几何与相对论

于 品　　清华大学数学系及丘成桐数学科学中心

- 几何的英文是"geometry"，它来自于希腊语 $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$，其中"geo"≈“地球”或者“土地”，"metry"≈“测量”或者“丈量”。

- 几何的英文是"geometry"，它来自于希腊语 $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$，其中"geo"≈“地球”或者“土地”，"metry"≈“测量”或者“丈量”。
- 明末徐光启译之为“几何”。

- 几何的英文是"geometry"，它来自于希腊语 $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho i\alpha$，其中"geo"≈“地球”或者“土地”，"metry"≈“测量”或者“丈量”。
- 明末徐光启译之为“几何”。
- 近代数学中“几何”的含义更加广泛深刻，它囊括了更多的对象，比如说数学家会将整数集想象成某种几何对象来研究数论，再比如说我们可以将教室里的空气赋予某种几何结构来研究声音的传播。

- 几何的英文是"geometry"，它来自于希腊语 $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho i\alpha$，其中"geo"≈“地球”或者“土地”，"metry"≈“测量”或者“丈量”。
- 明末徐光启译之为“几何”。
- 近代数学中“几何”的含义更加广泛深刻，它囊括了更多的对象，比如说数学家会将整数集想象成某种几何对象来研究数论，再比如说我们可以将教室里的空气赋予某种几何结构来研究声音的传播。
- 然而，按照几何的词义来看，它的初衷是进行测量。我们下面就从历史谈起。

- 古希腊的 Euclid（约公元前 325-265）是对几何学发展影响最深远的人之一。

- 古希腊的 Euclid（约公元前 325-265）是对几何学发展影响最深远的人之一。
- 他生活的年代在中国是战国时期，325 年赵武灵王元年，260 年长平之战。

- 古希腊的 Euclid（约公元前 325-265）是对几何学发展影响最深远的人之一。
- 他生活的年代在中国是战国时期，325 年赵武灵王元年，260 年长平之战。
- Archimedes (公元前 287- 212) 在自己的著作中经常把 Euclid 称作是 $\dot{o}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\omega\tau\eta\zeta$，意思的“原本的作者”。

- 古希腊的 Euclid（约公元前 325-265）是对几何学发展影响最深远的人之一。
- 他生活的年代在中国是战国时期，325 年赵武灵王元年，260 年长平之战。
- Archimedes (公元前 287- 212) 在自己的著作中经常把 Euclid 称作是 $\dot{o}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\omega\tau\eta\zeta$，意思的 “原本的作者”。
- Euclid 的几何原本共有 13 卷，研究平面图形的面积长度和关联关系，以基本的公理为起点，只依赖公理或者已经证明的定理，通过演绎推理，证明和计算关于平面上图形的定理和性质。

- 古希腊的 Euclid（约公元前 325-265）是对几何学发展影响最深远的人之一。
- 他生活的年代在中国是战国时期，325 年赵武灵王元年，260 年长平之战。
- Archimedes (公元前 287- 212) 在自己的著作中经常把 Euclid 称作是 $\dot{o}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\omega\tau\eta\zeta$，意思的“原本的作者”。
- Euclid 的几何原本共有 13 卷，研究平面图形的面积长度和关联关系，以基本的公理为起点，只依赖公理或者已经证明的定理，通过演绎推理，证明和计算关于平面上图形的定理和性质。
- 中国的第一版的几何原本是徐光启翻译的（前六卷），1607 年（万历 35 年）在北京出版。

- 几何原本研究的内容非常丰富，量化的计算占有很大的比例，也系统的研究了几何构型的相对关系，比如，各类曲线或者直线的相交情况等。

- 几何原本研究的内容非常丰富，量化的计算占有很大的比例，也系统的研究了几何构型的相对关系，比如，各类曲线或者直线的相交情况等。
- 后世对几何原本推崇备至，主要是因为 Euclid 倡导的公理化方法：他从公理和定义出发，先证明第一个命题，再证明第二个命题，每一步只依赖于之前的推导，结构严谨，逻辑严密。

- 几何原本研究的内容非常丰富，量化的计算占有很大的比例，也系统的研究了几何构型的相对关系，比如，各类曲线或者直线的相交情况等。
- 后世对几何原本推崇备至，主要是因为 Euclid 倡导的公理化方法：他从公理和定义出发，先证明第一个命题，再证明第二个命题，每一步只依赖于之前的推导，结构严谨，逻辑严密。
- 几何原本实际上对整个近代科学在方法和思想上的塑造功不可没：我们愿意相信公理化的方法是最客观的。

- Euclid 的几何学在古希腊很快产生了影响。

- Euclid 的几何学在古希腊很快产生了影响。
- 相传 Euclid 曾在 Plato 学院学习，该学院的大门之上高悬“不懂几何者勿进（Let no one ignorant of geometry enter）”

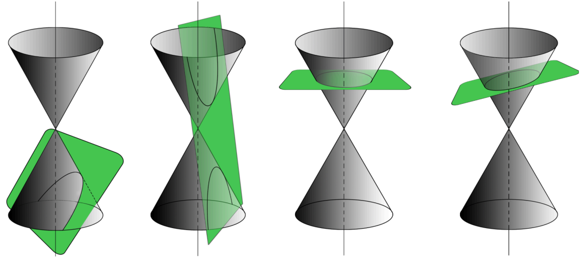
- Euclid 的几何学在古希腊很快产生了影响。
- 相传 Euclid 曾在 Plato 学院学习，该学院的大门之上高悬“不懂几何者勿进（Let no one ignorant of geometry enter）”
- Ptolemy 一世 (the savior) 曾问 Euclid 是否有捷径可不读其原本而理解几何学，Euclid 回答“学无坦途 (There is no royal road to geometry)”

