$

$$v'[(2,3)] = -\frac{2(z-u)}{3},$$

(63:28)　　$v'[(1,2,3)]) = 0$。

因此，$\gamma = \frac{z-u}{3}$，而且我们再次避开了过渡到 $\gamma = 1$ 的正

规化。

从而，当我们像62.3描述的那样应用60.3.1和60.3.2时，我们再次必须插入一个比例因子。现在，这个比例因子是$\frac{z-u}{3}$。

与60.3.1中(60:8)的比较告诉我们

$$a_1 = -\frac{2(z-u)}{3}, a_2 = \frac{3w-2z-u}{3}, a_3 = \frac{3v-2z-u}{3}。$$

我们的解得自60.3.2中(60:15)描述三角形的六条线。现在，这六条线变成了

$$(63:29)\begin{cases} \alpha'_1 = -\frac{z-u}{3}, \alpha'_2 = -\frac{z-u}{3}, \alpha'_3 = -\frac{z-u}{3}, \\ \alpha'_1 = \frac{2(z-u)}{3}, \alpha'_2 = -\frac{3w-2z-u}{3}, \\ \qquad \alpha'_3 = -\frac{3v-2z-u}{3}。 \end{cases}$$

63.4.2 应用60.3.3的准则，我们发现

$$a_1 + a_2 + a_3 = v + w - 2z \leqq 0。$$

因此，我们再次有那里的(60:17:b)——即那里的情况(b)，而且，图92—95所代表的四种子情况中的哪一种出现仍有待确定。

按照62.3中那样的图示方法，我们得到图101。这个图的特性得自如下分析：

(63:C:a) 第二条α'_1线通过第一条α'_2线与第一条α'_3线的交点。事实上：

$$\frac{2(z-u)}{3} - \frac{z-u}{3} - \frac{z-u}{3} = 0。$$

(63:C:b)　　第二条 $\alpha'_2(\alpha'_3)$ 线位于第一条的左（右）边。

(63:C:c)　　事实上：它有一个更大的 $\alpha'_2(\alpha'_3)$ 值，因为

$$-\frac{3w-2z-u}{3}+\frac{z-u}{3}=z-w>0,$$ 579

$$-\frac{3v-2z-u}{3}+\frac{z-u}{3}=z-v>0。$$

(63:C:d)　　第一条 α'_1 线位于第二条 α'_2 线与 α'_3 线交点的下方。事实上，由 63.2.2 中的(63:19)：

$$-\frac{z-u}{3}-\frac{3w-2z-u}{3}-\frac{3v-2z-u}{3}$$

$$=z+u-v-w<0。$$

这个图与图 92—95 的比较告诉我们，它也是图 94 的（旋转和）退化（见第 568 页脚注①），尽管其退化程度较 62.3 中相应的图 96 轻一些：区域⑤再次退化为一个点（基本三角形 Δ 的上顶点），但区域①、②、⑥、⑦仍不退化（我们的图中，基本三角形分为这四个部分）。图 94 的五个区域分解见图 102。现在，正如 60.3.3 末尾所说那样，一般解通过把图 86 的图形代入图 102 所描述的情况来得到。结果见图 103（见第 569 页脚注①）。

总之： 580

(63:D)　　假设(63:B:a)、(63:B:b)和(63:16)，一般解 V 由图 103 给出。

这个图与 62.3—62.4 的那些图比较告诉我们，图 103 是介于图 98—100 的中间形式，而且，这些图反过来是图

103 的退化形式。

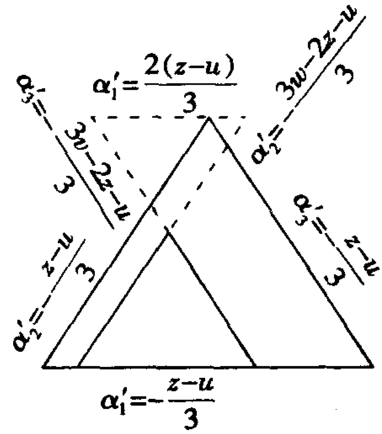


图 101

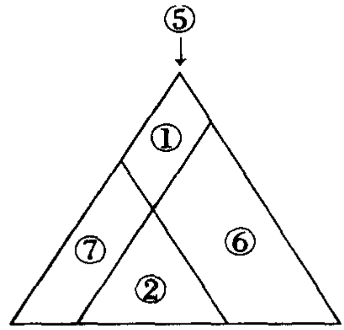


图 102

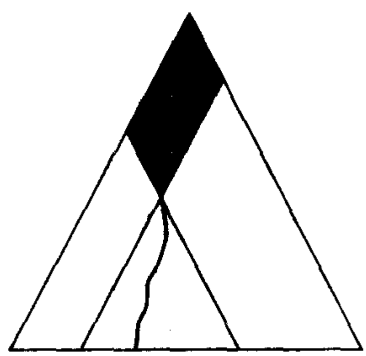


图 103

63.5 结果的代数形式

63.5 正如我们对 62.5.1 中图 98 所阐述的那样，图 103 所表达的结果也能够有代数表述。

图 103 中，解 V 由阴影区域和一条曲线组成。V 的第一部分由下面的式子描述：

$$-\frac{3w-2z-u}{3} \geqq \alpha'_2 \geqq -\frac{z-u}{3},$$

$$-\frac{3v-2z-u}{3} \geqq \alpha'_3 \geqq -\frac{z-u}{3}。$$

由 63.4.1 中的(63:25),这意味着,

$$z-w \geqq \alpha_2 \geqq 0, \quad z-v \geqq \alpha_3 \geqq 0。$$

现在,63.4.1 中的(63:23)给出,

$$\alpha_1 = z - \alpha_2 - \alpha_3,$$

从而,α_1 的严格范围是

$$v+w-z \leqq \alpha_1 \leqq z。$$

[请回忆一下,由 63.2.2 中的(63:19),$v+w-z>u$。]我们把这些条件合在一起陈述,所以这里的结果比 62.5.1 中其类似结果(62:18)复杂。这个结果是:

(63:30)

$$\begin{cases} v+w-z \leqq \alpha_1 \leqq z, \quad 0 \leqq \alpha_2 \leqq z-w, \quad 0 \leqq \alpha_3 \leqq z-v, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = z。\end{cases}$$

(63:30)中第一行恰好是 α_1、α_2、α_3 的取值范围。

V 的第二部分(曲线)能够一字不漏地像 62.5.1 那样讨论:α_1 从其在(63:30)中的最小值($v+w-z$)变化到其绝对最小值(u),而且 α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。所以,我们有:

(63:31) $$u \leqq \alpha_1 \leqq v+w-z,$$

其中,α_2、α_3 是 α_1 的单调递减函数。

因此,一般解 V 是由(63:30)和(63:31)给定的两个集合的并集。我们将会看到,(63:31)的函数与 62.5.1 末尾讨论的那个函数的作用相同。

总之: 581

(63:E)　　假设(63:B:a)、(63:B:b)和(63:16),一

般解 V 由(63:30)和(63:31)给出。

63.6 讨论

63.6.1. 下面,我们要完成与 62.6 对等的工作,并把普通常识性分析应用于一个卖者、两个买者和不可分的 s 个单位的某种物品,为的是将其结果与(63:E)中表述的数学结果比较。

实际上,下面要给出的解释必须把 61.5.2—61.6.3 的想法与 62.6 的想法结合起来:前者适用是因为我们有分成 s 个单位的可分性;后者适用是因为现在的市场是一个三人市场。正如 63.3 中指出的那样,我们不准备详细讨论这种情况。

我们现在的解的两个组成部分是(63:30)和(63:31)。它们明显类似于 62.5 中得到的两个部分:(62:18),(62:19)[或(62:20)、(62:19);或(62:21)、(62:23)]。[也可见有 62.5.2 中(62:C)的 63.5 中的(63:E)。]因此,我们完全有理由像我们在 62.6.2 中相应情况下所作那样来解释它们:(63:30)描述的情况是,两位买者为卖者手中的 s 个单位的物品而竞争,而(63:31)描述的情况是,他们建立一个同盟并作为一个整体来对付卖者。读者可以轻易完成类似于 62.6.2 的详细讨论。

接受了这些之后,关于(63:31),也就没有什么值得说的新东西了。在这种情况下,买者已经联合起来并不再竞争。然而,描述他们之间的竞争的(63:30)仍然值得我们注意。

让我们考虑属于(63:30)的分配,并用普通的价格概念来阐述其内容。这等价于我们在 61.6.1—61.6.2 中相

应地方所做的事情。

我们再次引入 $t,r;t=t_0,r_0$ 时有如下最大值

(63:7) $$\mathrm{v}[(1,2,3)]=\operatorname*{Max}_{\substack{t,r=0,1,\cdots,s\\ t+r\leq s}}(u_{s-t-r}+v_t+w_r)$$

由于我们的分配是

$$\{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\},\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=v[(1,2,3)]。$$

实际上要分配的数额是 $\mathrm{v}[(1,2,3)]$，t_0、r_0 必定代表着从卖者分别向买者 2、3 实际转移的单位数。

61.5.2 和 61.5.3 给出的(61:A)的分析能够在稍做修改后照搬到这里。这表明，正如我们在那里就转移单位数 t_0 所阐述的那样，这里转移的单位数 t_0、r_0 能够用伯姆巴沃克的“边际对”准则来描述。由于这个讨论不会带来新的东西，我们不再继续下去。

63.6.2　下面，我们讨论价格问题。如上所述，买者 2、 582
3 分别收到 t_0、r_0 个单位。另一方面，分配 $\vec{\alpha}$ 赋予他们数额 α_2、α_3。这两种描述只有借助下面的方程才能协调起来：

(63:32) $$v_{t_0}-t_0p=\alpha_2,$$

(63:33) $$w_{r_0}-r_0q=\alpha_3,$$

p,q 分别是由买者 2、3 支付的每单位价格。(63:32) 和 (63:33) 等价于 61.6.1 中 (61:24)，不过，必须强调的一点是，对于两位买者，我们得到了两个不同的价格！

现在，(63:30) 能够用 p、q ① 表述为：

---

① 其有关 α_2、α_3 的说法能够借助(63:32)和(63:33)转换为有关 p、q 的说法。

利用 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=z$，关于 α_1 的(63:30)只不过是关于 α_2、α_3 的那些说法的一个结果而已。因此，我们不必考虑它。——582，①

$$(63:34) \qquad \frac{1}{t_0}(v_{t_0} - z + w) \leqq p \leqq \frac{1}{t_0}v_{t_0},$$

$$(63:35) \qquad \frac{1}{r_0}(w_{r_0} - z + v) \leqq q \leqq \frac{1}{r_0}v_{r_0}。$$

这些不等式类似于 61.6.1 中的(61:25)。我们能够以类似方式对待它们,并将其与得自伯姆巴沃克理论的应用的极限进行比较。鉴于 63.3 中给出的理由,我们将不给出这一工作的细节。几点说明还是值得的。

区间(63:34)和(63:35)再次比伯姆巴沃克理论的区间宽——正如 61.6 中那样[见(61:C)]。一些数字例子表明,这一差异趋于变小。因此,有可能,随着买者人数的增加会趋于消除买者联盟带来的这个差别。然而,我们必须十分小心地对待这一猜想,因为我们十分清楚随着参与者人数的增加,解的复杂性增加得多么快,解的不同部分的解释会变得多么困难。

我们将会看到,我们不得不为两位买者引入两个(有可能)不同的价格,尽管我们的完全信息假设仍然成立。这与 61.6.3 的解释完全一致:我们在那里看到,所谓的价格实际上是若干不同交易的平均价格,卖者和买者必定一直面对着溢价和折扣。所有这些必定有益于协调两位买者之间的差异。

最后,我们可以给出 61.6.3 的最后一点说明的等价
583 说法。价格结构形成中的所有这些反常现象也都与这样一个事实一致:我们正在考虑的市场是一个垄断或双头垄断市场。

64. 一般市场

64.1　问题描述

64.1.1　迄今为止，我们曾经考虑的市场是受到十分严厉限制的市场：其中有两个或三个参与者。下面，我们向前迈出一步，考虑一个一般的市场，它由 $l+m$ 个参与者：l 个卖者，m 个买者。当然，这仍然不是最一般的情况：撇开其他不说，最一般的情况允许每一位参与者能够选择买还是卖；或者，他可以同时是一种物品的卖者和另一种物品的买者。然而，在这一研究中，我们将满足于 l 个卖者和 m 个买者的情况。

另外，我们只打算考虑一种物品，其供给量是 s 个单位。

为了方便，我们用 $1,\cdots,l$ 记这些卖者，他们的集合记为

$$L=(1,\cdots,l);$$

用 $1^*,\cdots,m^*$ 记买者，他们的集合记为

$$M=(1^*,\cdots,m^*);$$

而且，全部参与者的集合记为

$$I=L\cup M=(1,\cdots,l,1^*,\cdots,m^*)。$$[1]

---

① 我们宁愿使用这个记号，而不使用传统记号 $1,\cdots,l,l+1,\cdots,l+m$。——583，①

第 i 个卖者最初拥有的物品单位数记为 s_i。这样，

(64:1) $$\sum_{i=1}^{l} s_i = s。$$

用 u_t^i 记 $t(=0,1,\cdots,s_i)$ 个单位的物品对于卖者 i 来说的效用，$v_t^{j^*}$ 记 $t(=0,1,\cdots,s)$ 个单位的物品对于买者 j^* 来说的效用。因此，数量

(64:2) $$u_0^i=0,u_1^i,\cdots,u_{s_i}^i \quad (i=1,\cdots,l),$$

(64:3) $$u_0^{j^*}=0,v_1^{j^*},\cdots,v_s^{j^*} \quad (j=1^*,\cdots,m^*),$$

描述这些单位的物品对于每一位参与者来说的可变效用。

像前面那样，我们取每位买者的初始状态为其零效用。

如 61.5.2、61.5.3、62.1.2 和 63.2.1 中那样，我们不必重复 61.2.2、61.3.1 和 61.3.2 有关当前这一结构的博弈规则的分析。

584 **64.1.2** 这一博弈的特征函数的确定是容易的：

显然，$S\subseteq I=L\cup M$。我们依次考虑三种可能情况。

第一：$S\subseteq L$。在这种情况下，S 中只有卖者，他们中间达不成任何交易。你可以直接看出，$\mathrm{v}(S)$ 只不过描述其初始状态：

(64:4) $$\mathrm{v}(S)=\sum_{i属于S} u_{s_i}^i$$

第二：$S\subseteq M$。在这种情况下，S 中只有买者，他们之间也达不成任何交易。你同样能够直接看出，$\mathrm{v}(S)$ 不过描述其初始状态：

(64:5) $$\mathrm{v}(S)=0。$$

第三：$S\subseteq L$ 和 $S\subseteq M$ 都不成立，即 S 中既有 L 的元素，也有 M 中的元素。在这种情况下，S 包含有卖者，也包含有买者，从而他们之间的交易是肯定可能的。以此为基

础，我们有下述公式：

(64:6)

$$v(S) = \underset{\substack{t_i = 0,1,\cdots,s_i(i\text{属于}S\cap L) \\ r_{j^*} = 0,1,\cdots,s_i(j^*\text{属于}S\cap M) \\ \sum_{i\text{属于}S\cap L} t_i + \sum_{j^*\text{属于}S\cap M} r_{j^*} = \sum_{i\text{属于}S\cap L} s_i}}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{i\text{属于}S\cap L} u^i_{t_i} + \sum_{j^*\text{属于}S\cap M} v^j_{r_{j^*}} \right)$$

在这一表达式中，$S\cap L$ 是属于 S 的卖者组成的集合；$S\cap M$ 是属于 S 的买者组成的集合；t_i（i 属于 $S\cap L$）是从卖者 i 转移出去的单位数；r_{j^*} 是转移给买者 j^*（属于 $S\cap M$）的单位数。[①] 我们请读者验证这些并不困难的公式。

64.2 一些特殊性质：垄断和买方垄断

64.2.1 我们没有能力详尽无遗地讨论这一博弈——l 个买者和 m 个买者的市场——的理论。我们现在有的只是关于一些特例的零碎信息和关于更加广泛的领域的几个猜想。这里出现的问题，除了其在经济学中的重要性之外，似乎还有着数学意义。然而，讨论这个题目时机尚不成熟，我们需要进一步的了解。

从(64:4)和(64:5)这两个较简单的方程中，我们能够得出一些直接的结论。这些结论是：

(64:A)　$S\subseteq L$ 和 $S\subseteq M$ 都是平集。

证明：这意味着， 585

$$v(S) = \sum_{k\text{属于}S} v[(k)], S\subseteq L \text{ 或 } S\subseteq M。$$

---

① 这里，没有必要指明从一位卖者向每一位买者转移的单位数：只有效用才进入 v(S)，不受此影响。

个人之间的谈判、联盟和补偿等必须在我们的理论的应用中自动地受到考虑。——584，①

这是(64:4)和(64:5)的直接结论。

(64:B) 该博弈是常数和博弈的充分必要条件是,它是一个非本质博弈。

证明:充分性:非本质性显然意味着常数和。

必要性:假设该博弈是一个常数和博弈。

由于 L、M 互为补集,那么,

(64:7) $$v(I)=v(L)+v(M)。$$

由(64:A)($S=L,M$),

(64:8) $$v(L)=\sum_{k\text{属于}L}v[(k)],v(M)=\sum_{k\text{属于}M}v[(k)]。$$

结合(64:7)和(64:8),我们有

(64:9) $$v(I)=\sum_{k\text{属于}I}v[(k)]。$$

现在,根据59.3.1和27.4中(27:B)的修改适用于我们这里的情况,它恰好使(64:9)成为非本质性的一个准则。

值得注意的是,当借助(64:4)—(64:6)明确说明时,非本质博弈的准则(64:9)变成:(64:6)中的最大值等于 $\sum_{i\text{属于}L}u^i_{s_i}$。这是(64:6)中最大化的式子在 $t_i\equiv s_i,r_{j\cdot}$ 时的值。所以,这一说法变成了,(64:6)中的最大值发生在 $t_i\equiv s_i$,$r_{j\cdot}\equiv 0$,即不发生交易时。

因此,(64:B)也能够被表述为:

(64:B*) 卖者和买者的个人效用是任何交易都不发生时的效用——(64:6)中的最大值发生在 $t_i\equiv s_i,r_{j\cdot}\equiv 0$——这一事实等价于:该博弈是一个常数和博弈;或者说,(在这种情况下)它是非本质博弈。

这一结果的一个显著特点是,我们这一代表着一个市

场的博弈惟有在市场价格绝对无效的情况下才是常数和博弈。因此，这一问题内在地属于非常数和博弈。

64.2.2 我们换个方向继续下去。

(64:C)　　考虑两个分配，

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \alpha_{1^*}, \cdots, \alpha_{m^*}\}\},$$

$$\vec{\beta} = \{\{\beta_1, \cdots, \beta_l, \beta_{1^*}, \cdots, \beta_{m^*}\}\}。$$

假设 586

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta},$$

S 是这一占优的 30.1.1 的集合。那么，$S \cap L$ 和 $S \cap M$ 都不会是空集。①

证明：不然的话，我们应该有 $S \subseteq M$ 或 $S \subseteq L$。所以，根据(64:A)，S 是平集，从而是肯定不必要集(见 59.3.2)。

我们从(64:C)得出结论：在这种情况下，

(64:10)　$\alpha_i > \beta_i$　至少对于 L 中的一个 i 成立，

(64:11)　$\alpha_{j^*} > \beta_{j^*}$　至少对于 M 中的一个 j^* 成立。

当 L 或 M 是一个一元集(即 $l = 1$ 或 $m = 1$)时，公式(64:10)和(64:11)有一个有某些意义的功能。这意味着，恰好存在着一个卖者或恰好一个买者，即垄断或买方垄断。

在这些情况下，(64:10)的 i 或(64:11)的 j^* 是惟一地确定的：$i = 1$ 或 $j^* = 1^*$。所以，我们有：

(64:D)　　$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 意味着

(64:12)　　当 $l = 1$ 时，$\alpha_1 > \beta_1$，

(64:13)　　当 $M = 1$ 时，$\alpha_{1^*} > \beta_{1^*}$。

---

① S 必须同时包含买者和卖者。——586，①

引人注目的是,(64:12)和(64:13)是具有可递性的关系,而占优 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 则不具有可递性。当然,其中并不存在矛盾,因为(64:12)或(64:13)只不过是 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的必要条件。但是,在一个具体的博弈中,这毕竟是第一次占优如此密切地联系着一个具有可递性的关系。

这一联系似乎是垄断(或买方垄断)情况的一个相当基本的特征。[①] 这一联系将在 65.9.1 中发挥一定作用。

① (64:12)和(64:13)的文字解释简单明了:没有垄断(或买方垄断),不可能有有效的占优关系。——586,②

第 12 章　占优与解的概念扩展

65. 扩展:特殊情况

65.1　问题描述

65.1.1　n 人博弈的数学分析是从 30.1.1 的定义开始的,其中使用了占优和解的概念,当时,这些概念都是毫不含糊地建立起来的。然而,在理论的随后发展中,多次出现了这样的情况,其中,这些概念被修改。这样的情况有三类: 587

第一:在我们严格地以最初的定义为基础的数学演绎过程中,出现了与(分配、占优、解的)最初概念类似但又不完全相同的重要概念。在这种情况下,为了方便,我们给予了它们那些名称,但同时又有必要牢记它们的不同之处。这类例子见 47.3—47.7 中关于有剩余的本质三人博弈研究,其中关于基本三角形的讨论被简化成了其内部更小的三角形的讨论。另一个例子见 55.2—55.11 中关于一个特殊的简单 n 人博弈的研究,其中关于最初的定义域

的讨论被简化成了$\mathscr{A}$中V′的定义域的讨论(见55.8.2—55.8.3的分析)。

第二:在第9章(44.4.2—44.7.4)关于可分解性的分析中,我们明确地重新定义(推广)了分配、占优和解的概念。这对应着我们的理论从零和博弈向常数和博弈的扩展。从那以后,我们一直强调,我们在研究一个新的理论,它类似于但又不完全等同于30.1.1的理论。

实际上,这两类不同形式的概念并非有本质不同:第二类能够被归于第一类。事实上,我们引入新理论为的是更有效地处理最初理论的分解问题。在对这一推广进行试探性分析时,我们一直强调这一动机。在46.10的嵌入分析中,尤其在(46:K)和(46:L)中,我们严格证明了,恰好在这个意义上,新理论能够被归属于最初的理论。

第三:在第11章中,分配、占优和解的概念再次得到
588 推广,尤其在56.8、56.11和56.12中。这对应着该理论向一般博弈的最终扩展。我们再次强调,从那里开始,我们研究的是一个类似于但又不同于旧理论的理论。

然而,这一推广与此前的两个理论有本质不同:它代表着该理论概念上的真正拓展,而不只是技术上的方便。

65.1.2 纵观上述变化,毫无疑问,分配、占优和解的概念变化了(尤其考虑到它们的扩展),但它们之间的联系却没有变化。为了对这些变化——以及此后其他类似变化——有个一般的认识,我们必须找到这一保持不变的联系的一个严格阐述。做到了这一点,我们就能够允许各个方面的完全一般性,并以此为基础重新阐述我们的

理论。

回忆 65.1.1 中列举的例子，呈现在我们面前的是，这一不变的联系是一个过程，通过这个过程，解的概念是从分配和占优的概念推导出来的。这是 30.1.1 中的条件(30:5:c)[或与之等价的(30:5:a)和(30:5:b)]。因此，如果我们释放分配和占优受到的所有约束，但是仍以上述方式定义解，那么，我们就做到了完全一般性。

按照这一方案，我们的做法是：

暂且不考虑分配，我们考虑一个随意给定的域(集合)D。

暂且不考虑占优，我们考虑 D 的元素 x、y 之间的一个任意给定的关系 $\mathscr{S}$。[①]

现在，D 中 $\mathscr{S}$ 的一个解是一个集合 $\mathrm{V}\subseteq D$，它满足如下条件：

(65:1)　　V 的元素恰好是 D 的这样一些元素 y，对于不是 V 的元素的 x，$x\mathscr{S}y$ 成立。[②]

65.2　一般说明

65.2　这些定义提供了上述意义上的一个更为一般的理论基础。

应该注意的是，我们现在的解的概念与 30.3(尤其是 30.3.5)中分析的饱和解之间的关系如同 30.1.1 的最初

---

① $x\mathscr{S}y$ 表达的是，这一关系在特定的元素 x 和 y 之间成立。读者应该回忆 30.3.2 末尾的讨论。——588，①

② 正如我们曾经承诺的那样，这等价于 30.1.1 中的(30:5:c)。——588，②

概念与它之间的关系。尤其是，我们应该把(65:1)与30.3.3中的第四个例子比较，目前的$\mathscr{S}$对应着那里的$\mathscr{R}$的否定。尤其明显的是，在求解的时候，讨论中的关系的不对称性所带来的困难再次出现。也就是说，30.3.6和30.3.7中对这一后果的说明再次适用。

589 我们即将看到，在某些特例中，这些困难是能够解决的。[①]

为了更好地理解整体情况，我们必须讨论关系$x\mathscr{S}y$的某些特殊化。事实上，在我们接下来的讨论中，$\mathscr{S}$完全不受限制，而且在关系$\mathscr{S}$保持这一一般性的情况下，我们不可能指望发现任何特别深入的结果。另一方面，如30.1.1中定义的那样，解的最初概念保留着关系$\mathscr{S}$的最重要应用，而且要发现这一特殊关系的任何简单特性显得十分困难。因此，不存在引入特殊化的明显办法，无论我们多么渴望这样做。

不过，我们将讨论把关系$x\mathscr{S}y$具体化的三个常用方案，并最终找出在特定有限程度上适用于我们的问题的第四个方案。为此，我们需要做一些数学上的准备。

65.3 排序、可递性和非周期性

65.3.1 我们首先考虑(有着定义域D的)关系$x\mathscr{S}y$与“更大”和“更小”的概念相同的基本特点。这一排序已经在数学文献中得到详细和认真的分析，而且它有如下公

---

① 见65.4和65.5的结果，以及65.6—65.7的不那么明显的结果。——589,①

认的性质：

(65:A:a)　　对于 D 的任意两个元素 x、y，下述三个关系中有且仅有一个成立：

$$x=y,\ x\mathscr{S}y,\ y\mathscr{S}x。$$

(65:A:b)　　$x\mathscr{S}y$，$y\mathscr{S}z$ 合起来意味着 $x\mathscr{S}z$。①

我们把具有这些性质的一个关系称为 D 的一个完备排序。一个容易想到并符合普通直觉的完备排序的例子是：对于全部实数或它的任何一部分组成的集合②来说，"更大"这一常见概念。再有，同样条件下，"更小"的概念。甚至平面的点也具有完备排序，例如：$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 必须比 y 有更大或相同的纵坐标，但那样的话，x 必须比 y 有更大的横坐标。③

65.3.2　完备排序的概念能够被大幅度弱化，以至一个有意义的概念仍然存在。这在数学文献中也受到了关注④且在效用理论中有重要性。它得自弱化(65:A:a)，但(65:A:b)保留不变。也就是说： 590

(65:B:a)　　对于 D 中任意两个元素 x、y，下列三个关系中至多有一个成立：

$$x=y,\ x\mathscr{S}y,\ y\mathscr{S}x。$$

(65:B:b)　　$x\mathscr{S}y$，$y\mathscr{S}z$ 合起来意味着 $x\mathscr{S}z$。

---

① 用普通的"更大"这一关系替换(65:A:a)和(65:A:b)中的 $x\mathscr{S}y$，你可以验证，这些的确是"更大"这一关系的基本性质。——589，②

② 例如，正整数或一个区间等。——589，③

③ 没有最后这个条件，我们的 $\mathscr{S}$ 是下一节讨论的关系。——589，④

④ 见伯克霍夫：《格理论》，同上，第 1 章。在这本书中，排序、半排序和类似课题得到了现代数学讨论。其中给出了大量文献。——589，⑤

我们把有这些性质的一个关系 $\mathscr{S}$ 称为 D 的一个半排序。[①]（由于这一排序是一个半排序，）(65:B:a)中列举的三个关系都不成立的 D 的 x、y 被称为 $\mathscr{S}$ 不可比较的。

半排序的例子也容易给出：平面内的点，$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 的纵坐标大于 y 的纵坐标（见第 589 页脚注④）。我们还可以定义：$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 的纵坐标和横坐标都大于 y 的相应坐标。[②] 另一个很好的例子来自正整数域，$x\mathscr{S}y$ 意味着，x 能够被不等于它的 y 整除。

65.3.3 前述两个排序概念保持了(65:A:b)不变而把(65:A:a)修改（弱化）成了(65:B:a)。这强调了(65:A:b)——即可递性——的重要性。[③] 现在，我们要进一步弱化(65:B:a)和(65:A:b)的组合，使得(65:A:b)仍然基本上不受影响。

首先，(65:B:a)等价于下面两个条件：

(65:C:a)　　　　$x\mathscr{S}x$ 永不成立。

(65:C:b)　　　　$x\mathscr{S}y$ 和 $y\mathscr{S}x$ 不可能同时成立。

事实上，(65:B:a)排除了如下三个组合：$x=y$，$x\mathscr{S}y$；$x=y$，$y\mathscr{S}x$；$x\mathscr{S}y$，$y\mathscr{S}x$。第一个和第二个只不过是(65:C:a)的两种写法，而第三个恰好是(65:C:b)。

---

① 注意，我们在中性意义上使用“半”这个词，即一个完备排序是一个半排序的一个特例，因为(65:A:a)隐含着(65:B:a)。——590，①

② 注意，这接近于 3.7.2 最后一点说明意义上的半排序效用。每一想像到的事件都可能受到两个数字特征的影响，其中每一个都必须增加以产生一个清楚和可再现的偏好。——590，②

③ 一些根本不具有排序本质的其他关系也具有这一性质，如相等，$x=y$。——590，③

下面，我们要证明的是：

(65:D)　　考虑如下断言：

(A_m)永远没有 $x_1\mathscr{S}x_0, x_2\mathscr{S}x_1, \cdots, x_m\mathscr{S}x_{m-1}$，其中，$x_0=x_m$ 且 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$属于 D。

那么，我们有：

(65:D:a)　　(65:B:a)等价于(A_1)和(A_2)的结合。

(65:D:b)　　(65:B:a)和(65:A:b)合起来意味着全部(A_1)，(A_2)，(A_3)，…

证明：(65:D:a)的证明：显然，(A_1)是(65:C:a)且(A_2)是(65:C:b)。

以相反的顺序写(A_m)的关系并应用(65:A:b) $m-1$次，这给出了 $x_m\mathscr{S}x_0$。由于 $x_m=x_0$，这意味 $x_0\mathscr{S}x_0$ 与(65:B:a)矛盾。

这个结果暗示我们考虑全部条件(A_1)，(A_2)，(A_3)，… 591
的总和。它们隐含在(65:B:a)和(65:A:b)——半排序——之中，而且，如即将出现的那样，它代表着这一性质的进一步弱化。

相应地，我们定义：

(65:D:c)　　关系 $\mathscr{S}$满足全部条件(A_1)，(A_2)，(A_3)，…，那么，它是非周期的。

读者将会理解为什么我们称其为非周期性：如果(A_m)中的任何一个不成立，就会出现一个关系链：

$$x_1\mathscr{S}x_0, x_2\mathscr{S}x_1, \cdots, x_m\mathscr{S}x_{m-1},$$

它是一个圆环，因为它的最后一个元素 x_m 等于其第一个元素 x_0。

我们已经说明了，非周期性隐含在半排序之中[这当

然是(65:D:b)的内容],从而更隐含在完备排序之中。有待证明的是,它实际上是一个较半排序更为宽泛的概念,也就是说,一个关系能够是一个非周期的关系,而不是一个(完备或半)排序。

下面是这一现象的两个例子:令 D 是全部正整数的集合,$x\mathscr{S}y$ 是直接递推后继关系,即 $x=y+1$。或者,令 D 是全部实数集,且 $x\mathscr{S}y$ 意味着 x 比 y 更大但又大得不太多,如不超过 1,即 $y+1\geqq x>y$。

最后,我们还想说的一点是,完备和半排序的例子以及非周期关系的例子能够轻易增加。篇幅不允许我们这么做,但作为练习,我们建议读者这么做。第 62 页脚注①和第 589 页脚注⑤中的参考文献都是有益的。

65.4 对称关系和完备排序的解

65.4.1 下面,让我们讨论 65.2 末尾提到的特殊方案。

首先:在 30.3.2 意义上说,$\mathscr{S}$是对称的。在这种情况下,恰当的做法是回到 65.2 开头提到的与饱和的联系。由 $\mathscr{S}$ 的对称性,它将提供我们渴望中的解的全部信息。

第二:$\mathscr{S}$是一个完备排序。在这种情况下,如通常那样,我们定义:如果不存在满足 $y\mathscr{S}x$ 的 y,我们称 x 是 D 的最大值。(见接下来的说明。)显然,D 要么没有最大值,要么恰好有一个最大值。[1]

---

① 证明:如果 x、y 都是 D 的最大值,那么,$y\mathscr{S}x$ 和 $x\mathscr{S}y$ 都被排除,(65:A:a)必然要求 $x=y$。——591,①

我们有：

(65:E)　　V 是一个解，当且仅当它是一个一元集，其惟一元素是 D 的最大值。

证明：必要性：令 V 是一个解。由于 D 不是空集，V 也不是空集。 592

考虑 V 中的一个 y。如果 $x\mathscr{S}y$，那么，x 不可能属于 V，因此 V 中有一个 u 满足 $u\mathscr{S}x$。可递性给出 $u\mathscr{S}y$。但是，这是不可能的，因为 u、y 都属于 V。所以，(D! 中)不存在满足 $x\mathscr{S}y$ 的 x[①]，而且，y 必定是 D 的最大值。

所以，D 有一个最大值，它必定是惟一的(见上)。因此，V 是一个一元集，由这个最大值组成。

充分性：令 x_0 是 D 的最大值，V = (x_0)。给定(D! 的)一个 y，V 中不存在使 $x\mathscr{S}y$ 成立的 x 等于 $x_0\mathscr{S}y$ 的否定。因为 $y\mathscr{S}x_0$ 被排除了，这一否定等价于 $y = x_0$。所以，这些 y 形成集合 V。故，V 是一个解。

65.4.2 因此，如果 D 没有最大值，那么，不存在解 V；如果 D 有一个最大值，那么，存在一个解。

如果 D 是有限的，那么，情况肯定是后者。这在直觉上是显而易见的，且容易证明。为了完美，也为了与接下来的说明一致，我们还是要给出全部证明：

(65:F)　　如果 D 是有限的，那么，它有一个最大值。

证明：假设 D 没有最大值。选择 D 中任一 x_1，那么，有一个 x_2 满足 $x_2\mathscr{S}x_1$，那么，有一个 x_3 满足 $x_3\mathscr{S}x_2$ 等等。根据(65:A:b)，对于 $m > n$，$x_m\mathscr{S}x_n$，所以，根据(65:A:a)，

---

① 4.6.2 中讨论过类似情况。——592，①

$x_m \neq x_n$。也就是说，$x_1, x_2, x_3, \cdots$ 全部相互不同，从而 D 是一个无穷集。

这些结果表明，V 的存在性和惟一性对应着 D 的存在性和惟一性。

65.5 半排序的解

65.5.1 第三：$\mathscr{S}$是一个半排序。在这种情况下，我们把 D 的最大值的定义从上面的说明一字不漏地照搬过来。有时，一个方面的做法是，通过将其称为 D 的一个相对最大值来指明与一个半排序的联系。（见前面的说明中的相应地方。这一对比是相当有用的，尽管有下面的脚注②。）D 也许没有最大值，它可能有一个最大值，也可能有若干个最大值。[①] 因此，相对最大值未必惟一，而绝对最大值是惟一的。[②]

593 与绝对最大值相比，相对最大值的存在性问题也有着不同的作用。一个重要的性质是：

(65:G) 如果 D 中的 y 是一个最大值，那么，满足 $x\mathscr{S}y$ 的一个最大值 x 存在。

对于绝对最大值来说，即如果 $\mathscr{S}$是一个完备排序，

---

① 第 591 页脚注①的论述不再成立，因为它依赖于(65:A:a)，而后者现在被弱化为(65:B:a)。

例如，取 D 为平面内的单位正方形，按照 65.3.2 末尾前两个例子中的方法之一，在 D 内定义一个半排序。这样，D 的最大值点分别组成其整个上边，或上边与右边合在一起。——592，②

② 需要提醒的一点是，不要把我们的相对最大值概念与函数理论中的最大值混淆：那里，局部最大值常常被称为相对最大值。由于那里涉及的量是数值量，因而是完备排序的，与我们这里的分析没有任何关系。——592，③

(65:G)恰好表达着一个最大值的存在性。[1] 对于相对最大值来说,情况未必如此,例如,对于一个半排序,某些(相对)最大值的存在性未必意味着(65:G)。这样的例子不难找到,不过,我们不想在这一问题上花费更多篇幅。我们只需说,(65:G)的确是从一个绝对最大值存在的情况向相对最大值情况(见下)的真正扩展(见前面的说明)。

这样,我们有:

(65:H)　V 是一个解,当且仅当(D 和 $\mathscr{S}$!)满足(65:G)且 V 是全部(相对)最大值组成的集合。

证明:必要性:令 V 是一个解。

如果 y 不属于 V,那么,V 中存在一个 x 满足 $x\mathscr{S}y$,因此 y 不是一个最大值。所以,所有的最大值都属于 V。

如果 y 属于 V,那么,上面的说明中(65:E)的证明中给出的论述能够被一字不漏地照搬过来,说明 y 是一个最大值。

所以 V 恰好是所有最大值的集合。

如果 y 不是一个最大值,即不属于 V,那么,V 中存在一个 x,即一个最大值,满足 $x\mathscr{S}y$,所以(65:G)得到满足,进而令 V 是所有的最大值的集合。

充分性:假设(65:G)得到满足,且令 V 是所有的最大值的集合。

---

① 证明:因为 D 不是空集,(65:G)意味着一个最大值的存在性。

相反:令 x_0 是 D 的最大值。那么,对于每个不是最大值的 y,即 $y\neq x_0$,$y\mathscr{S}x_0$ 的排除和(65:A:a)的成立(完备排序!)给出 $x_0\mathscr{S}y$。——593,①

对于V中的x和y,$x\mathscr{S}y$是不可能的,因为y是一个最大值。如果y不属于V,即不是一个最大值,那么,根据(65:G),存在一个是最大值的x,$x\mathscr{S}y$,即x属于V。所以,根据(65:1),V是一个解。

读者应该验证,当这一排序是完备排序时,结果(65:H)如何特殊化为前述(65:E)。

我们的结果(65:H)表明,如果D和$\mathscr{S}$不满足条件(65:G),解V不存在;当这个条件得到满足时,解存在且惟一。

65.5.2 如果D是有限的,那么,情况肯定是后者。我们对此给出详细证明:

(65:I) 如果是有限的,那么,它满足条件(65:G)。

证明:假设情况相反,即D不满足(65:G)。如果一个y不是一个最大值且不存在使$x\mathscr{S}y$成立的最大值x,那么,我们称y是一个*例外*。(65:G)不成立就意味着,例外的y存在。

考虑一个例外的y。由于它不是一个最大值,满足$x\mathscr{S}y$的x存在。又由于y是例外,这个x不是一个最大值。

594 如果满足$u\mathscr{S}x$的一个最大值u存在,那么,根据(65:B:b),这会给出$u\mathscr{S}y$,这与y是个例外矛盾。所以,不存在这样的u,即x也是一个例外。即:

(65:J) 如y是例外,那么,存在一个例外x满足$x\mathscr{S}y$。

现在,选择一个例外x_1和一个满足$x_2\mathscr{S}x_1$的例外x_2,一个满足$x_3\mathscr{S}x_2$的例外x_3,如此等等。由(65:B:b),对于$m>n$,$x_m\mathscr{S}x_n$,从而,根据(65:B:a),$x_m\neq x_n$。也就是说,x_1,

$x_2, x_3, \cdots$ 互补相同且 D 是无穷集。

[见前面的说明(65:F)的证明中。要看到，我们能够用较弱的(65:B:a)替换其(65:A:a)。]

这些结果表明，一个解的存在性并不对应着一个最大值的存在性，而是对应着条件(65:G)。考虑到 65.4.2 中的总结说明，这是一个令人吃惊的结果。它证实了我们较早时的一个结果：在目前的半排序情况下，(65:G)恰当地取代了一个最大值的存在性。

解的惟一性甚至更令人吃惊。根据我们前面的说明的最后一部分，人们自然会假设解的这一惟一性与最大值之间有某种联系。但是，我们现在看到，正如我们已经指出过的那样，解是惟一的，而(相对)最大值未必是惟一的。①

65.6 非周期性和严格非周期性

65.6.1 第四：$\mathscr{S}$是非周期的。我们知道，这种情况是前两种情况的折中，即比前两者都更具一般性。

在那两种情况中，我们确定了一个解存在的充分必要条件，而且我们还发现，当这些条件得到满足时，解是惟一的。[见(65:E)和(65:H)。]另外，我们看到，当 D 是有限集时，这些条件肯定得到满足。[见(65:F)和(65:I)。]

在非周期的情况下，我们将以多种方式发现与此

---

① (65:H)表明，解 V 并不联系着任何具体(非惟一的)最大值，而是联系着所有的最大值的(惟一)集合。——594，①

类似的条件，而且，在某些方面，我们将获得较以前更深刻的认识。然而，在我们的讨论过程中，略微改变我们的观点是必要的，而且，我们的结果将受到一定限制。一个有限的 D 的情况将再次得到彻底和令人满意的解决。

无论是对于 D 本身来说，还是对于其子集来说，引入最大值概念都有方便之处。[①] 所以，我们定义：如果 x 属于 E 且 E 中不存在满足 $y\mathscr{S}x$ 的 y，我们称 x 是 $E(\subseteq D)$ 的一个最大值。我们用 $E^{m}(\subseteq E)$ 记 E 的所有最大值的集合。

595 我们的讨论将证明，D 是否具有如下性质至关重要：

(65:K)　　　　(对于 $E\subseteq D$) $E\neq\ominus$ 意味着 $E^{m}\neq\ominus$。

也就是说：D 的每个非空子集都有最大值。[②] 表面上看，(65:K)与非周期性没有任何关系，但实际上它们之间存在着密切的联系。要说明这种情况下解的作用，我们要首先研究这一联系。

65.6.2 为此，我们去掉 D 和 $\mathscr{S}$ 受到的所有约束条

---

① 由于我们在第二点说明中使用了"绝对"一词，在第三点说明使用了"相对"一词，我们应该在这里使用一个更弱的词。然而，此种情况下这类术语发明是不必要的。——594，②

② 在集论中，即使 $\mathscr{S}$ 是一个完备排序，性质(65:K)也十分重要。熟悉集论的读者将会看出，(65:K)恰好是良序这一基本概念。（在这种情况下，$\mathscr{S}$ 必须被解释为"据先"而不是"更大"。）见弗兰克尔，第195页和第299页；豪斯多夫，第55页，第61页脚注①；泽米罗，第269页脚注②。令人吃惊的是，这同一性质在使我们的解联系到随意的关系时发挥着作用。本章余下的分析的主要部分是研究这一性质及其结果。

实际上，这个题目及其衍生后果有待从数学的角度做进一步分析。——595，①

件，甚至包括非周期性。

为了方便，我们引入一个性质，它使用 65.3.3 中 (65:D) 的一个变形，而且它内在地联系着它们：

(A$_\infty$)　永远没有 $x_1\mathscr{S}x_0, x_2\mathscr{S}x_1, x_3\mathscr{S}x_2, \cdots$，其中，$x_0, x_1, x_2, \cdots$ 属于 D。①

由于即将给出的理由，我们定义：

如果一个关系 $\mathscr{S}$ 满足条件(A$_\infty$)，我们称其为**严格非周期的**。

下面，我们要用五个引理说明严格非周期性——即(A$_\infty$)——与(65:K)及其与周期性之间的关系。基本结果是(65:O)和(65:P)；(65:L)—(65:N)是为(65:O)做的准备。

(65:L)　严格非周期性意味着非周期性。

证明：假设 $\mathscr{S}$ 不是非周期的，那么，D 中存在 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 和 $x_m = 0$，使得 $x_1\mathscr{S}x_0, x_2\mathscr{S}x_1, \cdots, x_m\mathscr{S}x_{m-1}$。现在，把序列 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m$ 扩展为一个无穷序列 $x_0, x_1, \cdots$，为此，令

$$x_0 = x_m = x_{2m} = \cdots,$$

$$x_1 = x_{m+1} = x_{2m+1} = \cdots,$$

$$\cdots$$

$$x_{m-1} = x_{2m-1} = x_{3m-1} = \cdots。$$

这样，显然有 $x_1\mathscr{S}x_0, x_2\mathscr{S}x_1, x_3\mathscr{S}x_2, \cdots$，从而严格非周期性不成立。

---

① 就指数必定无限走下去的意义上说，序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 应该是一个无穷序列，但 x_i 未必总是互不相同。——595，②

(65:M)　　无严格非周期性的非周期性意味着：

(B_∞^*)　　D 中存在一个序列 $x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots$[①]满足如下性质：

596 对于 $x_p\mathscr{S}x_q$，$p=q+1$ 是充分条件且 $p>q$ 是必要条件。[②]

(B_∞^*)意味着 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 两两互不相同，从而这种情况下的 D 必定是无穷的。

证明：由于 $\mathscr{S}$ 不是严格非周期的，D 中存在 $x_0,x_1,x_2,\cdots$，使得 $x_1\mathscr{S}x_0,x_2\mathscr{S}x_1,x_3\mathscr{S}x_2,\cdots$。因此，$p=q+1$ 是 $x_p\mathscr{S}x_q$ 的充分条件。

现在，假设 $x_p\mathscr{S}x_q$。我们希望证明 $p>q$ 的必要性。假设相反的情况：$p\leqq q$。那么，$x_{p+1}\mathscr{S}x_p$，$x_{p+2}\mathscr{S}x_{p+1}$，$\cdots$，$x_q\mathscr{S}x_{q-1}$，[③]$x_p\mathscr{S}x_q$，而且这些关系与($A_m$)($m=q-p+1$)矛盾：用我们的 $x_p,x_{p+1},\cdots,x_q$ 和 x_p 取代其 $x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}$ 和 $x_m=x_0$ 即可。这与 $\mathscr{S}$ 的非周期性矛盾。

因此，(B_∞^*)的全部得证。

现在，(B_∞^*)的结果：如果 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 不是两两互不相同的，那么，$x_p=x_q$ 就会对于某个 $p>q$ 发生。由(B_∞^*)，则 $x_{q+1}\mathscr{S}x_p$；由(B_∞^*)，这意味着 $q+1>p$，即 $q\geqq p$。所以，x_0，$x_1,x_2,\cdots$ 是两两互不相同的，从而 D 必定是无穷集。

(65:N)　　无非周期性意味着：

对于某个 $m(=1,2,\cdots)$，我们有：

---

① 见上面的脚注②和这一引理的最后一部分。——595，③

② 有关这一结果，也可参见 65.8.3。——596，①

③ 这些恰好是 $q-p$ 个关系，如果 $p=q$，那么，它们就不出现。——596，②

(B_m^*)　D 中存在 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 和 $x_m = x_0$ 满足如下性质：

对于 $x_p \mathscr{S} x_q$，$p = q + 1$ 是充分必要条件。[①]

证明：由于 $\mathscr{S}$ 不是非周期的，D 中存在 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 和 $x_m = x_0$，使得 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, \cdots, x_m \mathscr{S} x_{m-1}$。选择这样一个系，其 $m(=1,2,\cdots)$ 尽可能小。

显然，$p = q + 1$ 是 $x_p \mathscr{S} x_q$ 的充分条件。我们要证明的是，它也是必要的。因此，假设 $x_p \mathscr{S} x_q$ 但 $p \neq q + 1$。

现在，$x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m = x_0$ 的周期性的重新排列不影响它们的性质，而且我们能够以这种办法使 x_p 是最后一个元素，即按 p 变成 m。也就是说，假设 $p = m$ 并不失一般性。现在，$p \neq q + 1$，即 $q \neq m - 1$。我们还能够假设 $q \neq m$，因为 $q = m$ 能够被 $q = 0$ 取代。所以，$q \leqq m - 2$。有了这些准备，我们能够用 $x_0, x_1, \cdots, x_q, x_m$ 替换 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m = x_0$[②] 而不影响其性质。这就用小于 m 的 $q + 1$ 取代了 m，这与 m 是最小值的假设矛盾。

故，(B_m^*) 全部得证。

65.6.3　总之：

(65:O)

(65:O:a)　非周期性等价于 $(B_1^*), (B_2^*), \cdots$ 全部被否定。

(65:O:b)　严格周期性等价于全部 $(B_1^*), (B_2^*), \cdots$ 597

---

① 注意，$x_0, x_1, x_2, \cdots$ 的互相关联性在 (B_m^*) 中是完备的，但其在 (B_m^*) 中不完备。这一点在后面是重要的。——596，③

② 即略去 $x_{q+1}, \cdots, x_{m-1}$。——596，④

和(B_∞^*)被否定。

(65:O:c) 严格非周期性意味着对于所有的 D 的非周期性,但是,对于有限集 D 来说,两者等价。

证明:(65:O:a)的证明:这个条件是必要条件,因为(B_∞^*)与(A_∞)矛盾,从而有非周期性。由(65:N),该条件也是充分条件。

(65:O:b)的证明:这个条件是必要条件,因为,根据(65:L),缺乏非周期性与严格非周期性矛盾,且(B_∞^*)与(A_∞)矛盾,从而有严格非周期性。这个条件是充分条件,因为严格非周期性的否定允许(65:M)在非周期情况下的应用,以及(65:O:a)在没有非周期性情况下的应用。

(65:O:c)的证明:充分性来自(65:L)。如果 D 是有限的,那么,必要性——从而等价性——是(65:M)中最后一点说明的结果。

最后,我们建立与(65:K)的联系:

(65:P) (65:K)等价于严格非周期性。

证明:必要性:假设$\mathscr{S}$是不严格的非周期关系。在 D 中选择 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 满足 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \cdots$。那么,$E=(x_0, x_1, x_2, \cdots) \subseteq D$ 且 $\neq \ominus$,而且它显然没有最大值。所以,(65:K)不成立。

充分性:假设(65:K)不成立。选择一个非空的 $E \subseteq D$,它没有最大值。[1] 在 E 中选择一个 x_0,x_0 不是 E 的最大

[1] 读者应该将这里的证明与65.4.2中(65:F)的证明进行比较。——597,①

值点，所以，选择 E 中的 x_1，使 $x_1 \mathscr{S} x_0$。x_1 也不是 E 的最大值点，所以，在 E 中选择一个 x_2，使 $x_2 \mathscr{S} x_1$。如此进行下去。以这种方式，我们得到了 E 中，从而在 D 中的一个序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 且 $x_1 \mathscr{S} x_0, x_2 \mathscr{S} x_1, x_3 \mathscr{S} x_2, \cdots$。这与严格周期性矛盾。

所以，我们看到：严格周期性恰好等价于（65:K），而在我们看来，后者是一个基本的条件。非周期性和严格非周期性之间有着密切联系。有限集 D 的特殊作用就使我们感受到这种联系：对于有限集 D 来说，上述两个概念等价。

65.7　对于一个非周期关系来说的解

65.7.1　现在，我们转向我们的主要目标：D 中 $\mathscr{S}$ 的解的研究。正是在这里，我们赋予（65:K）的基本重要性得到体现：（65:K）密切联系着惟一一个解的存在性。

首先，我们证明，如果（65:K）得到满足，那么，（D 中）恰好存在（$\mathscr{S}$ 的）一个解。在这一证明中，我们将我们自己限制于有限集 D，在这种情况下，解甚至能够通过一个明确的构造过程来得到。这一过程借助有限归纳法来实现。D 的有限性并非真的必要，但一个无穷的 D 会使我们的过程较为复杂。①

因为我们必须假设（65:K），根据（65:P），这意味着，D 必定是严格非周期的。由于 D 是有限的，根据（65:O:c）， 598

① 要用到较为高级的集合论概念（见第 269 页脚注②和第 595 页脚注①的参考书目），尤其是超限归纳法或某些等价技术。——597，②

这与普通的非周期性没什么不同。所以，暂时地，无所谓我们说我们需要 D 的非周期性还是其严格非周期性。不过，应该牢记的一点是，我们正在使用(65:K)，即严格周期性，而且，使讨论中的差异消失的有限性假设能够被去掉。

我们重复一下：在接下来讨论中，我们假设 D 的有限性和性质(65:K)——非周期性，即严格非周期性。

下面，让我们完成上面提到的归纳过程。我们首先完成归纳，上面指出过的性质将在后面证明。

对于每个 $i=1,2,3,\cdots$，我们定义三个集合 A_i、B_i 和 C_i(它们都$\subseteq D$)：$A_1=D$。对于一个 $i(=1,2,\cdots)$，如果 A_i 已知，那么，B_i、C_i 和 A_{i+1} 以下述方式得到：$B_i=A_i^m$，即 B_i^m 是 A_i 中这样一些 y 的集合，A_i 中不存在使 $x\mathscr{S}y$ 的 x。C_i 是 A_i 中这样一些 y 的集合，对于 B_i 中某个 x，$x\mathscr{S}y$ 成立。最后，$A_{i+1}=A_i-B_i-C_i$。

我们要证明的是：

(65:Q) B_i，C_i 不相交。

证明：这是它们的定义的直接结果。

(65:R) $A_i\neq\ominus$ 意味着 $A_{i+1}\subset A_i$。①

证明：根据(65:K)，$A_i\neq\ominus$ 意味着 $B_i=A_i^m\neq\ominus$②，因此，

$$A_{i+1}=A_i-B_i-C_i\subset A_i。$$

(65:S) 存在一个 i 满足 $A_i=\ominus$。

证明：不然的话，由(65:R)，$D=A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，这与 D 的有限性矛盾。

---

① 关键是，我们有$\subset$，而不仅仅有$\subseteq$！——598，①

② 这是我们用到(65:K)的惟一而关键之处。——598，②

(65:T)　令 i_0 是(65:S)中最小的 i，那么，

$$D=A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\supset A_{i_0-1}\supset A_{i_0}=\ominus。$$

证明：这是(65:R)和(65:S)的重述。

(65:U)　$B_1,\cdots,B_{i_0-1},C_1,\cdots,C_{i_0-1}$ 是不相交的集合，它们的并集是 D。

证明：由 A_{i+1} 的定义，我们有 $B_i\cup C_i=A_i-A_{i+1}$。因此，$B_1\cup C_1,\cdots,B_{i_0-1}\cup C_{i_0-1}$ 是两两互不相交的且它们的并集是

$$A_1-A_{i_0}=D-\ominus=D。$$

将这与(65:Q)结合起来表明，$B_1,C_1,\cdots,B_{i_0-1},C_{i_0-1}$，即 $B_1,\cdots,$ 599
$B_{i_0-1},C_1,\cdots,C_{i_0-1}$ 两两互不相交，且它们的并集也是 D。

65.7.2　现在，我们令

(65:2)　$$\mathrm{V}_0=B_1\cup\cdots\cup B_{i_0-1}。$$

那么，(65:U)给出

(65:3)　$$D-\mathrm{V}_0=C_1\cup\cdots\cup C_{i_0-1}。$$

下面，我们证明：

(65:V)　如果 V 是(D 中 $\mathscr{S}$ 的)一个解，那么，$\mathrm{V}=\mathrm{V}_0$。

证明：首先，我们证明：对于所有的 $i=1,\cdots,i_0-1$，$B_i\subseteq\mathrm{V}$。

假设结论不成立且考虑 $B_i\subseteq\mathrm{V}$ 不成立的最小的 i。令 z 是这个 B_i 的不属于 V 的一个元素，那么，对于 V 中某个 y，有 $y\mathscr{S}z$。z 是 A_i 中的一个最大值，从而 y 不属于 A_i。考虑 y 不属于 A_k 的最小 k，那么，$k\leqq i$ 且 y 属于 $D=A_1$，所以 $k\neq1$。令 $j=k-1$，那么，$1\leqq j<i$。y 属于 A_j 但不属于 $A_{j+1}=A_k$，从而它属于 $B_j\cup C_j=A_j-A_{j+1}$。

z 属于 $B_i\subseteq A_i\subset A_j$。假如 y 属于 B_j，那么，$y\mathscr{S}z$ 就会意

味着 z 属于 C_j。这是不可能的，因为 z 属于 B_i。所以，y 属于 C_j。

现在，B_j 中必然存在一个满足 $x\mathscr{S}y$ 的 x。因为 y 属于 V，这把 x 从 V 中排除了。因此，$B_j \subseteq$ V 不可能成立。由于 $j<i$，这与假设中的 i 的最小性矛盾。

这样，我们看到：

(65:4) $\qquad B_i \subseteq \mathrm{V},\quad i=1,\cdots,i_0-1$。

如果 y 属于 C_i，那么，B_i 中存在一个满足 $x\mathscr{S}y$ 的 x。根据(65:4)，这个 x 属于 V，所以 y 不可能属于 V。

这样，我们看到：

(65:5) $\qquad C_i \subseteq -\mathrm{V},\quad i=1,\cdots,i_0-1$。

(65:4)、(65:5)和(65:2)、(65:3)的比较表明，V 必定与 V_0 相同。

(65:W) $\qquad \mathrm{V}_0$ 是(D 中 $\mathscr{S}$ 的)一个解。

证明：我们分两步完成这个证明：

如果 x、y 属于 V_0，那么，$x\mathscr{S}y$ 被排除了：假设结论相反：x，y 属于 V_0，$x\mathscr{S}y$。

x、y 属于 V_0，如 x 属于 B_i 且 y 属于 B_j。如果 $i\leqq j$，那么，y 属于 $B_j \subseteq A_j \subseteq A_i$。$x$ 属于 B_i，所以 $x\mathscr{S}y$ 意味着 y 属于 C_i。这是不可能的，因为 y 属于 B_j。如果 $i>j$，那么，x 属于 $B_i \subseteq A_i \subset A_j$。$y$ 是 A_j 中的一个最大值，所以 $x\mathscr{S}y$ 是不可能的。

因此，无论何种情况，我们总有一个矛盾。

600 如果 y 不属于 V_0，那么，对于 V_0 中某个 x，$x\mathscr{S}y$：y 属于 $-\mathrm{V}_0$，从而属于某个 C_i。所以，对于 B_i 中某个 x，$x\mathscr{S}y$，而且这个 x 属于 V_0。

这就完成了整个证明。

结合(65:V)和(65:W),我们能够说:

(65:X)　　(D 中 $\mathscr{S}$的)解存在且惟一。这个解是(65:2)的 V_0。

65.8 解的惟一性、非周期性和严格非周期性

65.8.1 让我们重新考虑最后三点说明,为了避免更多复杂性,我们仍然保留有限性假设。显然,虽然假设不同,它们却都产生相同的结果。在每种情况下,我们证明了一个惟一的解的存在性,但最初的假设是完备排序,然后是半排序,最后是(普通或严格)非周期性——即一步步变弱。

至此,我们自然要问,我们是否已经达到了弱化的极限了呢?或者非周期性是否能够被一个更弱的条件取代而不损害解的惟一性呢?

必须承认,这一研究思路使我们偏离了博弈论。事实上,在这一理论中,解的存在性有着基本的重要性,但是,我们也知道,解的惟一性问题本来并不存在。

不过,由于我们已经有了一些有关惟一存在性的结果,我们将继续研究这种情况。我们将看到,它对于博弈理论有着一定的间接意义。(见第 67 节。)

按照上面描述的轮廓,我们应该问的是:为了存在一个惟一的解,关系 $\mathscr{S}$ 的哪个性质是必要的和充分的?容易看出,这个问题不大可能有一个简单且令人满意的答案。事实上,(D 中 $\mathscr{S}$的)解仅仅揭示 D(和 $\mathscr{S}$)的结构的很少一部分。非周期的情况不适合这种判断,因为它有点

复杂，不过，完备的排序或半排序的情况倒是把要点弄清楚了。在那里，解仅仅联系着 D 的最大值，而且它根本不表达 D 的其他元素的性质是什么？

这一障碍不难排除。考虑一个集合 $E \subseteq D$。D 中的一个关系 $\mathscr{S}$ 也是 E 中的一个关系，而且如果它是 D 中的一个完备排序、半排序或（普通或严格）非周期关系，那么，在 E 中，它也一样。因此，我们的结果（65:X）意味着，在每个 $E \subseteq D$ 中，存在（$\mathscr{S}$ 的）惟一一个解。如果对于所有的 $E \subseteq D$ 构造这些解，那么，关于 D 的结构，这些解告诉我们的要多得多。我们最好把自己限制于（完备或半）排序的情况。显然，对于所有的 $E \subseteq D$，E 的最大值将向我们提供 D（和 $\mathscr{S}$）的结构的十分详细信息。

601 **65.8.2** 因此，我们遇到了这样一个问题：要使对于每个 $E \subseteq D$ 都（在 E 中）存在（$\mathscr{S}$ 的）惟一一个解，关系 $\mathscr{S}$ 的哪个性质是充分必要条件？我们能够证明的是，这里，非周期性和严格非周期性是有意义的概念，虽然这个题目尚未被彻底研究透彻。下面的两个引理包含着我们能够就这个题目说些什么。

(65:Y) 要使对于每个 $E \subseteq D$ 都（在 E 中）存在（$\mathscr{S}$ 的）惟一一个解，严格非周期性是充分条件。

对于有限集 D，这是（65:X）的结果，而且，根据（65:O:c），严格非周期性可以被非周期性取代。

对于无穷集 D，这依赖于（65:X）向无穷集的推广（见 65.7.1 开头）

证明：如果 D 是（普通或严格）非周期的，这样，所有

的 $E \subseteq D$ 也都是如此(见上)。现在,我们引理中的所有断言都变得显而易见了。

(65:Z) 要使对于每个 $E \subseteq D$ 来说,(E 中)存在($\mathscr{S}$ 的)惟一一个解,非周期性是必要条件。

证明:如果 D 不是非周期的,那么,(65:O:a)给出(65:N)中一个(B_m^*)($m = 1,2,\cdots$)成立。构造其 x_0,$x_1,\cdots,x_{m-1}$ 和 $x_m = x_0$ 并令 $E = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})$。那么,$E \subseteq D$ 和(B_m^*)完全描述了 E 中的 $\mathscr{S}$。让我们考虑 E 中($\mathscr{S}$ 的)解 V。

考虑这样一个解 V。如果 x_i 属于 V,那么,x_{i+1} 不属于 V,因为 $x_{i+1} \mathscr{S} x_i$。如果 x_i 不属于 V,那么,V 中存在一个 y 满足 $y \mathscr{S} x_i$,即 $y = x_j$,$x_j \mathscr{S} x_i$。这意味着 $j = i + 1$[①],所以 $y = x_{i+1}$,从而 x_{i+1} 属于 V。这样,我们看到:

(65:6) x_i 属于 V 的充分必要条件是 x_{i+1} 不属于它。

重复(65:6)给出:

(65:7) 如果 k 是偶数,那么,x_0 属于 V 的充分必要条件是 x_k 属于它。

如果 k 是奇数,那么,x_0 属于 V 的充分必要条件是 x_k 不属于它。

由于 $x_0 = x_m$,如果 m 是奇数,那么,(65:7)中包括一个矛盾。因此,如果 m 是奇数,E 中不存在($\mathscr{S}$ 的)解。如果 m 是偶数,那么,(65:7)意味着 V 要么是所有的有偶数 k 的 x_k 的集合,要么是有一个奇数 k 的 x_k 的集合。而且,容易验证,这两个集合都是 E 中($\mathscr{S}$)的解。

---

① 如果 $i = m$,那么,用 $i = 0$ 替换它。——601,①

所以，我们有：

(65:8) 视 m 是偶数还是奇数，$E=(x_0,x_1,\cdots,x_{m-1})$ 中 $\mathscr{S}$ 的[有来自 (B_m^*) 的 x_0,x_1,x_{m-1} 的]解的个数是 2 或 0。

所以，这个 $E(\subseteq D)$ 中无论如何都不会有惟一解。

结合(65:Y)和(65:Z)，我们有：对于有限集来说，对于所有的 $E\subseteq D$，(E 中 $\mathscr{S}$ 的)惟一一个解的存在性完全得
602 到描述：它等价于非周期性，即此种情况下的严格非周期性。对于无穷集 D，我们能够说的仅仅是，非周期性是必要条件且严格非周期性是充分条件。

65.8.3 这种情况中存在的差异只能通过研究非周期而不是严格非周期的(无穷)集 D 及其子集 E 来弥补。(65:O:a)和(65:O:b)的比较告诉我们，这样一个 D 满足 (B_∞^*)。构造其 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 并令 $D^*=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$。这也是非周期而不是严格非周期的，因此我们可以研究它以取代 D。

这样，问题变成了：

(65:9) 假设 $D^*=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 满足 (B_∞^*)，那么，每个 $E\subseteq D^*$ 中都有($\mathscr{S}$ 的)惟一一个解吗？

(65:9)无法直接得到回答，原因在于 (B_∞^*) 没有完全描述 D^* 中的关系 $x\mathscr{S}y$——即 $x_p\mathscr{S}x_q$。对于 (B_m^*) $(m=1,2,\cdots)$ 来说，相应的问题在(65:Z)的证明中得到了否定的回答，但是，(B_m^*) 在它的集合中完全描述了关系 $x\mathscr{S}y$——即 $x_p\mathscr{S}x_q$。因此，(65:9)的回答需要详细分析满足 (B_∞^*) 的关系 $x_p\mathscr{S}x_q$ 的所有可能形式。这一问题似乎是一个相

当困难的问题。①

65.9 应用于博弈:离散性和连续性

65.9.1 正如我们在前面指出过的那样,我们上面关于非周期性和严格非周期性的结果对于博弈理论来说并没有直接的意义。

关于严格非周期性,[根据(65:P)]我们只需强调它等价于(65:K),并牢记在博弈论中 D(所有分配的集合)本身甚至都没有最大值(即不被占优的元素)。②

以本质三人博弈为例,普通非周期性也遭到了破坏。③

不过,存在着这样的情况,它们出现在特定博弈的数学讨论之中,其中,非周期性的概念已经得到运用。这些情况符合 65.1.1 的第一点说明的精神,而且它们尤其属于那里提到的例子。

因此,在 47.5.1 中讨论的三角形 T 中,如图 76 和图 77 所示,我们有一个非周期的占优。④ 另外,在 55.8.2 中描述的集合 $\mathscr{A}$ 中,存在着一个非周期的占优概念,这是(55:Z)弄清楚了的。⑤

最后,在第 64 节中讨论的市场中,正如 64.2.2 末尾,

---

① 它位于组合数学和集合论的交接处,值得进一步研究。——602,①

② 这一点对于所有本质博弈来说都成立。见 31.2.3 中的(31:M)。——602,②

③ 我们请读者以图 54 为例验证这一点。容易断定,(B^*_m)对于所有的 $m \geq 3$ 都成立[且(A_m)不成立]。——602,③

④ 这里,占优意味着有一个更大的纵坐标。——602,④

⑤ 这里,占优意味着有一个更大的 n 分量,且由此,非周期性是显然的。——602,⑤

603 尤其是那里的(64:12)和(64:13)所表明的那样,在垄断或买方垄断的情况下,存在着一个非周期的占优概念。①

因此,十分引人注目的是,在所有这些情况中,我们发现,存在着解的扩展族。事实上,不仅数字参数,甚至高度未确定的曲线或函数也进入了这些解。对此,第一种情况下见47.5.5和图81,第二种情况下见55.12中第五点说明。在第三种情况下,我们只能提一下一个特殊情况的数学讨论:62.3、62.4和63.4中分析的三人市场——垄断与双头垄断。

65.9.2 在上述非周期情况下,如果强调这些D(被考虑的分配的集合)的无穷性,解的巨大个数似乎是自然的事情。无论如何,只有在有限集D的情况下,非周期性才意味着解的惟一性,对于无穷集来说,严格非周期性成了至关重要的概念。(见65.8的最后一部分,尤其是65.8.2。)当然了,不难验证,所有这些例子都不是严格非周期的。

不过,由于下述理由,这种情形是自我矛盾的:如67.1.2中将要分析的那样,效用概念的修改能够使上述集合D成为有限集。这样,上述非周期博弈将有惟一解。现在,这些修改能够做到任意接近于最初的、未被修改的博弈。因此,有很多解(无穷的D!)的最初的非周期博弈能够被修改后的具有惟一解(有限的D)的非周期博弈任

① 这里,占优意味着有一个更大的1(或1*)分量,且由此,非周期是显然的。

如果垄断和买方垄断都不存在,即如果用上述概念说,$l,m>1$,那么,适用的是(64:10)、(64:11),而不是(64:12)、(64:13)。容易验证,在这种情况下,非周期性并不成立。——603,①

意近似。这些惟一的解如何能够"任意接近"不惟一解呢?

这种自我矛盾的情形将在第67节中得到详细描述。我们在那里给出的分析将证明这一缺乏连续性,并有机会提供某些有一定意义的解释。

66. 效用概念的推广

66.1 推广:理论描述的两个阶段

66.1.1 上一节中,我们用一个关系 *HS* 取代占优,并以此为基础以一种最为广泛的方式推广了解的概念。这些推广应该以如下方式应用我们的理论:我们的分配、占优和解的概念的基础是更为基本的效用概念。现在,如果我们想要改变用于描述后者的形式体系,那么,我们就能 604
够尝试通过前者概念的适当推广充分给出这些变形。

当然,我们并不希望为了推广而推广,不过,存在着能够使我们的理论更为切实的某些推广。尤其是:我们曾经以狭隘和教条的方式对待效用概念。我们不仅假设它是数字的——对此,我们能够构造一个还算说得过去的例子(见3.3和3.5),而且还假设不同玩家之间的效用是能够替代和不受限制地转移的(见2.1.1)。我们这么做有技术上的理由:数字效用是二人零和博弈需要的——尤其因为数学期望在这一博弈中必须发挥的作用。可替代性和可转移性也是 n 人零和博弈的需要,为的是产生属于向量

的分配，它有数字分量和数值特征函数。所有这些必需的东西都隐含地出现在以前者为基础的每个结构之中，并最终出现在我们的一般 n 人博弈理论之中。

因此，效用概念的推广性修改似乎是必要的，与此同时，为了完成这一计划，我们必须克服一些困难。

66.1.2 我们的博弈理论显然分两个不同阶段：第一阶段研究二人零和博弈的描述，并引出了导致它的值的定义；第二个阶段研究 n 人零和博弈，就像二人博弈的值的定义那样，这一研究的基础是特征函数。我们在上面指出了这两个阶段如何使用了效用概念的特定性质。因此，如果这些性质中的任何一个被推广、修改或放弃了，那么，我们就必须研究这样一个变化在每一阶段中的影响。这也意味着，我们要对这两个阶段进行分别的分析。

66.2 第一个阶段的讨论

66.2.1 第一个阶段的推广十分困难。如第 3 章中阐述的那样，二人零和博弈理论处处用到效用的数字特征。

尤其是：除非每位玩家总能够决定若干情况中何者是他所倾向的，难以看出如何赋予一局博弈一个确定的值。这意味着，个人偏好必须界定效用的一个完备排序。

接着，把效用和数字概率结合起来的运算离不开两者中的任何一个。我们已经看到，如果博弈规则允许机会动作，那么，它也许明确要求这样的运算。但是，即便情况不是这样，第 3 章的理论一般来说也会导致具有相同后果的混合策略的应用。（见第 17 节。）

现在，众所周知，效用的完备排序特征并不意味着它 605
一定是数字的。但是，我们在 3.5 中看到，把效用与数字概念结合起来的完备排序则意味着效用的数字特征。

因此，除非有数字效用，我们现在还无法赋予一个博弈一个值。

在 n 人博弈中，特征函数是借助各个（辅助）二人零和博弈的值来定义的。我们把一般 n 人博弈简化为零和博弈进一步用到了效用从一位玩家到另一位玩家的可转移性。事实上，56.2.2 中 $H_{n+1} \equiv -\sum_{k=1}^{n} H_k$ 之类的结构几乎不可能被赋予其他含义。因此，一个 n 人博弈中特征函数的定义与效用的数字本质有着技术上的联系，我们目前还无法摆脱这一联系。

这样一个特征函数的值 v(S) 是相应玩家集合——联盟——S 的值。因此，我们的结论也能够说成：我们给每个可能的玩家联盟赋值的一般方法基本上有赖于效用的数字本质，而且，我们尚且无法改变这一点。

我们在前面指出过，效用的数字本质假设并不像一般认为的那样特别。（见第 3 节的讨论。）另外，通过指定我们分析的是一个严格的货币经济，我们能够避免所有概念上的困难。使我们的理论摆脱这一限制毕竟是一件好事，不过，我们必须承认，做到这一点的可能性还没有得到证明。

66.2.2　尽管有这一一般的不足，存在着很多博弈，其特征函数的定义不会遇到十分严重的困难。26.1 和 57.3 的例子就属于这一类，它们的特征函数能够直接被

确定，并不真的需要对二人零和博弈理论进行详尽分析。的确，这些是合成的例子，为的是得到一个预先确定的已知特征函数，从而，其在这方面易于处理也就不足为奇了。然而，也存在着有一定意义的其他类似情况：在第 10 章的简单博弈理论中，特征函数没有带来任何困难。[①] 再有，61.2—64.2 中考虑的各种市场都有易于处理且直接得到的特征函数。

在这些情况中，我们容易用更为一般的概念取代数字效用。我们将其放在其他地方来完成。

66.3 第二个阶段的讨论

606 **66.3.1** 如果把特征函数看作已经被给定，那么，我们就能够进入第二阶段。

这里，数字效用的必要性能够完全被避开。我们不打算对此进行详细描述，因为这个题目似乎尚未发展到适合最终数学形式化描述的程度。事实上，第一个阶段受阻于上述未解决的困难。另外，我们似乎有一些理由相信，一个更为统一的理论形式也许会把我们引向渴望中的目标。关于这一理论形式，我们目前只能看到一个轮廓。

因此，关于第二阶段的描述，我们只能给出一些一般性的提示。

首先，当我们声明放弃效用的可转移性时，以及当我们声明放弃其数字特征时，零和博弈或常数和博弈之类的概

---

① 这些博弈是通过指出哪些是胜利联盟来定义的，这意味着特征函数被隐蔽地决定了。——605，①

念不是直接地定义的。因此，我们最好直接研究一般博弈。

让我们考虑一个一般 n 人博弈。由于我们有第11章的理论，我们可以忘却其在零和博弈理论中的原型，并试图将其直接扩展到更为一般的（非数字、不可转移）效用的情况。

分配

$$\vec{\alpha} = \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\}$$

仍旧是一个向量，但其分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 可以不是数字。必须注意的是，如果我们放弃效用的数字特征，我们最好承认每个参与者 $i(=1, \cdots, n)$ 有他自己的效用域 U_i。也就是说，$U_1, \cdots, U_n$ 一般来说是不同的。在这结构中，分量 α_i 必须属于 U_i。