- Euclid 的几何学在古希腊很快产生了影响。
- 相传 Euclid 曾在 Plato 学院学习，该学院的大门之上高悬“不懂几何者勿进（Let no one ignorant of geometry enter）”
- Ptolemy 一世 (the savior) 曾问 Euclid 是否有捷径可不读其原本而理解几何学，Euclid 回答“学无坦途 (There is no royal road to geometry)”
- Apollonius 进一步发展了 Euclid 和 Archimedes 的理论，特别地，他研究了圆锥曲线的性质。

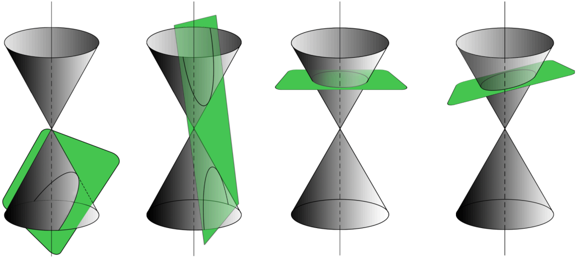
- Apollonius 生于公元前 262，死于公元前 190。

- Apollonius 生于公元前 262，死于公元前 190。
- 190 年是汉惠帝时期，262 年是长平之战的开始。

- Apollonius 生于公元前 262，死于公元前 190。
- 190 年是汉惠帝时期，262 年是长平之战的开始。
- Apollonius 的著作详细的研究了用一个平面和一个锥面和相截得到的曲线：



- Apollonius 生于公元前 262，死于公元前 190。
- 190 年是汉惠帝时期，262 年是长平之战的开始。
- Apollonius 的著作详细的研究了用一个平面和一个锥面和相截得到的曲线：



- 在 Apollonius 的一生中，Halley 彗星出现过一次（秦始皇七年，即公元前 240 年），那个时候没有人知道 Apollonius 的几何学已经可以描述彗星的轨道（更没有人知道 Apollonius 的锥面和相对论之间的关联）。

地球周长的测量

- Eratosthenes（公元前 275 – 193）是古希腊时代一位重要的数学家和天文学家，他也是 Archimedes 的好朋友。

地球周长的测量

- Eratosthenes（公元前 275 – 193）是古希腊时代一位重要的数学家和天文学家，他也是 Archimedes 的好朋友。
- 他知道在一年之中白天最长的那天（夏至）正午，太阳光直射入 Aswan 城内的一口深井中并在井底的水上反映出太阳的倒影（所以太阳正好在 Aswan 天顶的位置）。

地球周长的测量

- Eratosthenes（公元前 275 – 193）是古希腊时代一位重要的数学家和天文学家，他也是 Archimedes 的好朋友。
- 他知道在一年之中白天最长的那天（夏至）正午，太阳光直射入 Aswan 城内的一口深井中并在井底的水上反映出太阳的倒影（所以太阳正好在 Aswan 天顶的位置）。
- 他在某个夏至正午，测量了 Alexandria 城一个方尖石塔影子的长度，据此算出了此时太阳在 Alexandria 天顶以南 7°。

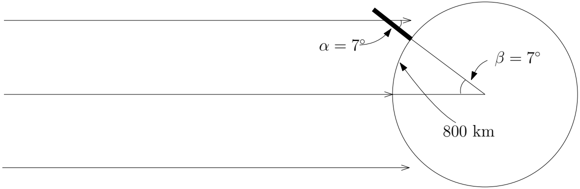
地球周长的测量

- Eratosthenes（公元前 275 – 193）是古希腊时代一位重要的数学家和天文学家，他也是 Archimedes 的好朋友。
- 他知道在一年之中白天最长的那天（夏至）正午，太阳光直射入 Aswan 城内的一口深井中并在井底的水上反映出太阳的倒影（所以太阳正好在 Aswan 天顶的位置）。
- 他在某个夏至正午，测量了 Alexandria 城一个方尖石塔影子的长度，据此算出了此时太阳在 Alexandria 天顶以南 7°。
- 他认为地球表面应该是一个球面并且他的家乡 Alexandria 港在 Aswan 的正北方（偏西一个经度）。

地球周长的测量

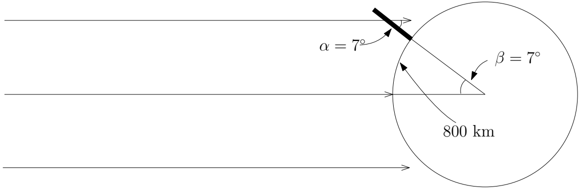
- Eratosthenes（公元前 275 – 193）是古希腊时代一位重要的数学家和天文学家，他也是 Archimedes 的好朋友。
- 他知道在一年之中白天最长的那天（夏至）正午，太阳光直射入 Aswan 城内的一口深井中并在井底的水上反映出太阳的倒影（所以太阳正好在 Aswan 天顶的位置）。
- 他在某个夏至正午，测量了 Alexandria 城一个方尖石塔影子的长度，据此算出了此时太阳在 Alexandria 天顶以南 7°。
- 他认为地球表面应该是一个球面并且他的家乡 Alexandria 港在 Aswan 的正北方（偏西一个经度）。
- 通过远行的商队，他得知 Aswan 和 Alexandria 之间的距离大约是 800 公里。

- 两个基本假设：1）地球是圆的 2）光线沿着直线传播



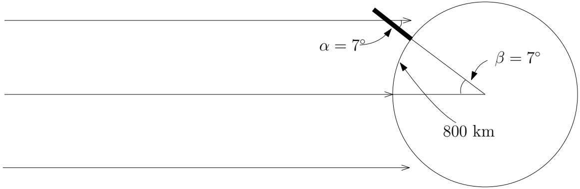
- Eratosthenes 测出夹角大约为 7 度（$7 \div 360 \approx \frac{1}{50}$）

- 两个基本假设：1）地球是圆的 2）光线沿着直线传播



- Eratosthenes 测出夹角大约为 7 度（$7 \div 360 \approx \frac{1}{50}$）
- 平行线和相似形理论 $\Rightarrow$ 地球的周长约为 $800 \times 50 = 40000$ 公里!

- 两个基本假设：1）地球是圆的 2）光线沿着直线传播



- Eratosthenes 测出夹角大约为 7 度（$7 \div 360 \approx \frac{1}{50}$）
- 平行线和相似形理论 $\Rightarrow$ 地球的周长约为 $800 \times 50 = 40000$ 公里!
- 必须要提到的题外话是，Eratosthenes 还发明了筛法。

- Eratosthenes 对地球周长的测量是一个里程碑式的贡献。

- Eratosthenes 对地球周长的测量是一个里程碑式的贡献。
- 一方面，这是几何学最重要的实际应用之一。

- Eratosthenes 对地球周长的测量是一个里程碑式的贡献。
- 一方面，这是几何学最重要的实际应用之一。
- 另一方面，Eratosthenes 的测量是（相对）小范围的，通过几何的计算得到了大范围的结果，这启发了人们用几何作为探索世界的基本模式。

以小见大，见一叶落而知岁之将暮 – – 淮南子 · 说山训

- Eratosthenes 对地球周长的测量是一个里程碑式的贡献。
- 一方面，这是几何学最重要的实际应用之一。
- 另一方面，Eratosthenes 的测量是（相对）小范围的，通过几何的计算得到了大范围的结果，这启发了人们用几何作为探索世界的基本模式。

以小见大，见一叶落而知岁之将暮 – – 淮南子 · 说山训

- 我们会看到后来的 Newton，Einstein，Hawking，Penrose 等等都是靠着一支笔，壮志雄心，想要用几行公式和一个笔记本装下整个宇宙。

再次提一下 Archimedes 和 Apollonius。

再次提一下 Archimedes 和 Apollonius。

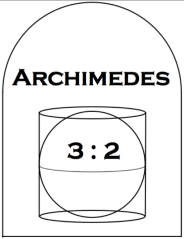
- Apollonius 有八卷研究圆锥曲线的书，是后来解析几何和代数几何的前身。他的著作中包含了很多萌芽的想法在 2000 年后今天的科学著作中都经常出现，比如黑洞形成的机制和他关于圆锥曲线法线丛的聚点轨迹的计算大有关联。

再次提一下 Archimedes 和 Apollonius。

- Apollonius 有八卷研究圆锥曲线的书，是后来解析几何和代数几何的前身。他的著作中包含了很多萌芽的想法在 2000 年后今天的科学著作中都经常出现，比如黑洞形成的机制和他关于圆锥曲线法线丛的聚点轨迹的计算大有关联。
- Archimedes 的时代要略早于 Apollonius，他已经能够计算抛物线与一条直线所包围的图形的面积，这在微积分出现之前是无可比拟的。

再次提一下 Archimedes 和 Apollonius。

- Apollonius 有八卷研究圆锥曲线的书，是后来解析几何和代数几何的前身。他的著作中包含了很多萌芽的想法在 2000 年后今天的科学著作中都经常出现，比如黑洞形成的机制和他关于圆锥曲线法线丛的聚点轨迹的计算大有关联。
- Archimedes 的时代要略早于 Apollonius，他已经能够计算抛物线与一条直线所包围的图形的面积，这在微积分出现之前是无可比拟的。



在 Euclid 之后一千多年的时间里，几何学并没有太多突破性的进展（转机出现在 17 世纪微积分发明之后）。

在 Euclid 之后一千多年的时间里，几何学并没有太多突破性的进展（转机出现在 17 世纪微积分发明之后）。如果用最简单的语言来概括，这段时间几何发展的原动力有两个：

- 第一（应用角度），几何图形的长度或者面积的计算。Newton 的微积分理论是这一枝上最完美的果实。

在 Euclid 之后一千多年的时间里，几何学并没有太多突破性的进展（转机出现在 17 世纪微积分发明之后）。如果用最简单的语言来概括，这段时间几何发展的原动力有两个:

- 第一（应用角度），几何图形的长度或者面积的计算。Newton 的微积分理论是这一枝上最完美的果实。
- 第二（公理化角度），Euclid 第五公设是不是必须的。这一条路带领人们走到了新的几何世界。