必须注意的是，即便所有效用都是数字的——即如果 $U_1, \cdots, U_n$ 都相同且等于实数集——我们仍然可以略去可转移性假设。再有，我们可以考虑可转移性存在但服从一定的约束的情况。我们将在第67节中讨论一个这样的例子。

66.3.2　现在，我们必须考虑分量 α_i 受到的约束。这些约束有两类：第一，全部分配的值域在56.8.2中定义为

(66:1)　　$\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], \quad i = 1, \cdots, n,$

(66:2)　　$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq \mathrm{v}[(1, \cdots, n)]$。[1]

第二，基于

---

[1] 这里，我们倾向于利用(56:10)，而不愿意利用56.12中(56:Ⅰ:b)的(56:25)。——606,①

607 (66:3)
$$\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i \leqq \mathrm{v}(S),$$

我们借助有效集概念来定义占优，而(66:3)正是30.1.1的(30:3)。

这些不等式都属于同一类：(66:1)中给定一个集合$T[=(i)]$，(62:2)中给定集合$T=(1,\cdots,n)=I$，(66:3)中$T=S$，而且要求分配$\vec{\alpha}$把集合——联盟——T置于这样一个地位，在(66:1)中它至少与$\mathrm{v}(T)$指出的位置同样好，或者在(66:2)和(66:3)中它至多与$\mathrm{v}(T)$指出的位置同样好。

联盟T的地位——即其全部参与者的合成位置——在这些不等式中表达为它们的分量的和：$\sum_{k \text{属于} T} \alpha_k$。对于非数字效用来说，值域$U_1,\cdots,U_n$可以相互不同，而且可能不存在它们的相加，从而给出$\sum_{k \text{属于} T} \alpha_k$一类的描述是没有意义的。但是，即便效用是数字的，$\sum_{k \text{属于} T} \alpha_k$的上述意义上的使用也显然等价于假设不受限制的可转移性。事实上，要使一个联盟的地位能够由给予其各成员的数额之和来描述——不用提到个别数额本身，这些成员必须能够在其内部找到一个全体同意的分配这个和的办法，即不存在转移的任何物理障碍。

一般来说，我们将不得不放弃使用$\sum_{k \text{属于} T} \alpha_k$。我们反而必须为这个由给定的联盟$T$中的成员组成的合成的人引入效用域。我们用$U(T)$记这个域。显然，$U[(k)]$与$U_k$相同。$U(T)$必须能够通过某种方法得自$T$中全部$k$的$U_k$。找到这一过程所需要的数学过程并不困难，不过，我

们将其放在别处讨论。

α_k(k 属于 T)的综合以及特征函数的值 v(T)必须是这个系的元素。不等式(66:1)、(66:2)和(66:3)指这一效用系中的偏好。

66.4　统一两个阶段的可取之处

66.4　为使读者不会觉得 66.3 的分析过于粗糙，我们将以某种方式实现两个阶段的理想统一。对于零和 n 人博弈，甚至一般 n 人博弈来说，作为分配、占优和解的后续结构，我们的二人零和理论真正建立在相同一般原则之上。尤其是，14.5、17.8 和 17.9 中给出的二人零和博弈中各种策略的相互关联的重要讨论——即关于良策概念的 608
讨论——以多种方式类似于分配的占优的使用。

现在，我们目前的理论的缺陷似乎存在于分两个阶段进行的必要性：首先给出二人零和博弈的一个解，然后，利用这个解的定义，定义一个特征函数，为的是以这个特征函数为基础给出一般 n 人博弈的一个解。数学和物理学中的一般经验告诉我们，这一两阶段过程有一个由此种情况下的特征函数代表的一个中间停顿，该过程有两个基本方面。在早期研究阶段，它是有利的，因为它分散了困难。然而，在后期阶段，当需要概念的充分一般性时，它会成为一个不足。在我们的过程中间产生一个陡然地定义的数量——特征函数——有可能是一个不必要的技术细节，给主要问题增加了额外困难。

具体到我们在博弈论中的经验：为了克服困难，我们不得不把它们切分，并依次分析具有严格决定性的二人零

和博弈、具有一般严格决定性的二人零和博弈、n 人零和博弈和一般 n 人博弈。然而，这些步骤中只有两个最终出现在一般理论之中：只有二人零和博弈和 n 人一般博弈保留下来了。我们坚持使用特征函数，等于坚持认为，与我们认为满意的 n 人博弈的结果相比，二人零和博弈有一个漂亮得多的中间结果。[①] 当然，在数字的、不受限制的、可转移效用的情况下，我们能够满足这些要求。然而，当有关效用的这些假设被忽略时，事情可能会有所不同。而且，似乎有着表面合理性的是，我们关于 n 人博弈的困难也许来自我们连续坚持二人零和博弈的这一特殊结构。我们当前的技术程序迫使我们坚持这一方面，但这有可能是错误的。

全部 n 人博弈理论的一个统一描述——没有在二人零和博弈和特征函数上的人为停顿——也许最终证明是解决这些困难的出路。

67. 一个例子

67.1 描述

67.1.1 下面，我们要讨论一个例子，其中的效用概
609 念和可转移性将被修改。这些修改并不代表我们关于这

① 对于二人零和博弈，我们得到了惟一一个值——即分配。对于一般博弈（以及 n 人零和博弈）来说，我们只有一个——常见但不惟一——的解，而且个别解还是一些分配组成的一个集合！——608，①

些概念的观点的有意义拓展。我们的例子的意义更多地在于,它允许我们关于非周期性的结果的一个应用,从而使我们对 65.9 末尾讨论的题目有一些新的理解。尤其是,我们希望这类过程将为讨价还价现象提供一个更为充分的数学方法。

67.1.2 我们要考虑的修改是:我们假设效用——或它的货币等价——有不可分的单位组成。也就是说,我们不怀疑它的数字特征,但要求它的值——以适宜的单位——是一个整数。因此,转移也必然限于整数,但我们不做进一步限制。我们准备像过去那样利用特征函数,但也要有整数值。定义域和解的概念并不因此而受到影响。

如果把这一观点应用于一般博弈和二人博弈,那么,不会发生显著变化。也就是说,所有的事情基本上都像我们的旧理论那样。因此,没有必要深入这些情况的细节。另一方面,三人博弈表现出一些新的特点,即便取其原有的零和形式。它引出了一些相当奇怪的困难。这些困难相当有意思,且尚未得到充分分析。因此,我们宁愿把这一讨论放在其他地方。

这排除了新结构中一般三人博弈的详尽讨论。然而,我们将分析一个特例,它直接和讨价还价的本质有关。这就是一个卖者和两个买者组成的三人市场。

67.1.3 在前面的分析中,我们得到了不同的解,依赖于我们假设仅有一次交易还是有多次交易,也依赖于两位买者的相对力量。这些解由 62.5.2 的(62:C)和 63.5 的(63:E)描述。在所有这些情况中,一般解由两部分组成:(62:18)[或(62:20)、(62:21)和(63:30)]和(62:19)

[或(62:23)和(63:31)]。我们那里的讨论表明,(62:18)对应着的情况中两位买者已经结成了针对卖者的联盟。(62:18)是惟一地决定的且基本上与关于这个题目的普通常识性经济学概念一致。另一方面,(62:19)是借助某种具有高度随意性的函数关系定义的。正如我们在62.6.2中看到的那样,这些表达的是建立结盟的两个买者之间的分配规则的多种可能性。也就是说,它们组成其联盟内部的行为标准。我们现在的讨论是要提供更多有关这部分社会机制的功能的信息。

为了有效地这么做,我们可以合理地去掉问题中与此
610 无关的那些因素。也就是说,我们希望避开解的(62:18)部分。62.5.2 和 62.6.1 告诉我们,当 $v=w$ 时,这部分是最小的一部分——而且的确能够被全部略去(见第 571 页脚注①)。这意味着,只有一次(不可分)的交易能够发生且两位买者完全同样有力量。这样,解由 62.5 的(62:20)和(62:19)给出,(62:20)是多余的(见上),或等价地由图 99 给出。

所以,我们在 62.1.2 的方案中假设 $v=w$。通过令"对于卖者来说的备择用途"$u=0$,我们能够进一步简化情况,而不造成明显损失。以这种方式,定义特征函数的 62.1.2 的(62:2)—(62:4)简化为

$$(67:1)\qquad \begin{cases} \mathrm{v}[(1)]=\mathrm{v}[(2)]=\mathrm{v}[(3)]=0, \\ \mathrm{v}[(1,2)]=\mathrm{v}[(1,3)]=w, \quad \mathrm{v}[(2,3)]=0, \\ \mathrm{v}[(1,2,3)]=w。 \end{cases}$$

现在,分配的定义是:

$$\vec{\alpha}=\{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\}。$$

其中，

$$(67:2:a)\qquad \alpha_1 \geqq 0, \alpha_2 \geqq 0, \alpha_3 \geqq 0,$$

$$(67:2:b)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqq w。$$①

67.1.4 现在，我们假设所有这些量都是整数——即给定的 w 和(67:2:a)、(67:2:b)的所有允许的 α_1、α_2、α_3。

我们像过去那样定义占优，即遵从 56.11.1——这意味着，我们一字不漏地重复 30.1.1 的定义。

我们要根据集合 $S \subseteq I = (1,2,3)$ 在定义一个占优关系时的作用来决定其特征。容易证明，集合

$$S = (1,2),(1,3)$$

是肯定必要的，而其他集合则是肯定不必要的。② 因此，我们能够利用有 $S = (1,2),(1,3)$ 的占优的定义。即： 611

$$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$$

---

① 注意，我们正在利用的(67:3:b)中有 ≦ 而不是 =。这是 66.3.2 中(66:2)的讨论中采取的观点。用 56.12 中(56:Ⅰ:b)的术语说，这等于利用(56:10)而非(56:25)。这么做的理由是，前一条件是最初的条件(例如，见 56.8.2)，56.12中用到了的这两者的等价在我们即将利用的结构中不成立。

你将会看到，在 67.2.3 的第一点说明中，(67:2:b)中的≦和 = 必定产生不同结果，不过，这一不同毕竟属于一般情形。另外，(67:2:b)中使用 = 而不使用≦导致的结果与我们即将得到的结果相比只存在次要细节上的不同。——610，①

② 肯定必要集和肯定不必要集的条件是在 31.1 中给出的，59.3.2 中重新进行了分析。由于我们的观点已经再次发生了变化(见上，尤其是脚注①)，有必要又一次重新考虑这些事情。较简单的做法是再次将它们照搬过来：

由(67:2:a)和 30.1.1 中条件(30:3)，每个有 $v(S)=0$ 的 S 都是肯定不必要集。这就解决了 $S=(1),(2),(3),(2,3)$。(67:1)、(62:2:a)和(67:2:b)给出 $\alpha_1+\alpha_2 \leqq w = v[(1,2)]$，$\alpha_1+\alpha_2 \leqq w = v[(1,3)]$，因此 $S=(1,2),(1,3)$ 是肯定必要集。又 31.1.3 中的(31:C)显然成立，这使得 $S=(1,2,3)$ 是肯定不必要集。——610，②

意味着

(67:3:a) $$\alpha_1 > \beta_1$$

且

(67:3:b) $$\alpha_2 > \beta_2 \quad 或 \quad \alpha_3 > \beta_3。$$

因此,占优隐含着(67:3:a),从而它显然是非周期的。(见65.9的相应讨论。)再有,$\vec{\alpha}$ 的值域(67:2:a)和(67:2:b)是有限集,因为分量 α_1、α_2、α_3 必须是整数。[1]

现在,我们应用65.7.2的(65:X):有且只有一个解 V_0,它由公式(65:2)和(65:3)刻画。

67.2 解及其解释

67.2.1 为了应用65.7.2的公式(65:2)和(65:3),我们必须确定65.7.1的开始定义的集合 B_i、C_i。让我们从 B_1、C_1 开始。

B_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,它们不会被占优。要占优 $\vec{\alpha}$,我们必须增加 α_1 和 α_2,或 α_3 而不破坏67.1.3中的(67:2:a)和(67:2:b)。这些增加至少增加1,而 α_2、α_3 中的另一个可以至多被减少到0。因此,$\vec{\alpha}$ 能够被占优的情况是

$$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)\leqq w \text{ 或 } (\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)\leqq w。$$

所以,B_1 被定义为

612 (67:4) $$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)>w,$$
$$(\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)>w。$$

根据(67:2:a)和(67:2:b),这意味着 $\alpha_3<2$,$\alpha_2<2$,即 α_2,$\alpha_3=0,1$。这样,(67:4)结合(67:2:a)、(67:2:b)给出下

---

① 在最初的连续统结构中,情况自然不是这样。——611,①

述可能性：

(67:A)　　$\alpha_2=\alpha_3=0,\quad \alpha_1=w,w-1;$

(67:B)　　$\left.\begin{cases}\alpha_1=1,\alpha_3=0\\ \text{或 } \alpha_2=0,\alpha_3=1\end{cases}\right\},\alpha_1=w-1;$

(67:C)　　$\alpha_2=\alpha_3=1,\quad \alpha_1=w-2$。

C_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合，它们被 B_1 中的元素占优，即被(67:A)—(67:C)的 $\vec{\alpha}$ 占优。容易验证，这些由

(67:D)　　$\left.\begin{cases}\alpha_2=0\\ \text{或 } \alpha_3=0\end{cases}\right\},\alpha_1\leqq w-2$

描述。

67.2.2　现在，我们最好避开 65.7.2 的(65:2)和(65:3)，即不继续确定 $B_2,C_2,B_3,C_3,\cdots$，转而利用一个尤其适合当前情况的归纳过程。这个过程是：

考虑满足下式的 $\vec{\alpha}$：

(67:E)　　$\alpha_2=0$　或　$\alpha_3=0$。

它们恰好满足(67:A)、(67:B)和(67:D)。我们知道，这些 $\vec{\alpha}$ 中，V_0 恰好包含(67:A)和(67:B)。其余的 $\vec{\alpha}$ 是这样一些 $\vec{\alpha}$：

(67:F)　　$\alpha_2,\alpha_3\geqq 1;$

因此，它们不被(67:A)和(67:B)占优。这样，我们通过在(67:F)之外取(67:A)和(67:B)构造 V_0 并重复(67:F)中的求解过程。

比较(67:F)和 67.1.3 中的(67:2:a)和(67:2:b)。惟一的区别是，α_2、α_3 都增加了 1。因此，w 必须被当作它好像是 $w-2$。因此，V_0 进一步包括

(67:G)　　$\alpha_2=\alpha_3=1,\quad \alpha_1=w-2,w-3;$

(67:H) $\left.\begin{cases}\alpha_2=2,\alpha_3=1\\ \text{或}\\ \alpha_2=1,\alpha_3=2\end{cases}\right\},\quad \alpha_1=w-3;$

而且,我们必须在

(67:I) $\alpha_2,\alpha_3\geqq 2$

中重复这一求解过程。

这一过程的重复把

(67:J) $\alpha_2=\alpha_3=2,\quad \alpha_1=w-4,w-5;$

(67:K) $\left.\begin{cases}\alpha_2=3,\alpha_3=2\\ \text{或}\\ \alpha_2=2,\alpha_3=3\end{cases}\right\},\quad \alpha_1=w-5$

赋予 V_0,而且要求在

(67:L) $\alpha_2,\alpha_3\geqq 3$

中重复这一求解过程,如此等等。

因此,V_0 由(67:A),(67:B),(67:G),(67:H),(67:J),(67:K),…组成。这个集合能够被描述如下:

(67:M) $\alpha_1=0,1,\cdots,w;$

613 (67:N) 如 $w-\alpha_1$ 是偶数,那么,

$$\alpha_2=\alpha_3=\frac{w-\alpha_1}{2}。$$

(67:O) 如 $w-\alpha_1$ 是奇数,那么,

$$\begin{cases}\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}\\ \alpha_2=\dfrac{w+1-\alpha_1}{2},\alpha_3=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2}\\ \alpha_2=\dfrac{w-1-\alpha_1}{2},\alpha_3=\dfrac{w+1-\alpha_1}{2}\end{cases}。$$

67.2.3　结果(67:M)—(67:O)暗示着如下说明：

第一：这个解中的 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 的值是 w 和 $w-1$。因此，我们无法用 = 取代 67.1.3 的(67:2:b)中的 ≦，56.12 的(56:I:b)中的结果不再成立。最大社会利益未必得到实现——这是一个不可分的效用单位的直接结果。①

第二：当 $w\to\infty$ 时，这一"离散的"效用刻度收敛于我们常用的连续刻度。（见 19.12 中有关扑克游戏中离散和连续"手中牌"的相应讨论。）如上所述，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 和 w 最多相差 1。所以，随着 $w\to\infty$，它变得越来越不显著，即这种情况这个方面趋于与连续情况一致。

第三：α_2 和 α_3 之间最多相差 1。所以，随着 $w\to\infty$，这也变得越来越不显著。也就是说，当我们逼近连续情况时，解趋于：

(67:P)　　$$0\leqq\alpha_1\leqq w,$$

(67:Q)　　$$\alpha_2=\alpha_3=\frac{w-\alpha_1}{2}。$$

正如我们在 67.1.3 的第一部分中指出的那样，这个解必须与 62.5.1 中 $u=0, v=w$ 的(62:19)比较。这两个解的确相似，但我们的解只覆盖(62:19)的一种特殊情况：那里提到的 α_1 的单调递减函数相互一致且等于 $\frac{w-\alpha_1}{2}$。

正如 62.6.2 中讨论的那样，这些函数描述了两位玩家在建立他们的联盟时达成的分配规则[表达为

① 见第 513 页脚注③。——613，①

(62:19)]。但现在,在离散情况下,我们发现它被完全决定了——两位玩家必须被一视同仁!

这一对称性的含义是什么呢?在"离散"情况下,其他分配规则——即(62:19)中其他函数选择——真的不可能吗?

67.3 推广:不同离散效用刻度

614 **67.3.1** 为了回答上述问题,我们将破坏(两位买者之间的)对称性,但保留"离散性"。

为此,我们改变67.1的结构:我们规定这一不可分的效用单位对于买者2、3来说分别有不同的值。具体来说:让我们规定 α_1、α_2 必须是整数,而 α_3 必须是偶数。除此之外,67.1中的所有事情都保持不变。

现在,我们给出与67.2的讨论等价的讨论。相应地,我们也从确定65.7的集合 B_1、C_1 开始。

B_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合,它们不会被占优。要占优 $\vec{\alpha}$,我们就必须增加 α_1 和 α_2 或 α_3,且不破坏67.1.3中的(67:2:a)和(67:2:b)。(对于 α_1、α_2 来说)这些增加至少是1,或者(对于 α_3 来说)至少是2,而 α_2、α_3 中的另一个则可以被减少到0。因此,$\vec{\alpha}$ 能够被占优的条件是:$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)\leqq w$ 或 $(\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)\leqq w$。这样,$B_1$ 被定义为

(67:5)
$$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)>w,$$
$$(\alpha_1+1)+(\alpha_3+1)>w。$$

由(67:2:a)和(67:2:b),这意味着,$\alpha_3<2$,$\alpha_2<3$,即 $\alpha_2=0,1,2$,$\alpha_3=0$。这样,(67:5)与(67:2:a)和(67:2:b)合起

来给出以下可能性：

(67:R)　　$\alpha_2=0,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w,w-1;$

(67:S)　　$\alpha_2=1,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-1,w-2;$

(67:T)　　$\alpha_2=2,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_1=w-2$。

C_1 是这样的 $\vec{\alpha}$ 组成的集合，它们被 B_1 的元素占优，即被(67:R)—(67:T)中的 $\vec{\alpha}$ 占优。容易验证，这些 $\vec{\alpha}$ 由下式描述：

(67:U)　　$\alpha_2=0,\quad \alpha_1\leqq w-2;$

(67:V)　　$\alpha_2=1,\quad \alpha_1\leqq w-3$。

67.3.2 现在，我们重复 67.2.2 的变形：不直接决定 $B_2,C_2,B_3,C_3,\cdots$，我们使用一个不同的归纳过程。

考虑满足

(67:W)　　$\alpha_2=0,1$。

的 $\vec{\alpha}$。它们恰好组成(67:R)、(67:S)、(67:U)和(67:V)。[①] 我们知道，在这些 $\vec{\alpha}$ 中，V_0 恰好包含(67:R)和(67:S)。其余 $\vec{\alpha}$ 是满足下式的那些 $\vec{\alpha}$：

(67:X)　　$\alpha_2\geqq 2;$

它们不被(67:R)和(67:S)占优。所以，我们通过在(67:X)之外取(67:R)和(67:S)来构造 V_0，并在(67:X)中重复这一求解过程。 615

把(67:X)与 67.1.3 中的(67:2:a)和(67:2:b)比较。惟一区别是，α_2 增加了 2。因此，w 必须被当作它好像是 $w-2$。[②]

---

① 注意，α_3 不可能等于 1，因为它必须是偶数。——614，①

② 注意，(67:F)之后，这与 67.2.2 中相应步骤有所不同。——615，①

因此，V_0 进一步包含

(67:Y) $\alpha_2=2,\alpha_3=0,\alpha_1=w-2,w-3$；

(67:Z) $\alpha_2=3,\alpha_3=0,\alpha_1=w-3,w-4$；

而且我们必须在

(67:A′) $$\alpha_2\geqq 4$$

中重复这一求解过程。这一过程把

(67:B′) $\alpha_2=4,\alpha_3=0,\alpha_1=w-4,w-5$；

(67:C′) $\alpha_2=5,\alpha_3=0,\alpha_1=w-5,w-6$；

给予 V_0，且要求我们在

(67:D′) $$\alpha_2\geqq 6$$

中重复这一求解过程，如此等等。

因此，V_0 由(67:R)，(67:S)，(67:Y)，(67:Z)，(67:B′)，(67:C′)，…。这个集合能够被描述为

(67:E′) $\alpha_1=0,1,\cdots,w$；

(67:F′) $\alpha_2=w-\alpha_1,w-1-\alpha_1$

(当 $\alpha_1=w$ 时，排除第二个)；

(67:G′) $\alpha_3=0$。

67.3.3 结果(67:E′)—(67:G′)暗示着如下说明：

第一和第二：关于和 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 及其与 w 的关系，我们可以一字不漏地照搬 67.2.3 的相应部分。

第三：这里的事情完全不同于 67.2.3，我们有完全相同的 $\alpha_3=0$。接近连续情况时，即 $w\to\infty$ 时，解趋于：

(67:H′) $0\leqq\alpha_1\leqq w$，

(67:I′) $\alpha_2=w-\alpha_1$，

(67:J′) $\alpha_3=0$。

如 67.2.3 的相应部分中所说明的那样，重复与 62.5.1

中(62:19)的比较,我们看到,现在的情况是:描述结成联盟的两位买者之间分配规则的(62:19)的单调递减函数再次被完全决定了——但是,这一次,我们发现,全部优势跑到买者 2 那儿去了! 不像 67.2.3 那样,他们被一视同仁。

现在,我们必须把这一结果与 67.2.3 中的相应结果 616
进行比较并解释整个现象。

67.4　有关讨价还价的结论

67.4　从 67.2.3 和 67.3.3 的结果得出的结论是确凿无疑的。在前一种情况下,两位买者有完全相同的觉察力——即相同效用单位——且分配规则也指定将他们一视同仁。在后一种情况下,买者 2 比买者 3 更有觉察力——即 2 的效用单位是 3 的效用单位的一半——且分配规则中买者 2 完全处于优势。显然,假如他们的能力被颠倒一下,结果也如此。我们也可以说:如果结盟的买者有同样好的效用刻度,那么,他们之间的分配规则中的优势是均等的,不然,全部优势归有较精细效用刻度的买者所有。①

---

①　考虑更为精细的安排是可能的:我们能够赋予 α_2,α_3 的变动范围不同的稠密程度。在这种情况下,我们仍然有惟一的解,且理由同上。在(α_2,α_3)平面中,α_2 与 α_3 之间的关系是上述三种类型的组合:关于 α_2、α_3 对称,即平行于两个坐标轴的等分角线;平行于 α_3 轴;平行于 α_2 轴。

实际上,通过恰当选择 α_2、α_3 的取值范围,这些因素的任意组合都是可能的。以这种方式,任何想要的曲线形状都能够被近似得很好。这样,连续情况的最初一般性就得到了恢复。

我们不打算详细分析这个题目及其相关问题。——616,①

在离散情况下，这是正确的，因为每个参与者有一个确定的效用刻度且分配规则（即解）是惟一地决定的。在连续情况下，效用刻度的“精细程度”没有被界定，而且如我们已经看到的那样，分配规则有多种选择方式。

所以，我们第一次看到一位玩家的觉察力——具体为其主观效用刻度的精细程度——如何在他与一位盟友的讨价还价中有着决定性影响。[①] 因此，预料之中的事情是，这类问题只有在上述心理状况被恰当且系统地考虑进去了的时候才能够得到彻底解决。最后这一段分析也许是恰当的数学方法的第一个迹象。