在 Euclid 之后一千多年的时间里，几何学并没有太多突破性的进展（转机出现在 17 世纪微积分发明之后）。如果用最简单的语言来概括，这段时间几何发展的原动力有两个：

- 第一（应用角度），几何图形的长度或者面积的计算。Newton 的微积分理论是这一枝上最完美的果实。
- 第二（公理化角度），Euclid 第五公设是不是必须的。这一条路带领人们走到了新的几何世界。

有意思的是殊途同归，最终这两个观点可以完美的统一起来。

微积分

我们先说微积分，也就是几何的测量方面。

微积分

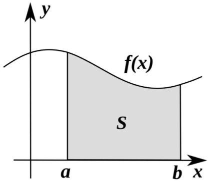
我们先说微积分，也就是几何的测量方面。

- 1687 年 Newton 的自然科学的数学原理一书的出版是微积分发展史上最重要的时刻。值得一提的是，这本书中微积分的讲法和现代的很不相同，完全是几何的讲法。

微积分

我们先说微积分，也就是几何的测量方面。

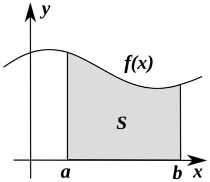
- 1687 年 Newton 的自然科学的数学原理一书的出版是微积分发展史上最重要的时刻。值得一提的是，这本书中微积分的讲法和现代的很不相同，完全是几何的讲法。
- 微积分的历史波澜壮阔，我们不想对微积分的历史做更多的描述，但是我们必须指出微积分理论的初衷就是计算曲线下的面积。



微积分

我们先说微积分，也就是几何的测量方面。

- 1687 年 Newton 的自然科学的数学原理一书的出版是微积分发展史上最重要的时刻。值得一提的是，这本书中微积分的讲法和现代的很不相同，完全是几何的讲法。
- 微积分的历史波澜壮阔，我们不想对微积分的历史做更多的描述，但是我们必须指出微积分理论的初衷就是计算曲线下的面积。



- 微积分的应用不可胜数：没有微积分就没有近代科学。这次演讲中我们详细地叙述一个应用（致敬 Erathosenes 和 Apollonius）。

1601 年（万历 29 年，Fermat 出生），Tycho Brahe（丹麦天文学家，占星师）把他在神圣罗马帝国的职位传给了 Kepler。Tycho 一生纪录了很多有意义的天文观测，比如说 1572 年仙后座的超新星爆发和 1577 年的大彗星。

1601 年（万历 29 年，Fermat 出生），Tycho Brahe（丹麦天文学家，占星师）把他在神圣罗马帝国的职位传给了 Kepler。Tycho 一生纪录了很多有意义的天文观测，比如说 1572 年仙后座的超新星爆发和 1577 年的大彗星。

- Kepler 系统地研究和整理了 Tycho 几十年天文观测的资料，他发现太阳系的行星运动遵循三条简洁漂亮的规律。

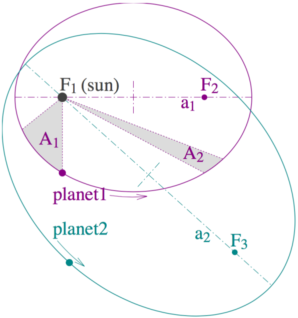
1601 年（万历 29 年，Fermat 出生），Tycho Brahe（丹麦天文学家，占星师）把他在神圣罗马帝国的职位传给了 Kepler。Tycho 一生纪录了很多有意义的天文观测，比如说 1572 年仙后座的超新星爆发和 1577 年的大彗星。

- Kepler 系统地研究和整理了 Tycho 几十年天文观测的资料，他发现太阳系的行星运动遵循三条简洁漂亮的规律。
- 1609 年的时候，Kepler 发表了前两个定律；十年之后又发表了第三条。

1601 年（万历 29 年，Fermat 出生），Tycho Brahe（丹麦天文学家，占星师）把他在神圣罗马帝国的职位传给了 Kepler。Tycho 一生纪录了很多有意义的天文观测，比如说 1572 年仙后座的超新星爆发和 1577 年的大彗星。

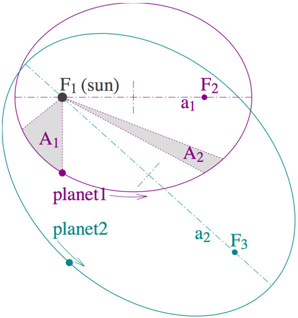
- Kepler 系统地研究和整理了 Tycho 几十年天文观测的资料，他发现太阳系的行星运动遵循三条简洁漂亮的规律。
- 1609 年的时候，Kepler 发表了前两个定律；十年之后又发表了第三条。
- 在那个年代，这三条定律动摇了整个天文学界的理论基础，这些想法原先都来自于古希腊学派，比如说 Aristotle 和 Ptolemy 的理论（他们认同地心学说，认为行星的轨道是圆的并且匀速运动等）。

行星运动的 Kepler 三定律



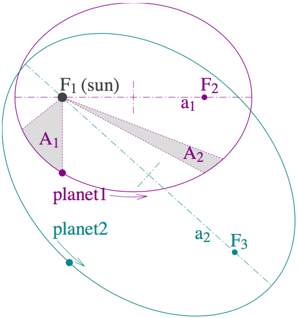
- 每个行星都沿各自的椭圆轨道环绕太阳运行，太阳处在椭圆的一个焦点上。（椭圆的恰好是 Apollonius 的圆锥曲线的一种！）

行星运动的 Kepler 三定律



- 每个行星都沿各自的椭圆轨道环绕太阳运行，太阳处在椭圆的一个焦点上。（椭圆的恰好是 Apollonius 的圆锥曲线的一种！）
- 在相等时间内，太阳和运动着的行星的连线所扫过的面积都是相等的。

行星运动的 Kepler 三定律



- 每个行星都沿各自的椭圆轨道环绕太阳运行，太阳处在椭圆的一个焦点上。（椭圆的恰好是 Apollonius 的圆锥曲线的一种！）
- 在相等时间内，太阳和运动着的行星的连线所扫过的面积都是相等的。
- 行星绕太阳公转周期（年）的平方和它们的椭圆轨道的半长轴的立方成正比。

1684 年（清康熙年间），Halley 去剑桥找 Newton 讨论 Kepler 定律（严格数学推导），

1684 年（清康熙年间），Halley 去剑桥找 Newton 讨论 Kepler 定律（严格数学推导），Newton 说他早就证明了但是手稿丢了。

1684 年（清康熙年间），Halley 去剑桥找 Newton 讨论 Kepler 定律（严格数学推导），Newton 说他早就证明了但是手稿丢了。Newton 后来给 Halley 重新写下了数学推导，在他的自然科学的数学原理的书里也可以找到。

1684 年（清康熙年间），Halley 去剑桥找 Newton 讨论 Kepler 定律（严格数学推导），Newton 说他早就证明了但是手稿丢了。Newton 后来给 Halley 重新写下了数学推导，在他的自然科学的数学原理的书里也可以找到。Newton 的证明基于下面的基本假设（请与 Euclid 几何比较）:

- 任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直到受到其它物体的作用力迫使它改变这种状态为止。
- 物体在受到合外力的作用会产生加速度，加速度的方向和合外力的方向相同，加速度的大小正比于合外力的大小与物体的惯性质量成反比。
- 两个物体之间的作用力和反作用力，在同一条直线上，大小相等，方向相反。

1684 年（清康熙年间），Halley 去剑桥找 Newton 讨论 Kepler 定律（严格数学推导），Newton 说他早就证明了但是手稿丢了。Newton 后来给 Halley 重新写下了数学推导，在他的自然科学的数学原理的书里也可以找到。Newton 的证明基于下面的基本假设（请与 Euclid 几何比较）:

- 任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直到受到其它物体的作用力迫使它改变这种状态为止。
- 物体在受到合外力的作用会产生加速度，加速度的方向和合外力的方向相同，加速度的大小正比于合外力的大小与物体的惯性质量成反比。
- 两个物体之间的作用力和反作用力，在同一条直线上，大小相等，方向相反。

另外，他的万有引力定律说给定两个质点，它们之间引力的大小正比于每个质点的质量，反比于距离的平方:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

Newton 证明一瞥

如果用 $x(t)$ 表示行星在时刻 t 所处的位置，那么它满足下面的微分方程：

$$x''(t) = -GM\frac{x(t)}{r^3}.$$

Newton 证明一瞥

如果用 $x(t)$ 表示行星在时刻 t 所处的位置，那么它满足下面的微分方程：

$$x''(t) = -GM\frac{x(t)}{r^3}.$$

这个方程描述了行星在一个点处瞬间的加速度和位置之间的关系，是纯粹局部的表述。

Newton 证明一瞥

如果用 $x(t)$ 表示行星在时刻 t 所处的位置，那么它满足下面的微分方程：

$$x''(t) = -GM\frac{x(t)}{r^3}.$$

这个方程描述了行星在一个点处瞬间的加速度和位置之间的关系，是纯粹局部的表述。Newton 利用他发展的微积分，证明了 $x(t)$ 的轨道在极坐标下形如

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}.$$

上面的 e 是离心率，$e > 1$ 的时候行星运动的轨道是抛物线（也是 Apollonius 的圆锥曲线）。

Newton 证明一瞥

如果用 $x(t)$ 表示行星在时刻 t 所处的位置，那么它满足下面的微分方程：

$$x''(t) = -GM\frac{x(t)}{r^3}.$$

这个方程描述了行星在一个点处瞬间的加速度和位置之间的关系，是纯粹局部的表述。Newton 利用他发展的微积分，证明了 $x(t)$ 的轨道在极坐标下形如

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}.$$

上面的 e 是离心率，$e > 1$ 的时候行星运动的轨道是抛物线（也是 Apollonius 的圆锥曲线）。行星周期的计算：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

上面的表达式中 M 是太阳的质量，a 是轨道的半长轴。

Kepler 定律的纯理论证明和原理的出版是古往今来科学界最了不起的成就之一。

Kepler 定律的纯理论证明和原理的出版是古往今来科学界最了不起的成就之一。

Newton 的书出版几个月之后，一位叫做 David Gregory 的数学家给他写信道:

Having seen and read your book I think my self obliged to give you my most hearty thanks for having been at the pains to teach the world that which I never expected any man should have known. For such is the mighty improvement made by you in the geometry, and so unexpectedly successful the application thereof to the physics, that you justly deserve the admiration of the best Geometers and Naturalists, in this and all succeeding ages.