① 这当然仅仅发生在有着连续效用的理论允许盟友之间有若干不同分配规则的情况下——当讨价还价起作用时当然是这种情况。——616，②

附录:效用的公理化描述

A.1 问题描述

A.1.1 在这个附录中,我们将证明,3.6.1 中列举 617
的效用公理使得效用成了一个适合线性变换的数。[1] 更确切地说:我们将证明,这些公理隐含着,至少存在着一个(实际上是无穷多个)有性质(3:1:a)和(3:1:b)的映射,它把效用映射到 3.5.1 意义上的数。我们还将证明,任何两个这样的映射都互为线性变换,即它们之间有关系(3:6)。

在分析 3.6.1 的公理(3:A)—(3:C)之前,为了排除可能有的误解,我们另做两点说明。

A.1.2 第一:这些公理,尤其是(3:A)的一组公理,描述了基于关系 < 和 > 的完备排序的概念。我们不把 = 关系公理化,而将其解释为真正的相等。把 = 关系也公理化的另一过程从数学上说完全行得通,不过,我们的过程

---

① 即不用固定零效用和效用的单位。——617,①

也是如此。这两个过程是等价的，并且代表着不同的爱好。相关数学文献和逻辑学文献中的实际做法并不统一，我们将固守较为简单的过程。

第二：正如3.5.1的开头指出的那样，关于效用u、v的“自然”关系$u>v$和关于数ρ、σ的数字关系$\rho>\sigma$，我们都使用符号$>$；而且，关于效用u、v的“自然”运算$\alpha u+(1-\alpha)v$和关于数ρ、σ的数字运算$\alpha\rho+(1-\alpha)\sigma$，我们也都使用符号$\alpha\cdots+(1-\alpha)\cdots$（两种情况下，$\alpha$都是一个数）。有人也许反对说，这一做法会导致误解和混乱；然而，假如我们始终清楚其中涉及的量是效用（u，v，w）还是数（$\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\rho,\sigma$），也就不会出现误解。两种情况（“自然的”和数字的）中的关系和运算的这一标识设定有一定的简洁性并利于保持“自然”关系和数字关系之间的相互联系。出于这些理由，在数学文献中的相似情况中，这基本上是普遍接受了的，我们也准备利用它。

A.1.3 对于没有经过数学训练的读者来说，A.2的推理过程也许长而枯燥乏味。从纯粹数学的角度看，还存在另一点反对意见，即它们无法得到深入分析——潜伏于
618 这些推理背后的概念相当简单，但不幸的是，为了完备，技术上的实现却不得不弄得有点烦琐。简短一些的阐述也许会被发现。

不管怎样，我们现在还不得不利用A.2中的方法，尽管从审美的角度看它不那么令人满意。

A.2 基于公理的推导

A.2.1 下面,我们从3.6.1的公理(3:A)—(3:C)出发进行推理。这一演绎将被分成若干步骤,而且它将在这一节和后续四节中完成。最终的结果将在(A:V)和(A:W)中给出。

(A:A) 如果 $u<v$,那么,$\alpha<\beta$ 意味着

$$(1-\alpha)u+\alpha v<(1-\beta)u+\beta v。$$

证明:显然 $\alpha=\gamma\beta,0<\gamma<1$。由(3:B:a)(应用于取代 u、v、α 的 u、v、$1-\beta$),$u<(1-\beta)u+\beta v$,从而,由(3:B:b)[应用于取代 u、v、α 的 $(1-\beta)u+\beta v$、u、γ],

$$(1-\beta)u+\beta v>\gamma[(1-\beta)u+\beta v]+(1-\gamma)u。$$

由(3:C:a),这能够被写成

$$(1-\beta)u+\beta v>\gamma[\beta v+(1-\beta)u]+(1-\gamma)u。$$

现在,由(3:C:b)(应用于取代 $u,v,\alpha,\beta,\gamma=\alpha\beta$ 的 $v,u,\gamma,\beta,\alpha=\gamma\beta$),右边是 $\alpha v+(1-\alpha)u$,由(3:C:a),从而是 $(1-\alpha)u+\alpha v$。故,$(1-\alpha)u+\alpha v<(1-\beta)u+\beta v$。

(A:B) 给定 u_0,v_0 且 $u_0<v_0$,考虑映射

$$\alpha\rightarrow w=(1-\alpha)u_0+\alpha v_0。$$

这是从区间 $0<\alpha<1$ 到区间 $u_0<w<v_0$ 的一部分的一个一一单调映射。①

① 它将出现在(A:C)中,这个部分实际上整个区间 $u_0<w<v_0$。——618,①

证明：这个映射落在区间 $u_0 < w < v_0$ 上：$u_0 < w$ 与 (3:B:a)（应用于取代 u、v、α 的 u_0、v_0、$1-\alpha$ 上）一致，$w < v_0$ 与 (3:B:b)（应用于取代 u、v、α 的 v_0、u_0、α 上）一致。

一一特征：这一性质得自我们下面要证明的单调性。

单调性：单调性与 (A:A) 同。

(A:C)　　(A:B) 中的映射实际上把 $0 < \alpha < 1$ 的 α 映射到 $u_0 < w < v_0$ 的所有 w。

证明：假设这一说法不成立，即有 $u_0 < w_0 < v_0$ 的某个 w_0 被漏掉了，那么，对于 $0 < \alpha < 1$ 中的所有 α 来说，$(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0 \neq w_0$，即 $(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0 \lessgtr w_0$。按照我
619 们是否有 < 或 >，令 α 属于类 Ⅰ 或类 Ⅱ。显然，这两个相互排斥的类合起来穷尽区间 $0 < \alpha < 1$。这样，我们看到：

第一：类 Ⅰ 不是空集。这是 (3:B:c)（应用于取代 u、w、v、α 的 v_0、w_0、u_0、α）的直接结果。

第二：类 Ⅱ 不是空集。这是 (3:B:d)（应用于取代 u、w、v、α 的 v_0、w_0、u_0、α）的直接结果。

第三：如果 α 属于 Ⅰ 且 β 属于 Ⅱ，那么，$\alpha < \beta$。事实上，由于 Ⅰ 和 Ⅱ 不相交，必然有 $\alpha \neq \beta$。因此，剩下的惟一情况是 $\alpha > \beta$。但这样的话，(A:B) 的映射的单调性意味着，因为 α 属于 Ⅰ 使得 β 必须也属于 Ⅰ——这与 β 属于 Ⅱ 矛盾。因此，惟一的可能是 $\alpha < \beta$。

考虑到 Ⅰ、Ⅱ 的三个性质，必定存在一个 α_0，$0 < \alpha_0 < 1$，它把它们分隔开，即使得 Ⅰ 的所有 α 有 $\alpha \leqq \alpha_0$，且 Ⅱ 的所有

α 有 $\alpha \geqq \alpha_0$。①

现在,α_0 本身必定属于Ⅰ或Ⅱ。我们做出相应区别:

第一:α_0 属于Ⅰ。那么,$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0<w_0$。另有,$w_0<v_0$。应用(3:B:c)[用$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0$、$w_0$、$v_0$、$\gamma$ 替换 u、w、v、γ],我们有满足 $0<\gamma<1$ 的 γ,且 $\gamma[(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0]+(1-\gamma)v_0<w_0$,即,由(3:C:b)[用 u_0、v_0、γ、$1-\alpha_0$、$1-\alpha=\gamma(1-\alpha_0)$ 替换 u、v、α、β、$\gamma=\alpha\beta$],$(1-\alpha)u_0+\alpha v_0<w_0$。故,$\alpha=1-\gamma(1-\alpha_0)$ 属于Ⅰ。然而,$\alpha>1-(1-\alpha_0)=\alpha_0$,尽管我们应该有 $\alpha \leqq \alpha_0$。

第二:α_0 属于Ⅱ。那么,$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0>w_0$。另有 $u_0<w_0$。应用(3:B:d)[用$(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0$、$w_0$、$u_0$、$\gamma$ 替换 u、w、v、α],我们得到一个 γ 满足 $0<\gamma<1$ 且 $\gamma[(1-\alpha_0)u_0+\alpha_0 v_0]+(1-\gamma)u_0>w_0$,即,由(3:C:a),$\gamma[\alpha_0 v_0+(1-\alpha_0)u_0]+(1-\gamma)u_0>w_0$,从而由(3:C:b)(用 v_0、u_0、γ、α_0、$\alpha=\gamma\alpha_0$ 替换 u、v、α、β、$\gamma=\alpha\beta$),$\alpha v_0+(1-\alpha)u_0>w_0$,即,由(3:C:a),$(1-\alpha)u_0+\alpha v_0>w_0$。故,$\alpha=\gamma\alpha_0$ 属于Ⅱ。然而,$\alpha<\alpha_0$,尽管我们应该有 $\alpha \geqq \alpha_0$。

因此,在每种情况下,我们都得到一个矛盾。所以,最初的假设是不可能的。结论得证。

A.2.2 这里,我们要暂停一下。(A:B)和(A:C)已

---

① 这在直觉上十分合理。它更是一个完全严格的推断。事实上,它与实数的引人中用到的经典定理之一相同,这个定理是关于狄德金(Dedekind)分割的一个定理。实函数理论或分析基础方面的教科书中有这方面的详细内容。例如,见卡拉西奥德利的前面引用过同一著作,第343页脚注①。见那里第11页,公理Ⅶ。我们的类Ⅰ应该代人那里提到的集合 $\{a\}$。那里的集合 $\{A\}$ 包含我们的类Ⅱ。——619,①

经实现了一个从效用区间 $u_0 < w < v_0$（u_0、v_0 固定不变且 $u_0 < v_0$，要不就随意！）到数字区间 $0 < \alpha < 1$ 的一一映射。这显然是迈向效用的数字表示的第一步。然而，这个结果在若干方面仍有不完美之处。其主要缺陷是：

第一：数字表示只是就一个效用区间 $u_0 < w < v_0$ 得到了，而非同时就所有效用得到了。我们不清楚如何把与这些不同的对 u_0, v_0 相应的映射组装在一起。

第二：(A:B)和(A:C)的数字表示尚未与我们的要求

620 (3:1:a)和(3:1:b)关联起来。现在，(3:1:a)显然得到了满足：它只是单调性的另一个表达方式，这是由(A:B)提供的。然而，(3:1:b)的成立有待证明。

我们将集中满足所有这些要求。这一过程将基本遵循第一点说明中暗示的一个过程，不过，在具体做的过程中，第二点说明中的要求和结果的惟一性也将得到证明。

我们从证明一组引理开始，这更体现第二点说明和惟一性探索的精神。然而，为了向第一点说明中的目标迈进，它也是基本的。

(A:D)　　如上，令 u_0, v_0 是：u_0, v_0 是固定的，$u_0 < v_0$。对区间 $u_0 < w < v_0$ 中的所有 w，定义数值函数 $f(w) = f_{u_0, v_0}(w)$ 如下：

(i) $f(u_0) = 0$。

(ii) $f(v_0) = 1$。

(iii) 对于 $w \neq u_0, v_0$，即 $u_0 < w < v_0$，$f(w)$ 是数 α，$0 < \alpha < 1$，它对应着(A:B)和(A:C)意义上的 w。

(A:E)　　映射

$$w \to f(w)$$

具有如下性质:

(i′)它是单调的。

(ii′)对于 $0<\beta<1$ 和 $w \neq u_0$,

$$f[(1-\beta)u_0+\beta w]=\beta f(w)。$$

(iii′)对于 $0<\beta<1$ 和 $w \neq v_0$,

$$f[(1-\beta)v_0+\beta w]=1-\beta+\beta f(w)。$$

(A:F) $w(u_0 \leqq w \leqq v_0)$到任意数集的一个映射,如果它有性质(i)、(ii)和(ii′)或(iii′),那么,该映射等同于(A:D)中的映射。

证明:(A:D)是一个定义,我们必须证明的是(A:E)和(A:F)。

(A:E)的证明:(i′):对于 $u_0<w<v_0$,由(A:B),该映射是单调的。这个区间中的所有的 w 都被映射为 >0, <1 的数,即映射为大于 u_0 的像,小于 v_0 的像。所以,我们有整个区间 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 上的单调性。

关于(ii′):对于 $w=v_0$:这个说法是 $f[(1-\beta)u_0+\beta v_0]=\beta$,且这与(A:B)中的定义相同(用 β 替换 α)。

对于 $w \neq v_0$,即 $u_0<w<v_0$:令 $f(w)=\alpha$,即,按照(A:B)

$$w=(1-\alpha)u_0+\alpha v_0。$$

那么,由(3:C:b)[用 v_0、u_0、β、α 替换 u、v、α、β,并利用(3:C:a)]

$$\begin{aligned}(1-\beta)u_0+\beta w &= (1-\beta)u_0+\beta[(1-\alpha)u_0+\alpha v_0] \\ &= (1-\beta\alpha)u_0+\beta\alpha v_0。\end{aligned}$$

因此,(A:B)给出 $f[(1-\beta)u_0+\beta w]=\beta\alpha=\beta f(w)$。

关于(iii′):对于 $w=u_0$:这个说法等于 $f[(1-\beta)v_0+$

$\beta u_0] = 1-\beta$,而且,这与(A:B)中的定义相同[用 $1-\beta$ 替换 α 并利用(3:C:a)]。

621 对于 $w \neq u_0$,即 $u_0 < w < v_0$:令 $f(w)=\alpha$,即,根据(A:B)

$$w=(1-\alpha)u_0+\alpha v_0。$$

这样,根据(3:C:b)[用 u_0、v_0、β、$1-\alpha$ 替换 u、v、α、β 并利用(3:C:a)],

$$\begin{aligned}(1-\beta)v_0+\beta w &= (1-\beta)v_0+\beta[(1-\alpha)u_0+\alpha v_0]\\ &=\beta(1-\alpha)u_0+[1-\beta(1-\alpha)]v_0,\end{aligned}$$

从而,(A:B)给出我们希望的

$$\begin{aligned}f[(1-\beta)v_0+\beta w] &= 1-\beta(1-\alpha)=1-\beta+\beta\alpha\\ &=1-\beta+\beta f(w)。\end{aligned}$$

(A:F)的证明:考虑映射

(A:1) $$w \to f_1(w)$$

它满足(i)、(ii)和(ii′)或(iii′)。映射

(A:2) $$w \to f(w)$$

是 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 到 $0 \leqq \alpha \leqq 1$ 的一个单调映射,从而它是可逆的:

(A:3) $$\alpha \to \psi(\alpha)。$$

现在,结合(A:1)和(A:3),即(A:2)的逆映射:

(A:4) $$\alpha \to f_1[\psi(\alpha)]=\varphi(\alpha)。$$

因为(A:1)和(A:2)对满足(i)、(ii),对于(A:4),我们有:

(A:5) $$\varphi(0)=0, \qquad \varphi(1)=1。$$

如果(A:1)满足(ii′)或(iii′),那么,由于(A:2)同时满足(ii′)和(iii′),对于(A:4),我们有:

(A:6) $$\varphi(\beta\alpha)=\beta\varphi(\alpha),$$

或

(A:7) $$\varphi(1-\beta+\beta\alpha)=1-\beta+\beta\varphi(\alpha)。$$

现在,在(A:6)中令 $\alpha=1$ 并利用(A:5)给出

(A:8) $$\varphi(\beta)=\beta,$$

而且,(A:7)中令 $\alpha=0$ 并利用(A:5)给出 $\varphi(1-\beta)=1-\beta$。β 换成 $1-\beta$ 再次给出(A:8)。

所以,(A:8)总是成立的。(ii′)、(iii′)将其限制为满足 $0<\beta<1$ 的 β。然而,(A:5)将其扩展到 $\beta=0,1$,即扩展到满足 $0\leqq\beta\leqq1$ 的所有 β。考虑到 $\varphi(\alpha)$ 的定义,由(A:3)、(A:4)和(A:8)的一般成立表达的是(A:1)和(A:2)的等同,这恰好是我们要证明的结果。

(A:G) 如上,令 u_0、v_0 固定不变,且 $u_0<v_0$。再令 α_0、β_0 是给定的,而且满足 $\alpha_0<\beta_0$。对于区间 $u_0\leqq w\leqq v_0$ 上的所有 w,定义数值函数 $g(w)=g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 如下:

$$g(w)=(\beta_0-\alpha_0)f(w)+\alpha_0$$

[根据(*A*:*D*),$f(w)=f_{u_0,v_0}(w)$]。

我们注意到: 622

(i)$g(u_0)=\alpha_0$,

(ii)$g(v_0)=\beta_0$。

(A:H) 映射

$$w\rightarrow g(w)$$

具有如下性质:

(i′)它是单调的。

(ii′)对于 $0<\beta<1$ 且 $w\neq u_0$

$$g[(1-\beta)u_0+\beta w]=(1-\beta)\alpha_0+\beta g(w)。$$

(iii′)对于 $0<\beta<1$ 且 $w\neq v_0$,

$$g[(1-\beta)v_0+\beta w]=(1-\beta)\beta_0+\beta g(w)。$$

(A:I)　满足 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 的全部 w 到任一数集的一个映射，如果它具有性质(i)、(ii)和(ii′)或(iii′)，那么，它等同于(A:G)中的映射。

证明：利用函数[$f_1(w)$ 与 $g_1(w)$ 以及 $f(w)$ 与 $g(w)$]之间的对应关系

$$g_1(w) = (\beta_0 - \alpha_0)f_1(w) + \alpha_0,$$

或与之等价的

$$f_1(w) = \frac{g_1(w) - \alpha_0}{\beta_0 - \alpha_0}。$$

(A:G)—(A:I)就变成了(A:D)—(A:F)。因此(A:G)—(A:I)得自(A:D)—(A:F)。

(A:J)　假设(A:G)中的(i)、(ii)，有 $u = u_0, v \neq u_0$ 的方程

$$g(1-\beta)u + \beta v = (1-\beta)g(u) + \beta g(v)$$

$(u_0 \leqq u < v \leqq v_0)$ 等价于(A:I)中的(ii′)；而且当 $u \neq v_0, v = v_0$ 时，它等价于(A:I)中的(iii′)。

证明：(ii′)的证明：用 u_0、w、β 替换 u、v、β 即可。

(iii′)的证明：用 w、v_0、$1-\beta$ 替换 u、v、β 即可。

A.2.3.　在(A:G)—(A:J)中，效用区间 $u_0 \leqq w \leqq v_0$ 到一个数区间 $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \beta_0$ 的映射已经被给出了其技术上的充分形式，有着必要的惟一性。现在，我们能够把各种各样的映射

$$w \to g(w) = g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$$

组装起来。

(A:K)　考虑 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 和一个满足 $u_0 \leqq w_0 \leqq v_0$ 的 w_0。令

$$\gamma_0 = g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w_0)。$$

那么,$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$与$g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,w_0}(w)$在后者的定义域$u_0 \leqq w \leqq w_0$(如果$w_0 \neq u_0$,即$u_0 < w_0$)中相同,而且$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$与$g^{\gamma_0,\beta_0}_{w_0,v_0}$在后者的定义域$w_0 \leqq w \leqq v_0$(如果$w_0 \neq v_0$,即$w_0 < v_0$)中相同。 623

证明:关于$g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,w_0}(w)$:对于$\alpha_0$、$\gamma_0$、$u_0$、$w_0$,$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$具有性质[(A:G)和(A:H)的](i)、(ii′),因为它们与关于α_0、β_0、u_0、v_0的那些式子相同(因为它们只涉及下端α_0和u_0)。对于α_0、γ_0、u_0、w_0,它还有性质[(A:G)的](ii),因为$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)=\gamma_0$。因此,根据(A:I),我们有$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}$在$u_0 \leqq w \leqq w_0$之内满足$g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,w_0}$的一个惟一特征。

关于$g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,w_0}(w)$:对于$\gamma_0$、$\beta_0$、$w_0$、$v_0$,$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$有[(A:G)和(A:H)的]性质(ii)和(iii′),因为它们与α_0、β_0、u_0、v_0时的那些式子相同(因为它们只涉及上端点β_0和v_0)。对于γ_0、β_0、w_0、v_0,它还有[(A:G)的]性质(i),因为$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w_0)=\gamma_0$。所以,(A:I)给出,$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}$在$w_0 \leqq w \leqq v_0$内满足$g^{\alpha_0,\gamma_0}_{u_0,v_0}$的一个惟一特征描述。

(A:L) 考虑$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}$和满足$u_0 \leqq u_1 < v_1 \leqq v_0$的$u_1$、$v_1$。令$\alpha_1 = g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(u_1)$,$\beta_1 = g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(v_1)$。那么,$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$与$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w)$在后者的定义域$u_1 \leqq w \leqq v_1$内相同。

证明:首先,把(A:K)应用于$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}$和$g^{\alpha_0,\beta_1}_{u_0,v_1}$[即用$u_0$、$v_0$、$\alpha_0$、$\beta_0$、$v_1$、$\beta_1$替换$u_0$、$v_0$、$\alpha_0$、$\beta_0$、$w_0$、$\gamma_0$,并记$\beta_1 = g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(v_1)$]——这表明,$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$与$g^{\alpha_0,\beta_1}_{u_0,v_1}(w)$在后者的定义域$u_0 \leqq w \leqq v_1$内相同。接着,把(A:K)应用于$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}$和$g^{\alpha_0,\beta_1}_{u_0,v_1}$[即用$u_0$、$v_1$、$\alpha_0$、$\beta_1$、$u_1$、$\alpha_1$替换$u_0$、$v_0$、$\beta_0$、$w_0$、$\gamma_0$;记$\alpha_1 = g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(u_1) = g^{\alpha_0,\beta_1}_{u_0,v_1}(u_1)$]——这表明,$g^{\alpha_0,\beta_1}_{u_0,v_1}(w)$和$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$与

$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w)$在后者的定义域 $u_0 \leqq w \leqq v_1$ 内相同。

(A:L)必须与第二条推理线路结合在一起。这里，我们还假设已经选定两个数 u^*、v^* 满足 $u^* < v^*$；从此以后直到我们得到(A:V)和(A:W)，我们将视其为给定的。

下面，我们要证明：

(A:M)　　如果 $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$，那么，存在惟一一个 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$，使得

(i) $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(u^*) = 0$，

(ii) $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(v^*) = 1$。

我们把 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 记为 $h_{u_0,v_0}(w)$。

证明：构造(A:D)的 $f(w) = f_{u_0,v_0}(w)$。由于 $u^* < v^*$，所以 $f(u^*) < f(v^*)$。对于变量 α_0，β_0，(A:G)给出 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w) = (\beta_0 - \alpha_0)f(w) + \alpha_0$。从而，上述(i)、(ii)意味着，$(\beta_0 - \alpha_0)f(u^*) + \alpha_0 = 0$，$(\beta_0 - \alpha_0)f(v^*) + \alpha_0 = 1$，且这两个方程惟一
624 地决定 α_0，β_0。① 所以，期望中的 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 存在且惟一。

(A:N)　　如果 $u_0 \leqq u_1 \leqq u^* \leqq v^* \leqq v_1 \leqq u_1$，那么，$h_{u_0,v_0}(w)$ 与 $h_{u_1,v_1}(w)$ 在后者的定义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 中相同。

证明：令 $\alpha_1 = h_{u_0,v_0}(u_1)$，$\beta_1 = h_{u_0,v_0}(v_1)$。那么，由(A:L)，$h_{u_0,v_0}(w)$ 与 $g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w)$ 在后者的定义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 中一致。将此应用于 $w = u^*$ 和 $w = v^*$ 给出，$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(u^*) = h_{u_0,v_0}(u^*) = 0$ 和 $g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(v^*) = h_{u_0,v_0}(v^*) = 1$。从而，由(A:M)，$g^{\alpha_1,\beta_1}_{u_1,v_1}(w) = h_{u_1,v_1}(w)$。所以，$h_{u_0,v_0}(w)$ 与 $h_{u_1,v_1}(w)$ 在后者的定

---

① $\alpha_0 = -\dfrac{f(u^*)}{f(v^*) - f(u^*)}$，$\beta_0 = \dfrac{1 - f(u^*)}{f(v^*) - f(u^*)}$。——623，①

义域 $u_1 \leqq w \leqq v_1$ 内相同。

现在，我们能够建立这样一个重要事实：函数 $h_{u_0,v_0}(w)$ 全部组装成一个函数。具体来说：

(A:O) 任意给定一个 w，有可能选择 u_0, v_0 使得 $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$ 且 $u_0 \leqq w \leqq v_0$。对于 u_0, v_0 的这些选择，$h_{u_0,v_0}(w)$ 具有相同的值。也就是说 $h_{u_0,v_0}(w)$ 仅仅依赖于 w。我们将其记为 $h(w)$。

证明：u_0、v_0 的存在性：$u_0 = \mathrm{Min}(u^*, w)$ 且 $v_0 = \mathrm{Max}(v^*, w)$ 显然具有如下性质：