太阳系的行星

对于太阳系行星运动的离心率（衡量椭圆是扁的程度），我们有如下的数据：

- 水星 $= 0.2056$
- 金星 $= 0.0068$
- 地球 $= 0.0167$
- 火星 $= 0.0934$
- 木星 $= 0.0483$
- 土星 $= 0.056$
- 天王星 $= 0.0056$ 海王星 $= 0.0461$ 冥王星 $= 0.2480$

太阳系的行星

对于太阳系行星运动的离心率（衡量椭圆是扁的程度），我们有如下的数据：

- 水星 $= 0.2056$
- 金星 $= 0.0068$
- 地球 $= 0.0167$
- 火星 $= 0.0934$
- 木星 $= 0.0483$
- 土星 $= 0.056$
- 天王星 $= 0.0056$ 海王星 $= 0.0461$ 冥王星 $= 0.2480$
- Halley 彗星 $= 0.967$，周期 75.3 年.

彗星

彗星的观察在东西方历史上都非常重要。Halley 彗星的轨迹是非常扁的椭圆，人们长久以来都没有觉察到它实际上一直在绕着太阳做周期的运动。

彗星

彗星的观察在东西方历史上都非常重要。Halley 彗星的轨迹是非常扁的椭圆，人们长久以来都没有觉察到它实际上一直在绕着太阳做周期的运动。从春秋以来，中国的彗星记载非常完备，比如说

- 秋七月，有星孛入于北斗。春秋-文公-十四年，公元前 613 年；

彗星

彗星的观察在东西方历史上都非常重要。Halley 彗星的轨迹是非常扁的椭圆，人们长久以来都没有觉察到它实际上一直在绕着太阳做周期的运动。从春秋以来，中国的彗星记载非常完备，比如说

- 秋七月，有星孛入于北斗。春秋-文公-十四年，公元前 613 年；
- 七年，彗星先出东方，见北方，五月见西方。将军鹜死。· · · 彗星复见西方十六日。夏太后死。 史记-始皇本纪，公元前 240 年。

彗星

彗星的观察在东西方历史上都非常重要。Halley 彗星的轨迹是非常扁的椭圆，人们长久以来都没有觉察到它实际上一直在绕着太阳做周期的运动。从春秋以来，中国的彗星记载非常完备，比如说

- 秋七月，有星孛入于北斗。春秋-文公-十四年，公元前 613 年；
- 七年，彗星先出东方，见北方，五月见西方。将军骜死。⋯ 彗星复见西方十六日。夏太后死。 史记-始皇本纪，公元前 240 年。

我们注意到 $(613 - 240) \div 5 = 75.4$。可惜我国历史上一直没有更为系统和科学的研究彗星。

彗星

彗星的观察在东西方历史上都非常重要。Halley 彗星的轨迹是非常扁的椭圆，人们长久以来都没有觉察到它实际上一直在绕着太阳做周期的运动。从春秋以来，中国的彗星记载非常完备，比如说

- 秋七月，有星孛入于北斗。春秋-文公-十四年，公元前 613 年;
- 七年，彗星先出东方，见北方，五月见西方。将军骜死。··· 彗星复见西方十六日。夏太后死。 史记-始皇本纪，公元前 240 年。

我们注意到 $(613 - 240) \div 5 = 75.4$。可惜我国历史上一直没有更为系统和科学的研究彗星。

我们还可以用彗星的周期（物理上也是这么定义时间）来做推算:
武王伐纣，彗星出而授殷人其柄，时有彗星，柄在东方，可以扫西人也。淮南子-兵略训。

彗星

彗星的观察在东西方历史上都非常重要。Halley 彗星的轨迹是非常扁的椭圆，人们长久以来都没有觉察到它实际上一直在绕着太阳做周期的运动。从春秋以来，中国的彗星记载非常完备，比如说

- 秋七月，有星孛入于北斗。春秋-文公-十四年，公元前 613 年；
- 七年，彗星先出东方，见北方，五月见西方。将军骜死。$\cdots$ 彗星复见西方十六日。夏太后死。 史记-始皇本纪，公元前 240 年。

我们注意到 $(613-240) \div 5 = 75.4$。可惜我国历史上一直没有更为系统和科学的研究彗星。

我们还可以用彗星的周期（物理上也是这么定义时间）来做推算：
武王伐纣，彗星出而授殷人其柄，时有彗星，柄在东方，可以扫西人也。淮南子-兵略训。如果这颗彗星是哈雷彗星，武王伐纣在应该在公元前 1057。

Halley 彗星

- 根据 Kepler 定律的启示，Newton 就曾经怀疑在 1680 和 81 年相继出现的两个彗星是同一颗彗星（掠过太阳之前和之后）。

Halley 彗星

- 根据 Kepler 定律的启示，Newton 就曾经怀疑在 1680 和 81 年相继出现的两个彗星是同一颗彗星（掠过太阳之前和之后）。
- Halley 通过对之前的观测数据的仔细研究，发现这颗彗星与 1531 年 Apianus 以及 1607 年 Kepler 观测的彗星的轨道参数几乎相同，所以推断这三颗彗星是同一颗并且周期大约是 75 年左右。