$h_{u_0,v_0}(w)$ 仅仅依赖于 w：选择两个数对 u_0, v_0 和 u'_0, v'_0：$u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$，$u_0 \leqq w \leqq v_0$ 且 $u'_0 \leqq u^* < v^* \leqq v'_0$，$u'_0 \leqq w \leqq v'$。令 $u_1 = \mathrm{Max}(u_0, u'_0)$，$v_1 = \mathrm{Min}(v_0, v'_0)$。那么，$u_0 \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v_0$，$u_1 \leqq w \leqq v_1$，且 $u'_0 \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v'_0$，$u_1 \leqq w \leqq v_1$。现在，(A:N) 的两次应用（第一次有 u_0, v_0, u_1, v_1, w，第二次有 u'_0, v'_0, u_1, v_1, w）给出，$h_{u_0,v_0}(w) = h_{u_1,v_1}(w)$ 且 $h_{u'_0,v'_0}(w) = h_{u_1,v_1}(w)$。

故

$$h_{u_0,v_0}(w) = h_{u'_0,v'_0}(w)。$$

A.2.4 (A:O) 的函数 $h(w)$ 是就所有效用定义的，而且它有数字值。下面，我们将不怎么费力地证明，它具有我们需要的所有性质。

最容易的做法是借助两个辅理来证明。

(A:P) 任意给定满足 $u < v$ 的 u, v，存在 u_0, v_0，满足 $u_0 \leqq u^* < v^* \leqq v_0$，$u_0 \leqq u < v \leqq v_0$。

证明：令 $u_0 = \mathrm{Min}(u^*, u)$，$v_0 = \mathrm{Max}(v^*, v)$。

(A:Q) 对任意给定的满足 $u < v$ 的 u, v，令 $h(u) = \alpha$，

$h(v)=\beta$。那么，$\alpha<\beta$，而且 $h(w)$ 与 $g^{\alpha,\beta}_{u,v}(w)$ 在后者的定义域 $u\leqq w\leqq v$ 中等同。

证明：如（A:P）指出的那样选择 u_0,v_0。由（A:M），$h_{u_0,v_0}(w)$ 是一个 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$，有着适宜的 α_0 和 β_0。根据（A:O），$h(w)$ 与 $h_{u_0,v_0}(w)$，即 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 在后者的定义域 $u_0\leqq$
625 $w\leqq v_0$ 中等同。将此应用于 $w=u$ 和 $w=v$ 给出，$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(u)=h(u)=\alpha$ 和 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(v)=h(v)=\beta$。由于 $g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 是单调的，这意味着 $\alpha<\beta$。接下来，由（A:L）（用 u_0、v_0、α_0、β_0、u、v、α、β 替换 u_0、v_0、α_0、β_0、u_1、v_1、α_1、β_1），$g^{\alpha_0,\beta_0}_{u_0,v_0}(w)$ 与 $g^{\alpha,\beta}_{u,v}(w)$ 在后者的定义域 $u\leqq w\leqq v$ 中相同等同。所以，这对于 $h(w)$ 来说同样成立。

有了这些准备工作，我们证明 $h(w)$ 的相关性质。

（A:R） 从所有的 w 到一个数集的映射

$$w\rightarrow h(w)$$

有如下性质：

（i）$h(u^*)=0$。

（ii）$h(v^*)=1$。

（iii）$h(w)$ 是单调的，

（iv）对于 $0<\gamma<1$ 和 $u<v$。

$$h[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v)。$$

（A:S） 具有性质（i）、（ii）和（iv）的从所有 w 的到任一数集的映射等同于（A:R）的映射。

证明：（A:R）的证明：（i）、（ii）的证明：直接得自（A:O）和（A:M）。

（iii）的证明：包含在（A:Q）之中。

（iv）的证明：根据（A:P）选择 u、v，然后根据（A:Q）选

择 α、β 和 $g_{u,v}^{\alpha,\beta}(w)$。这样,由(A:H)和(ii′)(用 u、v、v、γ 替换 u_0、v_0、w、γ),$g_{u,v}^{\alpha,\beta}[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)g_{u,v}^{\alpha,\beta}(u)+\gamma g_{u,v}^{\alpha,\beta}(v)$。从而,由(A:Q)

$$h[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v)。$$

(A:S)的证明:考虑所有的效用的到数的一个映射

$$w\rightarrow h_1(w)。$$

它满足(i)、(ii)和(iv)。选择 u_0,v_0 满足 $u_0\leqq u^*\leqq v^*\leqq v_0$,且令 $\alpha_0=h_1(u^*)$,$\beta_0=h_1(v^*)$。那么,由(A:I),$h_1(w)$ 与 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(w)$ 在后者的定义域 $u_0\leqq w\leqq v_0$ 内等同。令 $w=u^*$ 和 $w=v^*$,我们得到 $g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(u^*)=h(u^*)=0$,$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}(v^*)=h_1(v^*)=1$。从而,由(A:M),$g_{u_0,v_0}^{\alpha_0,\beta_0}$ 是 h_{u_0,v_0}。因此,$h_1(w)$ 与 $h_{u_0,v_0}(w)$,即 $h(w)$,在 $u_0\leqq w\leqq v_0$ 内等同。由(A:O),这意味着,$h_1(w)$ 和 $h(w)$ 完全相同。

A.2.5 (A:R)和(A:S)给出从效用到数的一个映射,它具有合理的性质,而且这些性质惟一地刻画了其特征,从而,我们本可以到此为止。然而,我们并不满足于 626
此,理由是:(A:R)中的特征化描述并不等同于(3:1:a)和(3:1:b)的描述,在(iv)中,(A:R)走得没那么远[(3:1:b)中,这是就所有的 u、v 假定的;在(iv)中,仅仅就 $u<v$ 假定了这一点];而且,它在(i)、(ii)中引入了一个随意的(意思是 u^*、v^* 的随意性)正规化。后面,我们将去除这些不协调之处。事实上,这是容易做到的。

我们首先扩展(A:R)中的(iv)。

(A:T) $(1-\gamma)u+\gamma u=u$ 总是成立。

证明:$u\leqslant(1-\gamma)u+\gamma u$ 的意思是,γ 属于类Ⅰ或类Ⅱ。如 γ 属于类Ⅰ或Ⅱ且如果 $0<\beta<1$,那么,由(3:B:a)

和(3:B:b),

$$u \leqslant (1-\beta)u+\beta[(1-\gamma)u+\gamma u] \leqslant (1-\gamma)u+\gamma u。$$

对于 γ 分别属于类 Ⅰ 或 Ⅱ:第一,用 u、$(1-\gamma)u+\gamma u$ 和 $1-\beta$替换(3:B:a)或(3:B:b)中的 u、v 和 α。第二,用 $(1-\gamma)u+\gamma u$、u 和 β 替换(3:B:b)或(3:B:a)中的 u、v 和 α。根据(3:C:a)和(3:C:b)(用 u、u、β、γ 替换 u、v、α、β),

$$(1-\beta)u+\beta[(1-\gamma)u+\gamma u]=(1-\beta\gamma)u+\beta\gamma u。$$

因此,$u \leqslant (1-\beta\gamma)u+\beta\gamma u \leqslant (1-\beta)u+\beta u$。令 $\delta=\beta\gamma$。由于 β 在 $0<\beta<1$ 内不受约束,从而 δ 在 $0<\delta<\gamma$ 内不受约束。假设 $0<\gamma<1$,$0<\delta<1$,我们有:

(A:9) 如果 γ 属于类 Ⅰ 或 Ⅱ,那么,每个 $\delta<\gamma$ 也都属于同一个类 Ⅰ 或 Ⅱ。

(A:10) 在(A:9)的条件下,分别有

$$(1-\delta)u+\delta u \leqslant (1-\gamma)u+\gamma u。$$

如果用 $1-\gamma$ 替换 γ,表达式 $(1-\gamma)u+\gamma u$ 并不发生变化。由于 $1-\gamma<1-\delta$ 等价于 $\gamma>\delta$,我们能够在(A:9)中用 $1-\gamma$ 和 $1-\delta$ 替换 γ 和 δ。这样,(A:9)和(A:10)变成:

(A:11) 如果 γ 属于类 Ⅰ 或 Ⅱ,那么,每个 $\delta>\gamma$ 属于同一个类 Ⅰ 或 Ⅱ。

(A:12) 在条件(A:11)下,分别有

$$(1-\delta)u+\delta u \leqslant (1-\gamma)u+\gamma u。$$

(A:9)和(A:11)表明,如果 γ 属于类 Ⅰ 或 Ⅱ,那么,每个 δ($<\gamma$ 或 $=\gamma$ 或 $>\gamma$)属于同一个类 Ⅰ 或 Ⅱ。也就是说,如果类 Ⅰ 或 Ⅱ 都不是空集,那么,它包含所有 δ,$0<\delta<1$。假设(对于类 Ⅰ 或 Ⅱ 来说)情况的确如此,且考虑 γ,δ,

$\gamma<\delta$。那么,根据(A:10),$(1-\delta)u+\delta u \lessgtr (1-\gamma)u+\gamma u$;而且,根据(A:12)(用$\delta$、$\gamma$替换$\gamma$、$\delta$),$(1-\delta)u+\delta u \lessgtr$ 627
$(1-\gamma)u+\gamma u$。因此,无论如何,$(1-\delta)u+\delta u \lessgtr (1-\gamma)u+\gamma u$中的<和>都成立。这是一个矛盾。故,这类 I 和 II 都必定是空集。

所以,$u \lessgtr (1-\gamma)u+\gamma u$永远不会成立,即$(1-\gamma)u+\gamma u=u$总成立。

(A:U) $h[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)h(u)+\gamma h(v)$ 总成立

$(0<\gamma<1$,任意的$u,v)$。

证明:对于$u<v$,这正是(A:R)和(iv)。对于$u>v$,它是(A:R)中令v、u、$1-\gamma$替换u、v、γ的结果。对于$u=v$,它得自(A:T)。

下面,我们要以理想的形式证明存在性和惟一性定理,即与(3:1:a)和(3:1:b)对应起来。这里,我们还将放弃假设的u^*、v^*的固定选择,它是我们在(A:M)前面引入的。

(A:V) 存在一个从所有的w到一个数集的映射$w \to v(w)$。

该映射具有如下性质:

(i)单调性。

(ii)对于$0<\gamma<1$和任意的u,v,

$\mathrm{v}[(1-\gamma)u+\gamma v]=(1-\gamma)\mathrm{v}(u)+\gamma \mathrm{v}(v)$。

(A:W) 对于有性质(i)和(ii)的任意两个映射$\mathrm{v}(w)$和$\mathrm{v}'(w)$,我们有:

$\mathrm{v}'(w)=\omega_0\mathrm{v}(w)+\omega_1$,

其中 ω_0、ω_1 是适宜的常数且 $\omega_0>0$。

证明：令 u^*、v^* 是两个不同的效用[①]，$u^*\leqq v^*$。

如果 $u^*>v^*$，那么，对换 u^* 和 v^*。因此，总有 $u^*<v^*$。用 u^*，v^* 构造 $h(w)$，即(A:L)—(A:U)。接下来，我们证明：

(A:V)：根据(A:R)，映射

$$w\rightarrow h(w)$$

满足(i)；根据(A:U)，它满足(iii)和(ii)。

(A:W)：首先考虑 $\mathrm{v}(w)$。由(i)，$\mathrm{v}(u^*)<\mathrm{v}(v^*)$。令

$$h_1(w)=\frac{\mathrm{v}(w)-\mathrm{v}(u^*)}{\mathrm{v}(v^*)-\mathrm{v}(u^*)}。$$

628 这样，$h_1(w)$ 自动满足(A:R)中的(i)和(ii)，并根据(i)和(ii)而满足(A:R)中的(iii)和(iv)。因此，根据(A:S)，$h_1(w)=h(w)$，即

(A:13) $$\mathrm{v}(w)=\alpha_0 h(w)+\alpha_1,$$

其中，α_0、α_1 是固定的数：$\alpha_0=\mathrm{v}(v^*)-\mathrm{v}(u^*)>0$，$\alpha_1=\mathrm{v}(u^*)$。

类似地，对于 $\mathrm{v}'(w)$：

(A:14) $$\mathrm{v}'(w)=\alpha'_0 h(w)+\alpha'_1,$$

其中，α'_0、α'_1 是固定的数：$\alpha'_0=\mathrm{v}'(v^*)-\mathrm{v}'(u^*)>0$，$\alpha'_1=\mathrm{v}(u^*)$。

这样，(A:13)和(A:14)合起来给出

---

① 严格地说，这些公理允许不存在两个不同效用的情况。这种可能性几乎没有什么意义，不过，也很容易解决。如果不存在两个不同的效用，那么，它们的个数是零或一。在前一种情况下，我们的断言空泛地得到满足。假如是第二种情况：存在惟一一个效用 w_0。一个函数只是一个常数 $\mathrm{v}(w_0)=\alpha_0$。任何这类函数都满足(A:V)中的(i)，(ii)。在(A:W)中，令 $\mathrm{v}(w)=\alpha_0$，$\mathrm{v}'(w)=\alpha'_0$，选择 $\omega_0=1$，$\omega_1=\alpha'_0-\alpha_0$。——627，①

$$(A:15)\qquad v'(w)=\omega_0 v(w)+\omega_1,$$

其中，ω_0、ω_1 是固定的数：$\omega_0=\frac{\alpha'_0}{\alpha_0}$，$\omega_1=\frac{\alpha_0\alpha'_1-\alpha_1\alpha'_0}{\alpha_0}$。这正是我们希望的结果。

A.3 总结说明

A.3.1 （A：V）和（A：W）显然是 3.5.1 中要求的存在性和惟一性定理。所以，3.5—3.6 的断言完全得到了证明。

这里，我们建议读者重新阅读 3.3 和 3.8 那样的效用概念分析及其数字解释的分析。我们要重新强调两点，这两点已经在那里考虑到了或至少提到了。

A.3.2 第一点是关于我们的过程与互补性概念之间的关系。像（3：1：b）那样的简单可加性公式就似乎表明，关于我们将其效用相加的物品，我们假设这些物品之间没有互补性。要认识到的重要一点是，我们只是在这样一种情况下才这么做，其中，的确能够存在非互补性。正如我们在 3.3.2 的第一部分指出过的那样，我们的 u，v 不是确定数量的——且可能与之共存的——物品或服务的效用，而是想像中的事件的效用。（3：1：b）的 u，v 尤其指想像中的互为备择的事件 u，v，只有其中之一能够且将变成现实。也就是说，（3：1：b）对付的是，要么（以概率 α）有 u，要么（以余下的概率 $1-\alpha$）有 v——但是，由于两者不可能被想像为同时出现，它们也就不可能在普通意义上互补。

应该指出的是，当互补性这一概念能够合理地应用时，博弈理论的确提供了对付它的充分方法：在计算(一个n人博弈中的)一个联盟S的值$v(S)$时，如第25节中描述的那样，物品或服务之间所有可能的互补方式必须被考虑进去。另外，公式(25:3:c)表达的是，联盟$S\cup T$的值有
629 可能大于其成分S和T的值的和，从而，它表达了联盟S的成员的服务与联盟T的成员的服务之间可能有的互补性。(见27.4.3。)

A.3.3 第二点说明涉及的是这样一个问题：我们的方法是否迫使一个人同样评价等量(货币)损失和收益呢？它是否允许给予赌博(即便期望值是0)等一个效用或负效用呢？在3.7.1的最后一部分，我们已经触及这些问题(也可参见下面的脚注②和③)。然而，更多和更具体的说明也许是有益的。

考虑下面的例子：贝奴里建议(见第28页脚注②)，一笔货币收益dx的效用非但不应该与收益dx成比例，而且(假设这笔收益是无穷小量——即渐近地十分小的收益dx)与其所有者的用货币表达的总财富额x成反比。因此，使用适宜的效用单位)，这笔收益的效用是$\frac{dx}{x}$。拥有x_1比拥有x_2多出的效用是$\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{x}=\ln\frac{x_1}{x_2}$。得到(确定的)数额$\eta$比失去同样数额多出的效用是$\ln\frac{x+\eta}{x}-\ln\frac{x}{x-\eta}=\ln\left(1-\frac{\eta^2}{x^2}\right)$。这是小于0的，即等量收益与等量损失相比，人们对后者感受更强烈。一个50%—50%的等风险赌博肯定是不利的。

然而,贝奴里的效用满足我们的公理并服从我们的结果:不过,拥有 x 单位货币的效用与 $\ln x$ 成比例,却不与 x 成比例![①②]

因此,(此种情况下,基本上由我们的公理惟一地决定的)一个恰当的效用定义消除了赌博的特殊效用或负效用,但初看时它是存在的。

我们强调了贝奴里效用,不是因为我们认为它有什么特殊的意义,或比其他效用更接近现实。我们的惟一目的是要证明,数字效用的使用不一定非要假设等货币风险的50%—50%赌博等必须被当作是可有可无的。[③]

这形成了描述这样一个系统的更为深刻的问题,在这个系统中,赌博在任何条件下都有确定的效用或负效用,其中,可以计算数学期望的数字效用无法以任何过程直接或间接定义。在这样一个系统中,我们的某些公 630
理肯定不成立。此时,难以看出哪些公理最有可能经受住这一修改。

A.3.4 不管怎样,有些结果在这方面是不言自明的。

第一:公理(3:A)——或更具体地说,(3:A:a)——表达的是全部效用的排序的完备性,即个人偏好系统的完

① 上述等风险50%—50%赌博是就 x 而言的,而不是就 $\ln x$ 而言的。——629,①

② x 单位货币的效用也许是可度量的,但不与 x 成比例。这是我们在第18页脚注③中指出过的。——629,②

③ 正如3.7.3中说明(1)中指出的那样,我们正在忽略几个人之间的效用转移。本书其他地方使用的较严格的观点,尤其如2.1.1中描述的那样,的确迫使一个人假设效用与货币度量之间成比例。然而,在目前阶段的讨论中,这是没有意义的。——629,③

备性。十分值得怀疑的是，视这一公设成立的现实理想化是否恰当或甚至方便。也就是说，一个人也许需要允许具有不可比关系的两个效用 u、v，记为 $u \parallel v$，它意味着 $u=v$，$u>v$，$u<v$ 都不成立。应该注意的是，当今的无差异曲线方法并非严格对应着这一可能性。事实上，在那种情况下，“$u>v$，$u<v$ 都不成立”对应着“$u=v$ 或 $u \parallel v$”，记为 $u \approx v$，能够被当作效用相等概念的延伸（见 A.1.2 中有关效用相等的说明）。

因此，如果 $u \parallel u'$，$v \parallel v'$，那么，在任何关系中，u'、v' 都能够取代 u、v，例如，在这种情况下，$u<v$ 就意味着 $u'<v'$。尤其是，$u \parallel u'$ 和 $v=v'$ 有这一结果。$u=u'$ 和 $v \parallel v'$ 也有这一结果。也就是说，分别用 v、w、u 记 u、v、u' 且用 u、v、w 记 u、v、v'：

(A:16) $\qquad u \parallel v$ 和 $v<w$ 意味着 $u<w$。

(A:17) $\qquad u<v$ 和 $v \parallel w$ 意味着 $u<w$。

然而，对于真正有意义半排序系统情况，(A:16) 和 (A:17) 都不成立。（例如，见 65.3.2 末尾的第二个例子，第 590 页脚注②也涉及到这个例子，那里指出了其与效用概念的联系。这是一个平面的排序，所以，$u>v$ 意味着 u 比 v 有更大的纵坐标和横坐标。）

第二：在 (3:B) 中，公理 (3:B:a) 和 (3:B:b) 表达的是单调性，这个性质是很难去掉的。公理 (3:B:c) 和 (3:B:d) 则表达的是几何公理中众所周知的阿基米德性质：无论效用 v 大于（或小于）效用 u 多少，也无论效用 w 大于（或小于）效用 u 多少，如果 v 被以一个充分小的概率与 u 混合起来，那么，u 减去这一混合所得差都将小于 u 减去 w 所得

差。在任何条件下,我们大概都希望有这个性质,因为将其去掉就等于引入无穷的效用差。①

这里,下述结果也是值得做出的:任意给定一个完备排序的效用系统 U,它不允许事件与概率的结合,而且其中效用不是数字效用。(例如,基于无差异曲线给出的排序的系统。如第一点说明中指出的那样,通过扩展相等的概念——即视我们在那里引入的 $u \approx v$ 为相等。在这种情况下,$u \approx v$ 意味着 u 和 v 位于同一条无差异曲线上。)这一排序的完备性可以得到。现在,引入带有概率的事件。这意味着,我们引入了分别有概率 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$($\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$)的 $n(=1,2\cdots)$ 个事件的组合。 631

这要求引入相应的(象征性的)效用组合 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$($u_1, \cdots, u_n$ 属于 U)。对这些 $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$(任意 $n = 1, \cdots$ 和任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,且 $u_1, \cdots, u_n$ 满足上述条件)进行完备排序

---

① 关于在几何学的一个公理化中,阿基米德性质的一个表述,其出处见第 74 页脚注①中提到的希尔伯特的著作。见那里的公理 V.1。阿基米德性质一直广泛用于数字系统和代数系统的公理化。

我们对待阿基米德性质的方式略微不同于我们提到的大多数文献中的方式。我们自由使用实数的概念,而在上述文献中这通常是忌讳的。因此,传统方法是通过逐次加上"较小的"来"增大""较大的"量(例如,见希尔伯特著作中的方法),而我们通过一个适当的小数与"较大的"东西(我们例子中 v 和 u 之间的效用差)相乘(我们例子中的 α 倍)来"缩小""较小的"东西(我们的例子中 w 和 u 之间的效用差)。

处理方法上的这一差别完全是技术性的,并不影响概念上的情况。读者将会注意到,我们正在谈论"v 多于 u 的剩余"或"u 多于 v 的剩余"或(两者结合起来)"u 和 v 之间的差"(u、v 是效用)之类的东西。这只是为了便于文字讨论——它们不是我们的严格公理系统的组成部分。——630,①

是可能的，而且不用将其变成数字——如果这一排序可以不是阿基米德排序。事实上，比较 $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n$ 和 $\beta_1v_1+\cdots+\beta_mv_m$，我们可以假设 $n=m$ 且 $u_1,\cdots,u_n$ 与 $v_1,\cdots,v_m$ 相同（写成 $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n+0v_1+\cdots+0v_m$ 和 $0u_1+\cdots+0u_n+\beta_1v_1+\cdots+\beta_mv_m$，然后把 $n+m;u_1,\cdots,u_n;v_1,\cdots,v_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_n,0,\cdots,0;0,\cdots,0,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 换成 $n;u_1,\cdots,u_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\cdots,\beta_n$）。然后，我们比较 $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n$ 和 $\beta_1u_1+\cdots+\beta_nu_n$。接下来，通过适当置换 $1,\cdots,n$，使 $u_1>\cdots>u_n$。有了这些准备之后，把 $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n>\beta_1u_1+\cdots+\beta_nu_n$ 定义为：对于 $\alpha_i\neq\beta_i$ 的最小的 $i(=1,2,\cdots,n)$，如 $i=i_0$，有 $\alpha_{i_0}>\beta_{i_0}$。

显然，这些效用是非数字效用。这里，如果我们设想影响 α_{i_0} 概率的一个小的增加 $\alpha_{i_0}-\beta_{i_0}$，其重要性将超过其余 u_i 的概率的相反增加 $\beta_i-\alpha_i$，$i=i_0+1,\cdots,n$，它们的非阿基米德特征就变得清楚了。（这排除了第 18 页脚注①中那样的准则的应用。）显然，它们破坏了我们的公理（3:B:c）和（3:B:d）。

这样一个非阿基米德排序显然与我们关于效用和偏
632 好的性质的通常想法矛盾。另一方面，如果你想定义包括概率的效用（及其排序）系统，它满足我们的公理（3:A）—（3:C）——且具有阿基米德性质，那么，这些效用就必须是数字效用，因为 A.2 中我们的演绎适用。

第三：有可能，真正关键的一组公理是（3:C）——或更为具体地说，公理（3:C:b）。这一公理表达的是多个机会备择的组合率，而且明显合理的是，如果放弃这一简单的组合率，赌博的特定效用或负效用能够存在。

系统(3:A)—(3:C)的某些变化,在任何程度上包括(3:C:b)的放弃或至少是重大的修改,有可能导致数学上完备的和令人满意的效用计算,它允许赌博的特定效用或负效用。我们希望,实现这一目标的方法将被发现,不过,数学难度似乎很大。当然,这也使得借助纯粹口头讨论来实现一个成功方法的希望变得甚至更为遥远了。

上述说明清楚告诉我们,当今使用的无差异曲线方法无助于克服这些困难,它只不过拓展了相等这一概念(见第一点说明),但是,它不会告诉我们应该如何处理涉及概率的情况,而这类情况与期望效用之间的联系是不可避免的。

人名索引

（索引中所列数字均为英文版页码，即本书中的边页码。罗马数码表示前言部分；阿拉伯数码表示正文部分，后附 ff. 的，表示出现在该页的标题之中。）

阿基米德(Archimedes),630
贝奴里(Bernoulli,D.),28,83,629
伯克霍夫(Birkhoff,G.),62,63,64,66,340,589
伯姆巴沃克(Böhm-Bawerk,E. von),9,562,564,581,582
玻尔(Bohr,N.),148
波尼森(Bonessen,T.),128
波莱尔(Borel,E.),154,186,219
布劳威尔(Brouwer,L. E. J.),154
伯恩赛德(Burnside,W.),256
卡拉西奥德利(Carathéodory,C.),343,384,619
切沃雷(Chevalley,C.),vi
达布罗(D'Abro,A.),148
狄德金(Dedekind),129,619
迪拉克(Dirac,P. A. M.),148
柯南道尔(Doyle,C.),176,178
欧几里得(Euclid),23