Halley 彗星

- 根据 Kepler 定律的启示，Newton 就曾经怀疑在 1680 和 81 年相继出现的两个彗星是同一颗彗星（掠过太阳之前和之后）。
- Halley 通过对之前的观测数据的仔细研究，发现这颗彗星与 1531 年 Apianus 以及 1607 年 Kepler 观测的彗星的轨道参数几乎相同，所以推断这三颗彗星是同一颗并且周期大约是 75 年左右。
- Halley 还预测这个彗星会在 1758 再次回来（后来被观测到了），尽管到那个时候他已经无法亲眼见证了。

Halley 彗星

- 根据 Kepler 定律的启示，Newton 就曾经怀疑在 1680 和 81 年相继出现的两个彗星是同一颗彗星（掠过太阳之前和之后）。
- Halley 通过对之前的观测数据的仔细研究，发现这颗彗星与 1531 年 Apianus 以及 1607 年 Kepler 观测的彗星的轨道参数几乎相同，所以推断这三颗彗星是同一颗并且周期大约是 75 年左右。
- Halley 还预测这个彗星会在 1758 再次回来（后来被观测到了），尽管到那个时候他已经无法亲眼见证了。
- 春秋-文公-十四年和史记-始皇本纪记载的（Apollonius 在 18 岁的时候，那时候他可能还没有发现圆锥曲线）也是这颗彗星。

太阳有多重

Kepler 第三定律 $T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$，其中 $M =$太阳质量，$a =$ 轨道的半长轴。

太阳有多重

Kepler 第三定律 $T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$，其中 $M =$太阳质量，$a =$ 轨道的半长轴。

- 周期 $T = 1$ 年！

太阳有多重

Kepler 第三定律 $T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$，其中 $M =$太阳质量，$a =$ 轨道的半长轴。

- 周期 $T = 1$ 年！
- 如果能够测出地球到太阳的距离，我们就能称出太阳的质量，这是曹冲称象的太阳系版本！

太阳有多重

Kepler 第三定律 $T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$，其中 $M =$太阳质量，$a =$ 轨道的半长轴。

- 周期 $T = 1$ 年！
- 如果能够测出地球到太阳的距离，我们就能称出太阳的质量，这是曹冲称象的太阳系版本！
- 为了测出地球到太阳的距离，我们运用 Eratosthenes 测量地球周长的想法，这叫做金星凌日法。

太阳有多重

Kepler 第三定律 $T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$，其中 $M =$太阳质量，$a =$ 轨道的半长轴。

- 周期 $T = 1$ 年！
- 如果能够测出地球到太阳的距离，我们就能称出太阳的质量，这是曹冲称象的太阳系版本！
- 为了测出地球到太阳的距离，我们运用 Eratosthenes 测量地球周长的想法，这叫做金星凌日法。
- 所谓的金星凌日就是太阳，地球和金星这三个点在一条直线上的天文现象。

金星凌日

- 中国古代称作是太白犯主（太白主兵，与日重合为大不详！），

金星凌日

- 中国古代称作是太白犯主（太白主兵，与日重合为大不详!），比如说资治通鉴卷一百九十一记载“己未，太白复经天。傅奕密奏：“太白见秦分，秦王当有天下。””。
- 1677 年 Halley 预测了 1761 年会发生金星凌日，他认为通过在地球上若干个地点的观测再加上对金星运动周期的数据，就可算出日地距离，他晚年提出了利用金星凌日来计算精确方法。

金星凌日

- 中国古代称作是太白犯主（太白主兵，与日重合为大不详!），比如说资治通鉴卷一百九十一记载“己未，太白复经天。傅奕密奏：“太白见秦分，秦王当有天下。””。
- 1677 年 Halley 预测了 1761 年会发生金星凌日，他认为通过在地球上若干个地点的观测再加上对金星运动周期的数据，就可算出日地距离，他晚年提出了利用金星凌日来计算精确方法。然而，1656 年出生的 Halley 注定等不到这一天的来临。

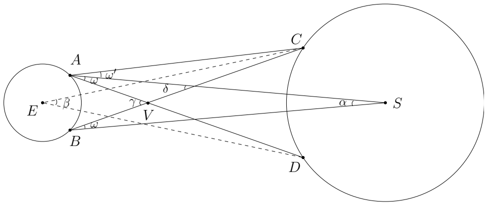
金星凌日

- 中国古代称作是太白犯主（太白主兵，与日重合为大不详!），比如说资治通鉴卷一百九十一记载“己未，太白复经天。傅奕密奏：“太白见秦分，秦王当有天下。””。
- 1677 年 Halley 预测了 1761 年会发生金星凌日，他认为通过在地球上若干个地点的观测再加上对金星运动周期的数据，就可算出日地距离，他晚年提出了利用金星凌日来计算精确方法。然而，1656 年出生的 Halley 注定等不到这一天的来临。
- 1769 年，通过欧洲的科学家的观测以及与在 Tahiti 岛的英国航海家 James Cook 船长的观测（英法正处战争，法国政府特别下令要保护 Cook 的船以保证测量的进行），之后不久法国人 Lalande 据此算出了地球与太阳间的距离大约为 1.5 亿公里。