芬切尔(Fenchel,W.),128
弗兰克尔(Fränkel,A.),61,595
奥斯多夫(Hausdorff,F.),61.269,595
海森堡(Heisenberg,W.),148
希尔伯特(Hilbert,D.),74,76,630
赫威茨(Hurwicz,L.),vi
卡库塔尼(Kakutani,S.),154
卡普兰斯基(Kaplanski,I.),vi
开普勒(Kepler),4
哥尼(König,D.),60
克罗内克(Kronecker),129
利普希茨(Lipschitz),493
鲁密斯(Loomis,L. H.),vi
麦克雷恩(MacLane,S.),340
马斯查克(Marschak,J.),vi
马修森(Mathewson,L. C),256
门格尔(Menger,C.),564
门格尔(Menger,K.),28,176
莫斯(Mohs),22
摩根斯顿(Morgenstern,O.),176,178
莫尔斯(Morse,M.),95
诺伊曼(Neumann,J. von),1,154,186
牛顿(Newton),4,5,6,33
帕累托(Pareto,V.),18,23,29
斯贝塞(Speiser,A.),256
塔斯基(Tarski,A.),62

丁特纳(Tintner,G.),28
布拉赫(Tycho de Brahe),4
凡勃仑(Veblen,O.),76
维勒(Vile,J.),154,186,198
沃尔德(Wald,A.),v,vi
维尔斯特拉斯(Weierstrass),129
外尔(Weyl,H.),76,128,256
扬(Young,J. W.),76
泽米罗(Zermelo,E.),269,595

词条索引

非循环性(acyclicity),589,591,594,595,596,598,600,601,602,603,609
严格非循环性(strict),594,595,597,598,600,601,602,603
值的加性(additivity of value),251,628
敌对发现(adversary"found out"),105
同意(agreements),221,224,sanctity of,223
盟友(ally),221
备择(alternatives),55
备择的个数(number of),69
先前(anteriority),51,52,77,78,112,117,124
分配(apportionment),35,41,504
阿基米德性质(Archimedean property),630,631
指派(assignment)
实际指派(actual),75
指派模式(pattern of),75
非对称性(asymmetric),270,448
奥地利学派(Austrian School),9
公理化(axiomatization),68,74,76
公理(axioms),25,26,28,73

公理的独立性(independence of),76
公理的逻辑讨论(logistic discussion of the),76

巴加门(backgammon),52,58,79,124,125,164
讨价还价(bargaining),338,501,512,557,558,572,616
物物交换(barter exchange),7
行为(behavior),34
预期行为(expected),146
行为标准(standards of),参见行为标准(standards of behavior)
最优玩法(best way of playing),100
出价(bid),557
叫牌(bidding)
交替叫牌(alternate),211
双边垄断(bilateral monopoly),1,6,35,504,508,543,556
双线性型(bilinear form),154,156,157,166,233
诈叫,虚张声势(bluffing),54,164,168,186,188,204,205,206,208,218,541
诈叫的精细结构(fine structure of),209
布尔代数(boolean algebra),62
界(bound),59,60
有界的(bounded),384
界(bounds)
下界(lower),100
上界(upper),100
桥牌(bridge),49,52,53,58,59,79,86,224

复式桥牌(buplicate),113
桥牌锦标赛(tournament),113
买者(buyer),14,556,557,565,569,572,574,581,583,585,609,610,613

微积分(calculus),3,5,6
变分法(calculus of variations),11,95
取消(calling off),179,180,541
卡特尔(cartels),15,47
完全性(categoricity),76
重心(center of gravity),21,131,303
机会(chance),39,52,87
特征函数(characteristic function),238ff.,240,245,509,510,511,527,529,530,533,535,557,574,584,605,610
扩展特征函数(extended),528,529,532,533
有给定特征函数的博弈(game with a given),243,530,532
特征函数解释(interpretation),538
新理论中的特征函数(in the new theory),348
特征函数的正规化形式(normalized form of the),325
缩减特征函数(reduced),248,325,543,544,545
受约束特征函数(restricted),528,529,531,532,533
策略等价特征函数(strategically equivalent),536
特征函数上的向量运算(vector operations on),253
零简化特征函数(zero reduced),545
特征集函数(characteristic set function),241
国际象棋(chess),49,52,58,59,113,124,125,164

好棋(good),125
首要玩家(chief player),参见玩家(player)
选择(choice),49,51,59,69,222,508
实际(actual)1,75
选择的模式(pattern of),75
裁判的选择(umpire's),80,81,82,183
选择,选择公理(choice,axiom of),269
迂回(circularity),40,42,56
闭集(closed set),384
联盟(coalition),15,35,47,221,222,224,225,229,234,237,240,260,276,289,418,420,507,509,510,531,533,539,566,572,573,605
绝对联盟(absolute),231,238
肯定失败的联盟(certainly defeated)440
肯定胜利的联盟(certainly winning),440
关键联盟(decisive),420
失败联盟(defeated),296
最终联盟(final),315,317
第一联盟(first),306,307,315,316,320
联盟的相互影响(interplay of),291
失败联盟(losing),420,421,423
最小胜利联盟(minimal winning),429,430,436,438,445
可获利的最小胜利联盟(profitable minimal winning),442
不可获利的联盟(unprofitable),437
加权多数联盟(weighted majority),434
胜利联盟(winning),296,297,333,420,421,423,436,445,470

结盟竞争(coalitions,competition for),329
不同力量的联盟(of different strengths),227
封闭系(closed systems),400
一个矩阵的列(column of a matrix),93,141
组合数学(combinatorics),45
商品(commodity),10,13,560,565
信息交流(communications),86
不完备信息交流(imperfect),86
交换性(commutativity),91ff.,94,参见鞍点(saddle points)
相容的(compatible),267ff.
补偿(compensations),36,44,47,225,227,233,234,235,237,240,507,508,510,511,513,533,541,558
竞争(competition),1,13,15,249,509
补集(complement),62
互补(complementarity),18,27,251,437,628
取余运算(complementation),422
完备排序(complete ordering),参见完备排序(ordering,complete)
完全失败,彻底失败(completely defeated),296
合成(composition),340,359,360,454,548
合取(conjunction),66
成分(constituent),340,353,359,360,518
不可分解的成分(indecomposable),457,471
非本质成分(inessential),453,457
简单成分(simple),453,455,457
贡献(contribution),364,366

惯例(conventions),224
凸体(convex bodies),128
凸性(convexity),128ff.,275,547
合作(cooperation),221,402,474,481,508,517
完全合作(complete),483
对(couple),222,226,243,509
克鲁索(Crusoe),参见鲁滨孙(Robinson Crusoe),9,15,31,87,555
立方体 Q(cube Q),293,295
中心及其周边(center and its environs),313
立方体 Q 的中心(center of),316,317,321
立方体 Q 的角(corner),303,304,307,340,429
立方体 Q 的内部(interior of),302,303,304
立方体 Q 的主对角线(main diagonal of),302,304,305,312
中心点的邻域(neighborhood of the center),321
立方体 Q 内的特殊点(special points in),295ff.
立方体 Q 的三维部分(three-dimensional part of),314
曲线,未确定的曲线(curves,undetermined),418
抽牌(cutting the deck),185,186
循环占优("cyclical" dominations),39

可分解性(decomposability),342,357,360
可分解性分析(analysis of),343
分解(decomposition),242,292,340,359,360,452,537,548
分解的基本性质(elementary properties of),381
分解与解的关系(its relation to the solutions),384

分解分拆(decomposition Partition),参见分拆(partition),
分解(decomposition)
失败(defeated),296
肯定失败(certainly),440
完全失败(fully),436,参见玩家(players),联盟(coalitions)
防守(defensive),164,205
决定性(determinateness)
广义严格决定性(general strict),150,155,158ff.
狭义严格决定性(special strict),150,155
严格决定性(strict),106 ff.,111ff.,165,178,179
对角线(diagonals)
对角线隔离(separation of the),173
微分方程(differential equations),6,45
直接信号传递(direct signaling),54
歧视(discrimination),30,288,289,328,475,476,512,参见
有歧视的解(solution,discriminatory)
析取(disjunction),66
距离(distance),20
分配(distribution),37,87,226,261,263,350,364,437
域,定义域(domain),89,90,128,157
占优(domination),38,264,272,350,367,371,415,474,
520ff.,522,523,524,587
非循环占优的概念(acyclical concept of),602
非对称占优(asymmetrical),270
占优概念的扩展(extension of the concept of),587
非传递的占优概念(intransitive notion of),37

双盲棋(double-blind chess),58,72,79
对偶性(duality),104
哑玩家(dummy),299,301,340,358,397,398,400,454,
455,457,460,461,508,518,537,538
双头(duopoly),1,13,543,603
动态均衡(dynamic equilibria),45
动态(dynamics),44,45,189,290

E(e_0)中 Γ 的解[E(e_0),Solutions for Γ in],393ff.
埃卡泰牌戏(Ecarté),59
经济均衡(economic equilibrium),4
经济均衡波动(fluctuations),5
经济均衡模型(models),12,58
静态经济均衡(statics),8
数理经济学(economics,mathematical),154
内部经济(economies,internal),341
经济(economy)
有计划的共产主义经济(planned communistic),555
鲁滨孙经济(Robinson Crusoe),9
社会交换经济(social exchange),9ff.
有效性(effectivity),272,282,350,367,524
能(energy),21
企业家(entrepreneur),8
均匀分布(equidistributed),197
均衡(equilibrium),4,34,45,227,365
等价策略(equivalence strategic),参见策略等价(strategic

equivalence)
本质性(essentiality),249,272,351,452
例外的(exceptional),593
剩余(excess),364,367,417,418,454,455,548
剩余的分配(distribution of the),418
剩余的限制(limitation of the),365,366
剩余的下限(lower limit of),366
过大的剩余(too great),374,380,419
过小的剩余(too small),374,380
剩余的上限(upper limit of),369
交换经济(exchange economy),9,31
交换(exchange)
交换的不确定性(indeterminateness of),14
被排斥的玩家(excluded player),参见被排斥的玩家(player,excluded)
期望(expectation),12,28,83,539
数学期望(mathematical),10,28,29,32,33,83,87,117,118,126,149,156,157
道德期望(moral),28,83
期望值(values),183
剥夺(exploitation),30,329,375
扩展型(extensive form),112,119

$F(e_0)$中Γ的解[$F(e_0)$,solutions for Γ in],384ff.
公平(fairness),166,167,225,255,258,259,470
虚玩家(fictitious player),参见玩家(player)

发现其他玩家(“finding out” the other player),148
发现对手(“finds out” his adversary),106,110,148
第一元素(first element),38,271
固定支付(fixed payments),246,281,298,534
不动点定理(Fixed Point Theorem),154
平性(flatness),276,547
被发现(found out),148
参照系(frame of reference),129
完全独立的(fully detached),参见完全独立的分配(imputation,detached fully)
谓词,函数(function),88,128
  算术函数(arithmetical),89
  特征函数(characteristic),238ff.
  函数的连续性(continuity of),493
  测度函数(measure),252
  数值函数(numerical),89
  数集(numerical set),240,243,530,532
  复合函数(of functions),157
  复数集(set),89
泛函(functional),157
谓词演算(functional calculus),88,154
  函数运算(functional operations),88,91
  基本三角形(fundamental triangle),284,405ff.,552,553,569,570,587
  区域(area),579,580
  基本三角形内的曲线(curves in),412,570,580

不被占优的区域(undominated area),409

获益(gain),33,128,145,539,556,559,629
赌博(gambling),27,28,87,630,631
博弈和社会组织(game and social organizations),43
非对称博弈(asymmetric),334
辅助博弈(auxiliary),101ff.
博弈的公理化定义(axiomatic definition of a),73
博弈的机会成分(chance component of the),80
博弈的分类(classification of),46
博弈的完备概念(complete concept of),55
完备的博弈规则体系(complete system of rules of),83
合成博弈(composition),339ff.
常数和博弈(constant-sum),346ff.,347,350,351,504,505,535,536,537,585
可分解博弈(decomposable),454,471,518
可分解博弈的解(decomposable, solution of),358,381
分解(decomposition),339ff.
直接多数(direct majority),431,433
博弈的要素(elements of the),49
本质博弈(essential),231,232,245,250,331,534,545
本质三人博弈(essential three-person),220ff.,260ff.,471,473
日常博弈概念(everyday concept of),32
博弈的扩展型(extensive form of the),85,105,186,234
极端博弈(extreme),534,535

虚拟博弈(fictitious),240
博弈描述的最终简化(final simplification of the description of a),79,81
一般博弈(general),504ff.,505,538
博弈的一般描述(general description of),57
博弈的一般正式描述(general formal description of),46—84
一般 n 人博弈(general n-person),48,85,112,530,606
理论在一般 n 人博弈上的应用(general n-person, application of theory),542ff.
博弈的嵌入(imbedding of a),398
不可分解的博弈(indecomposable),354
非本质博弈(inessential),231,232,245,249,251,471
博弈的"膨胀"("inflation" of a),398
不变博弈(invariant),257
博弈的核(kernel of),457,459
博弈的长度(length of the),75
博弈的主要简单解(main simple solution of the),444
大博弈(majorant),100,102,103,119,149
多数博弈和主要解(majority and the main solutions),431
博弈的最小长度(minimum length of),123
小博弈(minorant),100,101,119,149
博弈的非孤立特征(non-isolated character of a),366
非严格决定的博弈(non-strictly determined),110
非零和博弈(non-zero-sum),47,见一般博弈(game, general)
博弈的正常区域(normal zone of the),519
博弈的正规型(normalized form),85,100,105,119,183,

234,239,322,325,452,473
机会博弈(of chance),87,185
一人博弈(one-person),85,548
描述一个博弈的分拆(partitions which describe a),67
完备信息(perfect information),112ff.
博弈计划(plan of the),98
博弈的一(多)局(盘)(plays of),49
简化博弈(reduced),248,259,473,543ff.
博弈规则(rules of the),32,49,59,80,113,147,224,
226,227,334,426,472
博弈的集合论描述(set-theoretical description of a),60,67
简单博弈(simple),参见简单博弈(simple game)
博弈的简单化概念(simplified concept of a),48
扩展型中的策略(strategies in the extensive form),111
严格决定的博弈(strictly determined),98ff.,106,124,
150,165,172,174,516
广义严格决定的博弈(strictly determined,generally),150
狭义严格决定的博弈(strictly determined,specially),150
博弈中的争斗(struggle in),125
博弈的叠加(superposition of),254,255
博弈中的惊奇(surprise in),125
对称博弈(symmetric),165,167,192,195,334,362
对称五人博弈(symmetric five-person),332,334
博弈的总体对称性(symmetry,total of),259
三人博弈(three-person),35,220ff.,282ff.,403ff.,457,550
三人简单多数博弈(three-person,simple majority of),222ff.

总体对称博弈(totally symmetric),257
总体不对称博弈(totally unsymmetric),257
惟一博弈(unique),331
空博弈(vacuous),116,546
博弈的值(value of the),102,103,170,516
单调加权多数博弈(weighted majority,homogeneous),444
博弈的零和扩展(zero-sum extension of),529
四人零和博弈(zero-sum four-person),291ff.
n 人零和博弈(zero-sum n-person),48,85,238ff.
三人零和博弈(zero-sum three-person),220 ff.,260ff.
本质三人零和博弈的解(zero-sum three-person, solution of essential),282ff.
二人零和博弈(zero-sum, two-person),48,85ff.,116,169ff.,176
几何(geometry),20,74,76
线性几何(linear),428
七点平面几何(plane,7-point),469
射影几何(projective),469
好的策略[good way(strategy)],103
好的玩法(good way to play),108,159
物品(goods)
互补物品(goods,complementary),437,628
可分物品(divisible),560,573
群(group),22,76,255ff.
交错群(alternating),258
不变群(invariance),257

分配群(of permutations),256
集合可递群(set-transitive),258
对称群(symmetric),256
群论(theory),256,258,295
完全对称群(totally symmetric),257
完全不对称群(totally unsymmetric),257
特权玩家组[group (of players),privileged],320

半空间(half-space),130,137,139
一手牌(hand),53,186,187,190,197,613
离散的若干手牌(hands,discrete),208
热(heat),3,17,21
遗传的(hereditary),454
遗传性(heredity),396,400
启发式的(heuristic),7,25,33,120,238,263,291,296,298,301,302,307,316,318,322,333,499,509,511,587
试探性论述(heuristic argument),147,181,182,227
讲价钱(higgling),557,558
齐性(homogeneity),433,464
超平面(hyperplane),130,137,139
支撑超平面(supporting),134ff.

恒等(identity),255,617
嵌入(imbedding),398,399,400,455,587
分配(imputation),34,37,39,240,251,263,264,350,376,437,517,520,527,566,577,587,606,610

分配的合成(composition of),359
分配的分解(decomposition of),359
独立的分配(detached),369,370,375ff.,413
独立的扩展分配(detached extended),370,375
完全独立的扩展分配(detached extended,fully),370,372
完全独立的分配(detached,fully),369,413
分配的经济概念(economic concept of),435
扩展的分配(extended),364ff.,367,368,369,372
单一分配(single),34,36,37,39,40
惟一分配(unique),608
扩展分配集(imputations,extended,sets of),368
有限分配集(finite set of),465,499
无穷分配集(infinite set of),288,499
分配集之间的统购(isomorphism between),282
分配集(set of),34,44,608
分配的系(system of),36,277,464
不可比的(incomparable),590,630
不可分解性(indecomposability),357,630,631,632
无差异曲线(indifference curves),9,16,19,20,27,29
玩家的无差异(indifference of player),300
间接证明(indirect proof),147
个人计划(individual planning),15
归纳法(induction),112,116
完全归纳法(complete),113,123
有限归纳法(finite),597
超限归纳法(transfinite),598

非本质博弈(inessential games),44
非本质性(inessentiality),249,272,351,357,454
信息(information),47,51,54,55,56,58,67,71,109,112,183
荒谬信息(absurd),67
实际信息(actual),67,79
机会和不完备信息(chance),182
完全信息(complete),30,541,582
不完备信息(imperfect),30,182
不完全信息(incomplete),30,86
信息的模式(pattern of),67,69
完备信息(perfect),51,123,124,164,233
完备信息情况的口头讨论(perfect,verbal discussion),126
玩家的实际信息(player's actual),75
玩家的信息模式(player's pattern of),75
信息集合(sets of),77
裁判的实际信息(umpire's actual),75
裁判的信息模式(umpire's pattern of),75,77
裁判的信息状态(umpire's state of),115
主动权(initiative),189,190
内部三角形(inner triangle),409,413,553
相互影响(interaction),341,366,400,483
国际贸易(international trade),7,341
区间(interval),线性区间(linear),131
非可递性(intransitivity),39,52
逆向信号(inverted signaling),54
非理性的(irrational),128,523

同构对应(isomorphic correspondence),281
同构(isomorphism),149,350,504
同构证明(isomorphism proof),281

应得权益(just dues),360,361

核(kernel),457
扼杀变量(killing the variable),91
克里斯皮尔棋("Kriegsspiel"),58

自由放任(laisser faire),225
洛桑学派的理论("Lausanne" theory),15
线性插值(linear interpolation),157
线性变换(linear transformation),22,23
直线性(linearity),128ff.
利普希茨条件(lipschitz condition),493
逻辑(logic),62,66,74,274
数理逻辑(logistic),66
　数理逻辑学解释(logistic interpretation),66
失败(losing),421,426
损失(loss),33,128,145,163,167,168,205,539,555,559,629

主要条件(main condition),272,274,279
主简单解(main simple solution),参见主简单解(solution, main simple)
主定理(main theorem),153

多数(majorities),加权多数(weighted),432
多数(majority),多数原则(principle of),431
多数博弈(majority game)
齐次多数博弈(homogeneous),443
齐次加权多数博弈(homogeneous weighted),444,463,469
加权多数博弈(weighted),433,464
多数原则(majority principle)
齐次加权多数原则(homogeneous weighted),467,469
行或列的优化(majorization of rows or columns),174,180
映射(mapping),22,618ff.
边际对(marginal pairs),560,562,563,564,571,581
边际效用学派(marginal utility school),7
市场(market),47,504,556,557,560,563,581,605
一般市场(general),583
三人市场(three-person),564
二人市场(two-person),555
质量(mass),20,21
硬币配对(matching pennies),111,143,144,164,156,169,176,178,185
硬币配对的推广形式(generalized forms),175ff.
数学方法(mathematical method)
数学方法的困难(difficulties of),2
经济学中的数学方法(in economics),1—8
数学物理学(mathematical physics),303
矩阵(matrix)
任意矩阵(arbitrary),153

矩阵的对角线(diagonal of),173,174
矩阵元素(elements),93,138,141
负转置矩阵(negative transposed),141,142
矩阵的(rectangular),93,138,140,141
矩阵的方案,矩阵的对角线(scheme,diagonal of the),173
斜对称矩阵(skew symmetric),142,143,167
矩阵运算(max operations),89ff.
最大值(maximum),88,89,591,593,594
绝对最大值(absolute),591,593
最大集体利益(collective benefit),513,514,541,613
最大值问题(problem),10,11,13,42,86,87,220,504,
517,555
相对最大值(relative),592
最大满足(satisfaction),10
可测性(measurability),16,343
测度(measure)
可加测度(additive),343
测度的数学理论(mathematical theory of),252,343
测度(measurement),测度原理(principles of),16,20
力学(mechanics),4
方法(method),数学方法(mathematical),322
方法(method),饱和方法(saturation),446
最小值运算(min operations),89ff.
最小一最大值问题(min-max problem),154
W 的最小元素(minimal elements of W),430,448
最小值(minimum),88,89

错误(mistake),162,164,205
洗牌(mixing the deck),185
模型(models)
公理化模型(axiomatic),74
经济模型(economic),12,58
数学模型(mathematical),21ff.,32,43,74
货币(money),8,10
垄断者(monopolist),474
垄断(monopoly),13,474,543,584,586,602,603
买方垄断(monopsony),584,586,602,603
单调变换(monotone transformations),23
动机(motivation),43
动作(move)
机会动作(chance),50,69,75,80,83,112,118,122,124,126,183,185,190,517,604
动作的消除(removing of),183
哑动作(dummy),127
不可能动作(impossible),72
一个博弈中的动作(in a game),49,55,58,59,72,98,109,111
第一类动作(of the first kind),50
第二类动作(of the second kind),50
个人动作(personal),50,55,70,75,112,122,126,183,185,190,223,508,510

否定(negation),66

谈判(negotiations),263,534,541
新理论(New Theory)
新理论中的特征函数(characteristic function in the),348
新理论中的可分解性(decomposability in the),351
新理论中的占优(dominations in the),350
新理论中的三人本质博弈(essential three-person game in the),403ff.
新理论中的本质博弈(essentiality in the),351
新理论中的分配(imputations in the),350
新理论中的非本质博弈(unessentiality in the),351
新理论中的解(solutions in the),350
正常带(normal zone),396,399,401,417
数字效用(numerical utilities)
数字效用的公理化描述(axiomatic treatment of),24,参见数字效用(utility,numerical)
数字权重(numerical weight),432

进攻(offensive),164,205
寡头(oligopoly),1,13,47,504
利益对立(opposition of interest),11,220,484
最优(optimality)
永久最优(permanent),162,205,参见策略(strategy)
最优状态(optimum),38
最优行为(optimum behavior),34
社会秩序(order of society),41,43,参见组织(organization),行为标准(standard of behavior)

排序(ordering),19,37,38,589
完备排序(complete),19,26,28,589,591,593,595,500,617
半排序(partial),590,591,600
良排序(well),595
山岳形态学(oreographical),95,97
组织(organization),224,328,366,401,419
社会和经济组织(social and economic),41,43,225,318,319,329,358,362,365,402,436,471
组织的社会复杂性(social,complexity of),466
原点[origin (point in space)],129
外源(outside source),363,364,366,375,419
争叫(overbid),186,参见扑克(poker)
利益的一致(parallelism of interests),11,220,221
半排序(partial ordering),590,参见排序(ordering)
参与者(participants),31,33
分拆(partition),60,63,64,66,67,69,84,114ff.
分解(decomposition),353,354,356,357,457,471
鞍(pass),95,97
不叫,放弃(passing),参见扑克(poker)
"佩兴斯"(patience),86
反证法(per absurdum proof),147,148
置换(permutation),255,262,294,309,319
循环置换(cyclic),230,470
扰动(perturbations),303,341
物理科学(physical sciences),21,23,32,43
物理学(physics),2,3,4,45,76,148,401

计划(planning),86
矩形高原(plateau,rectangular),97
貌似合理性分析(plausibility considerations),7
玩一盘(局或次)某种博弈(play),49,59,71
实际博弈(actual),82
博弈进程(course of the),68,70,84
博弈的特性(individual identity of the),71
博弈的结果(outcome of the),82
一盘博弈中的选择序列(sequence of choices),49
一盘博弈的值(value of a),104,105,124,127,150,163,165,178,238
玩家(player)
首要玩家(chief),473,474ff.,481,483,500,502
被隔离的首要玩家(chief,segregated),500,502
合成(composite),231,232,239,516
失败玩家(defeated),418
遭歧视的玩家(discriminated),476,502
被排斥的玩家(excluded),289,301,512
虚玩家(fictitious),505,506,507,508,509,511,513,514,516,518,537
被发现的玩家(found out),145
无差异玩家(indifferent),299
孤立的玩家(isolated),375
特权玩家(privileged),473
被隔离的玩家(segregated),476,502,503
自足玩家(self-contained),353,357

分裂玩家(splitting the),86
无特权玩家(unprivileged),320
胜利玩家(victorious),426
玩家(players)
交换玩家(interchanging the),104,109,122,165,255
玩家置换(permutation of the),294,463
特权玩家组(privileged group of),320,454
可去除的玩家集合(removable sets of),533
玩家的策略(strategies of the),49,参见策略(strategy)
恰当的玩法(playing appropriately),102,103,107,159,167
某种博弈的全部博弈的集合(plays,set of all),75
扑克(poker),52,54,56,58,59,164,168,186,187ff.,557,613
叫牌(bids),209
Draw,187
扑克的一般形式(general forms of),207
好的策略(good strategy),196
解的解释(interpretation of the solutions),218
全部解的数学描述(mathematical description of all solutions),216ff.
盖叫(overbidding),188,190
放弃(passing),188,190,191,199
跟了(seeing),188,190,191,199,218
解(solution),199,202,204
策略(strategies),191
Stud,187
位置(position),21

正卦限(positive octant),133
正象限(positive quadrant),133
公设(postulates),27,参见公理(axioms)
偏好(preferences),15,17,18,23,522,590,607,630
偏好的完备性(completeness of),29,530,631
偏好的可递性(transitivity of),27,参见效用(utility)
预备(preliminarity),51,52,77,78,112,117,124
起始条件(preliminary condition),273,471
溢价(premiums),582
价格(price),556,559,562,563,564,571,572,582,595
平均价格(average),564,582
惟一价格(unique)564
特权(privilege),464
概率(probabilities)
概率的选择(choice of),145
概率(probability),11,17,19,39,81,87,128,146,197
几何概率(geometrical),197
数字概率(numerical),14,19,27,28,69,75,80,113,145,147,156,183,604
失败的概率(of losing),144
胜利的概率(of winning),144
生产(production),5,13,504
生产力(productivity),33,34,504,540
利润(profit),33,47,572
真子集(proper subset),61
真超集(proper superset),61

心理现象(psychological phenomena)
心理现象的数学描述(mathematical treatment),28,77,169

量子力学(quantum mechanics),3,33,148,401

随机性(randomness),146
理性的(rational),9,517
理性行为(behavior),8—15,31,33,127,150,160,224,225
理性博弈(playing),54
理性(rationality),99,128
折扣(rebates),582
重新签约(recontracting),557,558
简化型(reduced form),248,544
简化(reduction),322,325
相对论(Relativity Theory),23,148
可去除集(removable set),参见可去除集(set,removable)
环(ring),243,530,531
风险(risk),163
鲁滨孙·克鲁索(Robinson Crusoe),参见克鲁索(Crusoe)
掷骰子(rolling dice),166
轮盘赌(roulette),87
一个矩阵的行(row of a matrix),14,93,参见矩阵(matrix)

鞍(saddle),95,97
鞍点(points),93,95,110,153
鞍点值(value),88,95,107

圣彼得堡问题(St. Petersburg Problem),28,83
满足(satisfaction)
 最大满足(maximum),8,10,15
满足(satisfactoriness),267ff.,446ff.
 最大满足(maximal),269
饱和(saturation),266,267ff.,446ff.,448,591
数量乘法(scalar multiplication),129,253,254
跟了(seeing),参见扑克(poker)
隔离(segregation),290
卖者(seller),555,557,565,569,572,574,581,583,585,609,610
被隔离的数(separated numbers),173
集合(set),60,61,114ff.
 肯定必要集(certainly necessary),273,274,277,308,309,323,405,430,471,547
 肯定不必要集(certainly unnecessary),273,274,276,308,309,323,405,430,471,547
 完备排序集(completely ordered),19
 凸集(convex),131,133
 凸生成集(convex spanned),131
 有效集(effective),38,264
 集合的元素(elements of),61
 空集(empty),61,241,380
 有限集(finite),61
 平集(flat),275,276,423,424
 不减数集(minuend),62

一元集(one-element),61
半排序集(partially ordered),19
可去除集(removable),533,534,535
一元集(solo),参见单人集(solo set)
裂集(splitting),353,457,518
最小裂集(splitting minimal),355,356
全部裂集的系(splitting,system,of all),354
减数集(subtrahend),62
集论(theory),45,60ff.
集合(sets)
集合的差(difference of),62
不相交集(disjunct),62
集合的交(intersection of),62
集合的逻辑学解释(logistic interpretation),66
分配集(of imputations),分配集的合成(composition of),359
分配集的分解(of imputations,decomposition of),359
两两不相交集(pairwise disjunct),62
集合的交(积)(product of),62,66
自足集(self-contained),354
集合的并(和)(sum of),62,66
集合的系或聚合(systems or aggregates of),61
信号传递(signaling),51,53
直接信号传递(direct),54
反向信号传递(inverted),54
简单博弈(simple game),420ff.,454,605
给简单博弈添加哑玩家(adding dummies to),462

简单博弈和分解(and decomposition),452
简单博弈的特征函数(characteristic function),427
简单博弈的特征化描述(characterization of the),423
简单博弈中的补偿(complementation in),422ff.
全部简单博弈的枚举(enumeration of all),445ff.
$n\geqq4$ 的简单博弈(for $n\geqq4$),461
$n\geqq6$ 的简单博弈(for $n\geqq6$),463
n 较小的简单博弈(for small n),457
不可分解的简单博弈(indecomposable),457
简单博弈中的一元集(one-element sets in the),425ff.
六个主要反例(six main counter-examples),464
简单博弈的解(solution of),430
策略等价的简单博弈(strategic equivalence),428
简单博弈的系 W,L(systems W,L,of),426ff.
有哑玩家的简单博弈(with dummies),461
博弈的简单性(simplicity),433,452,454
简单博弈的基本性质(elementary properties of),428
简单博弈的严格定义(exact definition of),428
斜对称性(skew-symmetry),166
社会交换经济(social exchange economy),9ff.
社会秩序(social order),365
社会组织(social organizations),参见组织(organizations)
社会产品(social product),46
社会结构(social structure),484
社会(society),42,320,341,523,540
单人纸牌戏(solitaire),86

单人集(solo set),244,530,531
解(solution),102,264,350,367,368,417,478,526,527,587,588
解中的区域(二维部分)[areas(two-dimensional parts) in the],418
非对称解(asymmetric),315,362
解的合成(composition of),361
解的概念(concept of a),36
解的构造中的分配概念(concept of imputation in forming),435
解中的曲线(一维部分)[curves(one-dimensional parts) in the],417
可分解的解(decomposable),362
解的分解(decomposition),361
解的定义(definition),39,264
有歧视的解(discriminatory),301,307,318,320,329,442,511,512
三人本质零和博弈(essential zero-sum three-person game),282
解的存在性(existence of),42
解的概念扩展(extension of the concept of),587
解族(families of),329,603
有限解(finite),307,500
有限分配集解(finite sets of imputations),328
一个非循环关系的解(for an acyclic relation),597
一个完备排序的解(for a complete ordering),591

$E(e_0)$中Γ的解[for Γ in $E(e_0)$],393ff.
$F(e_0)$中Γ的解[for Γ in $F(e_0)$],384ff.
一个半排序的解(for a partial ordering),592
一个对称关系的解(for a symmetric relation),591
$n\geqq3$的全部博弈的解(general games with $n\geqq3$,of all),548
一般三人博弈的解(general three-person game),551
不可分解的解(indecomposable),362
有歧视的解[inobjective(discriminatory)],290
主简单解(main simple),444,464,467,469
解的多样性(multiplicity of),266,288
自然解(natural),465
解的新定义(new definition of),526
无歧视的解(non-discriminatory),290,475,511
无歧视的解[objective(non-discriminatory)],290
一元解(one-element),277,280
全部解的集合(set of all),44
超数字解(super-numerary),288
对称解(symmetric),315
惟一解(unique),594,600,601,603
不对称中心解(unsymmetrical central),319
可靠性(soundness),265
空间(space)
欧几里得空间(Euclidean),21,128,129
半空间(half),137
线性空间(linear),157
n维空间(n-dimensional linear),128

正向量(positive vector),254
特殊依赖形式(special form of dependence),56
分裂个性(splitting the personality),53
稳定性(stability),36,261,263,266,365
内稳定性(inner),42,43,265
行为标准(standard of behavior),31,40,41,42,44,265,
266,271,289,351,355,401,418,472,478,501,512,513
有歧视的行为标准(discriminatory),290
(稳定的或公认的)行为标准的多样性[multiplicity(of stable,or accepted)],42,44,417
无歧视行为标准(non-discriminatory),290
静态(statics),44,45,147,189,290
统计学(statistics),10,12,14,144
“石头、剪子、布”(stone,paper,scissors),111,143,144,
164,185
停止规则(stop rule),59,60
策略等价(strategic equivalence),245,247,248,272,281,
346,348,373,426,429,472,505,535,543
策略同构(isomorphism of),504,505
策略(strategies),44,50,79,80,84,101,117,119
策略组合(combination of),159
策略(strategy)
作为动作的策略(as move),84
渐近策略(asymptotic),210
整体最优策略(best),124,517
策略选择(choice of),82,145,147

策略的概念(concept of a),79
被发现的策略(found out),151,153,158,160,168
好的策略,良策(good),108,146,160ff.,161,162,164,170,172,178,179,183,196,205,206
高阶策略(higher order of a),84
混合策略(mixed),143ff.,146,148,149,155,157,161,168,174,183,192,232,539,604
最优策略(optimal),127,517
永久最优策略(permanently optimal),163,164,165
纯策略(pure),146,148,155,157,161,168,181,182
统计策略(statistical),144,146
严格策略(strict),146
策略的连续结构(structure,continuous),197
策略的精细结构(structure,fine),197
策略的颗粒结构(structure,granular),197
严格决定性(strict determinateness),参见决定性(determinateness)
争斗(struggle),249
子分拆(subpartition),63,64,69
子集(subset),61
替代率(substitution rate),465
占优(superiority),占优的可递性概念(intransitive notion of),37
叠加(superposition),64
超集(superset),61
对称性(symmetry),104,109,165,166,190,224,255,256,

258,267,315,446ff.,500,591,参见群(group)

套套逻辑的(tautological),8,40
温度(temperature),17,21
理论(theory),扩展的理论(extended)
理论的结构(structure of the),368
新理论(Theory,New),526,528,参见新理论(New Theory)
热力学(thermodynamics),23
检温学(thermometry),22
平局(tie),125,315
拓扑(topology),154,384
总值(total value),251
转移(transfer),30,364,365,401,402
效用的可转移性(transferability of utility),8,608
超限归纳法(transfinite induction),269
变换(transformation),22,23
可递性(transitivity),38,39,61,589,590
树图(trees),66,67
贡金(tribute),30,402
拔河(tug-of-war),100

裁判(umpire),69,72,84
不确定性(uncertainty),35
谅解(understandings),223,224,237
效用(utilities)
效用的可比性(comparability of),29

效用的完备排序(complete ordering of the),19,26,29,604,617ff.
效用无差异(differences of),18,631
效用的域(domain of),23,607
不可加的效用(nonadditive),250
非数字效用(non-numerical),16,606,607
数字效用(numerical),17ff.,157,605,606,617ff.
数字效用,可替代性(numerical,substitutability),604
半排序效用(partially ordered),19,590
效用的系(system of),26
效用的可转移性(transferability),8,604,606,608,620
可变效用(variable),560
效用(utility),8,15,23,33,47,83,156,556,563,565,569,572,573,583,585,603,608,616,617ff.
效用的公理化描述(axiomatic treatment),26ff.,617ff.
递减效用(decreasing),561,576
离散效用(discrete),613
期望效用(expected),30
效用概念的推广(generalization of the concept of),603ff.
效用的不可分单位(indivisible units),609,613,614
边际效用(marginal),29,30,31
效用刻度(scale),效用刻度的精细度(fineness of),616
总效用(total),34,35

值(value)
经济价值(economic),252,467,556,565

函数值(of a function),88
一局博弈的值(of a play),参见博弈(play)
变量(variables),12,13,88
变量的综合(aggregate of),239
"陌生的"变量("alien"),11
部分变量集(partial sets of),12ff.
向量(vector),129,140
向量相加(addition),130,253,254
分量(components),129,140
坐标(coordinate),129,157
向量之间的距离(distance),134
向量的长度(length),134
向量运算(operations),129
拟分量(quasi-components),404
向量空间(spaces),254
零向量(zero),129
实际起作用的存在(virtual existence),36,45,338,484

需要(wants),10
波动力学(wave mechanics),148
权重(weights),433,434,463
齐次权重(homogeneous),435,444
谁发现谁(who finds out whom),110
胜利(winning),296,421,426
肯定胜利(certainly),440
完全胜利(fully),436

取回(withdrawal),364,366

特征函数的零简化型(zero-reduced form of characteristic function),545

零和条件(zero-sum condition),345

Γ的零和扩展(zero-sum extension of Γ),505,506,527,531,538

零和约束(zero-sum restriction),84,504

译 者 后 记

一、关于博弈论

经济学在20世纪经历了两场革命:一场是20世纪上半叶的“边际革命”;另一场则是最近30年渐成态势的“博弈论革命”。著名经济学家保罗·萨缪尔森曾经说过:“要想在现代社会做一个有文化的人,必须对博弈论有一个大致的了解。”

博弈论是使用严谨的数学模型,研究冲突对抗条件下最优决策问题的理论。博弈论认为:人是理性的,在策略选择时每个人都会追求约束条件下的利益最大化;同时,人们的行为又是互相影响的。当你考虑怎样击打一块石头时,不必考虑那块石头对你行动的反应;而当你下棋时,就不得不考虑你的对手方会对你的选择做出什么反应。社会经济活动就如下棋一样。也就是说,在任何交易中,你做选择时必须考虑到其他人的选择;而其他人做选择时也要考虑你的选择。你的行为结果不仅取决于你的策略选择,也取决于他人的策略选择,这样,你与你的对手方就

构成了一个博弈。只要涉及到人群的互动就有博弈，博弈论研究的就是在互动条件下人们的最优策略选择问题。

博弈论最重要的贡献是它促进了人类思维的发展，增进了人类的相互了解与合作，由此它成了理解人类经济行为的方法论基础。博弈论主要是一种研究方法，这种方法已经在许多学科当中得到了应用，这些学科至少包括经济学、社会学、政治学、伦理学、生物学和军事科学等。

博弈论主要是由约翰·冯·诺伊曼(John von Neumann，1903—1957年)创立的。冯·诺伊曼是一位出生于匈牙利的美国数学家。尽管在20世纪初，塞梅鲁(Zermelo)和鲍罗(Borel)就已经开始研究博弈的数学表达问题，但一直到1939年，冯·诺伊曼遇到经济学家奥斯卡·摩根斯顿(Oskar Morgenstern，1902—1977年)之后，才使博弈论进入经济学的广阔领域。

1944年，冯·诺伊曼与奥斯卡·摩根斯顿合著的巨作《博弈论与经济行为》出版，标志着博弈理论正式形成。冯·诺伊曼和摩根斯顿在《博弈论与经济行为》一书中所建立的合作型博弈模型，奠定了这门学科的基础。合作型博弈研究在20世纪50年代达到了巅峰。然而，由于合作型博弈过于抽象，其应用范围受到了限制。正是在这个时候，非合作型博弈模型出现了，它标志着人们对博弈理论的研究进入了一个新阶段。

1950年和1951年，数学家纳什(John Nash)的两篇开创性论文《n人博弈的均衡点》和《非合作博弈》改变了人们对竞争和市场的看法，证明了非合作型博弈及其

均衡解的存在，这就是著名的“纳什均衡”。“纳什均衡”揭示了博弈均衡与经济均衡之间的内在联系，奠定了现代非合作型博弈理论的基石，后来的博弈论研究基本上都是沿着这条主线展开的。“纳什均衡”是一种策略组合，即给定对手方一定的策略之后，每个参与者都会选择自己的最优策略。也就是说，“纳什均衡”是一种僵局，只要博弈参与者的策略一经决定，任何人都不会有激励偏离这一均衡。经济学中的完全竞争均衡，就是“纳什均衡”，因为买卖双方都是按照既定的价格进行交易量的选择，结果导致了零利润。

后来，塞尔顿(Reinhard Selten)发展了“纳什均衡”概念，定义了完全信息动态博弈的“子博弈完备纳什均衡”(1965年)，并进一步描述了不完全信息动态博弈的“完备贝叶斯—纳什均衡”(1975年)。哈尔萨尼(John C. Harsanyi)则发展了不完全信息静态博弈的“贝叶斯—纳什均衡”(1967—1968年)。塞尔顿和哈尔萨尼共同将“纳什均衡”动态化，并增加了不完全信息条件。1994年10月11日，瑞典皇家科学院宣布，由于纳什博士对非合作博弈理论中的均衡问题进行了开创性分析，他与塞尔顿教授和哈尔萨尼教授分享了该年度的诺贝尔经济学奖。

除了上述三位博弈论专家共同获得1994年诺贝尔经济学奖以外，1985年诺贝尔经济学奖的获得者布坎南(公共选择学派)和1995年诺贝尔经济学奖的获得者卢卡斯(理性预期学派)的理论与博弈论都有着十分密切的联系。现在博弈论已经渗透到包括经济学在内的众多研究领域，正在深刻地改变着人类的思维方式和人们的交易行为。

二、关于"囚徒困境"

"囚徒困境"是博弈论的一个经典案例，确切地说，是一个非合作型博弈的典型案例。

1950年，美国数学家塔克（Albert W. Tucker）在斯坦福大学担任客座教授，为了更通俗地向学生讲解博弈理论，他用两个囚犯的故事，对博弈问题进行了形象化的处理和表述，结果取得了巨大成功。借助于这个故事，博弈理论为更多的人们所理解。

塔克的故事是从一桩凶杀偷盗案开始的。一位富翁在家中被杀，财物被盗。警方在此案的侦破过程中，抓到犯罪嫌疑人斯卡尔菲丝和那库尔斯，并从他们的住处搜出了被害人家中被盗的财物。但是，斯卡尔菲丝和那库尔斯都矢口否认曾经杀人，辩称只是在发现富翁被杀后，顺手牵羊偷了点东西而已。于是警方将斯卡尔菲丝与那库尔斯隔离开来，分别关在不同的房间进行审讯，检察官分别与他们单独谈话。检察官说："由于你们的偷盗罪已有确凿的证据，完全可以给你们判刑1年。但是，我可以和你做个交易：如果你单独坦白杀人的罪行，我只判你3个月的监禁，而你的同伙则要被判刑10年；如果你拒不坦白，而被同伙检举，那么你就将被判刑10年，而他只判3个月监禁；如果你们两人都坦白交代，那么，你们都将被判刑5年。"在这种情况下，斯卡尔菲丝和那库尔斯面对的是一个"坦白"还是"抵赖"的策略

选择。

非常明显，此时最好的策略选择是双方都选择“抵赖”（合作博弈），结果是大家都只被判刑1年。但是，由于斯卡尔菲丝和那库尔斯处于完全隔离状态，他们难以串供（无法合作），于是，“坦白”（非合作博弈）取代“抵赖”变成最优策略选择：因为一个人选择“坦白”可能仅被监禁3个月（另一个人可能选择“抵赖”）；选择“抵赖”则有可能坐牢10年（另一个人可能选择“坦白”）。也就是说，在非合作博弈的情况下，双方都会选择“坦白”作为自己的最优策略：如果对方选择了“抵赖”，自己就可以仅被判3个月的监禁；如果对方也选择了“坦白”，自己至多被判刑5年而不是10年。结果，斯卡尔菲丝和那库尔斯都选择了“坦白”策略和被判刑5年的结果，放弃了原本对双方都更为有利的“抵赖”策略和被判刑1年的结果。

这样一个在非合作博弈情况下，由于斯卡尔菲丝和那库尔斯都选择了“坦白”策略而被判刑5年的结局被称为“纳什均衡”，也叫非合作型均衡。

三、关于冯·诺伊曼

我希望通过这本书，通过我们的翻译工作，使中国认识或重新认识约翰·冯·诺伊曼。他实在不应该被我们遗忘，而偏偏又被我们遗忘得太久了。

其实，不仅中国，整个世界对冯·诺伊曼的忽视都太

久了。尽管全世界都将冯·诺伊曼称为计算机之父,尽管现代许多学科都能在自己的领域内发现冯·诺伊曼的杰出贡献,但他却没有像爱因斯坦和霍金那样广为人知。正如丹佛大学科技史教授瑞波斯·迪尔所说的:“我们对冯·诺伊曼的了解,远不及他所贡献的一半。”

冯·诺伊曼是20世纪最伟大的数学家之一,他在遍历理论、拓扑群理论等方面进行了开创性研究,算子代数甚至被命名为冯·诺伊曼代数。物理学界也把冯·诺伊曼归入20世纪最杰出物理学家的行列,他在20世纪30年代撰写的《量子力学的数学基础》,成为原子物理学发展的里程碑。伦理学家们则认为冯·诺伊曼为他们提供了用来分析和解释社会伦理行为的最有用的工具。冯·诺伊曼还曾设计过一项用计算机预报天气的系统,成为今天气象数值预报的先驱。他还从计算机的角度研究人类思维,开创了人工智能研究新领域。更令人感到不可思议的是,他在半个世纪前就曾预言了电脑病毒的出现。

冯·诺伊曼是一位真正的博学者,一位真正的天才。他满怀激情地投身于那些可以使用抽象数学作为分析工具的所有领域,并且取得了众多研究成果,这些成果至今仍照耀着世界学术界和科技界的天空。从遍历定理的证明到控制天气的方法,从原子弹的聚爆装置到博弈论,从一种用于研究量子物理的数学理论到带有预先储存程序的计算机装配,到处都可以看到他的天才在闪光。在他发表的150篇论文中,60多篇研究的是理论数学,20多篇研究的是物理学,另外60多篇研究的是应用数学,包括统计

学和博弈论。

四、关于本书的翻译

当我是一个大学生时成为《读书》的读者；当我读到研究生时成为《读书》的作者，并因此认识《读书》的编辑贾宝兰女士。宝兰有着与《读书》一样温文的风格，她像《读书》一样成为我的朋友。

2002 年深秋，宝兰把一本厚厚的英文书放在我的面前，希望我能翻译它。当时我工作非常忙，身心疲惫，无暇他顾，几次婉言谢绝。是宝兰的真诚和执着感动了我，最后，我接过了这本名为《博弈论与经济行为》的学术名著。

我知道这本书是由一位数学家与一位经济学家共同完成的。我是学经济学的，自知数学功力不够深厚，所以，签下翻译合同后，我想做的第一件事就是找一位学数学的人作为合作者。我想起的第一个人就是王文玉教授。王文玉教授是一个精通经济学的数学家，或者说是一个精通数学的经济学家。20 年前，他从数学系毕业，此后一直在经济学院讲授宏观经济学和微观经济学，既有深厚的数学功底，又有良好的经济学修养，应该是翻译这本书的最好合作者。事实证明，我的选择是正确的。

我翻译过不少书，这本书是译得最苦、最累的一本。不是翻译本身的困难，而是这本书的翻译合同期（2002 年深秋到 2004 年初春）正值人民币面临巨大升值压力的时

期。由于我在中国人民银行货币政策司汇率处工作，所以也是我工作任务最重、工作压力最大的时期。在那段时间里，我每天都在超负荷工作，每天晚上都是加班到深夜，几乎没有星期天和节假日。这本书的全部翻译工作都是在非连续地积累起来的深夜时间（晚上 10 点—12 点）里完成的。

我很喜欢音乐，但不喜欢那些昂贵、豪华的音响设备，多年来我一直用一个老式录音机和老式磁带听音乐。下班后，打开录音机听一段柴可夫斯基，是我一天中换换脑子、放松心情的最好消遣。一个我非常敬重的朋友，帮我翻录了一套十盒包括柴可夫斯基在内的欧洲古典音乐。每天深夜，当我拖着疲惫的身躯回到家中时，总要打开这个老式录音机，听一段柴可夫斯基。然而，这本书的翻译工作开始后，我很快进入了工作状态，走入了冯·诺伊曼的学术世界。

深夜，当我坐在书桌前扭亮台灯、打开书时，冯·诺伊曼的思想就会通过文字像柴可夫斯基的音乐一样响起，慢慢地流淌进我的心底。此时，我会忘掉白天的忙碌、疲劳、烦恼和无奈，而由衷地感到生活是如此美好，生命是如此美丽。

我愿用这本译著纪念那段艰难的日子。

王　宇

2004 年 4 月 8 日于北京康乐里

20世纪经济学经典译丛

← 博弈论与经济行为 Ⅰ

Theory of Games and Economic Behavior

ISBN 7-108-02152-8

9 787108 021526 >

ISBN 7-108-02152-8 定价：50.00元(上、下册)