金星凌日

- 中国古代称作是太白犯主（太白主兵，与日重合为大不详！），比如说资治通鉴卷一百九十一记载“己未，太白复经天。傅奕密奏：“太白见秦分，秦王当有天下。””。
- 1677 年 Halley 预测了 1761 年会发生金星凌日，他认为通过在地球上若干个地点的观测再加上对金星运动周期的数据，就可算出日地距离，他晚年提出了利用金星凌日来计算精确方法。然而，1656 年出生的 Halley 注定等不到这一天的来临。
- 1769 年，通过欧洲的科学家的观测以及与在 Tahiti 岛的英国航海家 James Cook 船长的观测（英法正处战争，法国政府特别下令要保护 Cook 的船以保证测量的进行），之后不久法国人 Lalande 据此算出了地球与太阳间的距离大约为 1.5 亿公里。
- 我们可以算出太阳的质量是 $2 \times 10^{30}\mathrm{kg}$。

金星凌日法

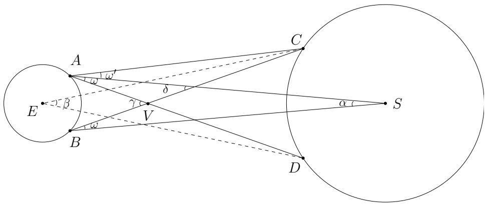


- 金星凌日时，地球上的上半球 A 点观测太阳会看到金星在太阳上的影子在 D 处；同样地，在对称位置 B 处观测看到金星的影子在 C 处。根据照片上 C 和 D 的位置以及相机焦距的性质，我们可以算出角度 β。
- 由于地球和太阳相距特别远，所以我们可以假设 $\omega + \omega' \approx \beta$。类似地，我们有 $\omega \approx \omega'$，$\gamma \approx \alpha + \beta$。
- 根据正弦定理，我们有

$$\frac{\frac{1}{2}AB}{AV} = \sin\left(\frac{1}{2}\gamma\right) \approx \frac{1}{2}\gamma, \quad \frac{\frac{1}{2}AB}{AS} = \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \approx \alpha.$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} \approx \frac{AS}{AV} \approx \frac{ES}{EV} = \frac{d_E}{d_E - d_V} = \frac{1}{1 - \frac{d_V}{d_E}}.$$

金星凌日法（续）



- 因为 $\gamma = \alpha + \beta$，所以 $\alpha \approx (\frac{d_E}{d_V} - 1)\beta$。
- 天文观测可以给出地球和金星的运行周期之比，根据 Kepler 第三定律，我们就可以计算 $\dfrac{d_E}{d_V}$。
- 根据 α 的值和 AB 的长度（用到 Erathosenes 的计算）最终给出

$$d_E \approx \frac{AB}{(\frac{d_E}{d_V} - 1)\beta}.$$

发现与问题

由于行星还会被其它的行星所吸引，所以它们运动的轨道可能和椭圆有一定的偏差。

发现与问题

由于行星还会被其它的行星所吸引，所以它们运动的轨道可能和椭圆有一定的偏差。

- J. Adams 和 U. de Verrier 为了解释观测上天王星轨道的扰动，通过计算预言了另一个行星的存在性。

发现与问题

由于行星还会被其它的行星所吸引，所以它们运动的轨道可能和椭圆有一定的偏差。

- J. Adams 和 U. de Verrier 为了解释观测上天王星轨道的扰动，通过计算预言了另一个行星的存在性。
- J. Galle 在 1846 年时通过望远镜观测到了海王星！

发现与问题

由于行星还会被其它的行星所吸引，所以它们运动的轨道可能和椭圆有一定的偏差。

- J. Adams 和 U. de Verrier 为了解释观测上天王星轨道的扰动，通过计算预言了另一个行星的存在性。
- J. Galle 在 1846 年时通过望远镜观测到了海王星！
- 根据海王星轨道的扰动，天文学家在 1930 年的时候找了冥王星！

发现与问题

由于行星还会被其它的行星所吸引，所以它们运动的轨道可能和椭圆有一定的偏差。

- J. Adams 和 U. de Verrier 为了解释观测上天王星轨道的扰动，通过计算预言了另一个行星的存在性。
- J. Galle 在 1846 年时通过望远镜观测到了海王星！
- 根据海王星轨道的扰动，天文学家在 1930 年的时候找了冥王星！
- 然而，人们还观测到水星的运动有所谓的近日点反常进动的现象，要想解释这一点，我们就要从 Euclid 几何发展的另一枝来谈了。

回到 Euclid 的第五公设

初中课本上 Euclid 的几何学有五条基本的公设，比如第一公设是过平面上的两个不同的点有且仅有一条直线。

回到 Euclid 的第五公设

初中课本上 Euclid 的几何学有五条基本的公设，比如第一公设是过平面上的两个不同的点有且仅有一条直线。

- 第五公设：过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行。

回到 Euclid 的第五公设

初中课本上 Euclid 的几何学有五条基本的公设，比如第一公设是过平面上的两个不同的点有且仅有一条直线。

- 第五公设：过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行。
- 长久以来，人们认为第五公设很有可能由其他的公理推出！（是一个定理而不是公理）在大约有两千年的时间里，人们一直尝试着去证明第五公设。

回到 Euclid 的第五公设

初中课本上 Euclid 的几何学有五条基本的公设，比如第一公设是过平面上的两个不同的点有且仅有一条直线。

- 第五公设：过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行。
- 长久以来，人们认为第五公设很有可能由其他的公理推出！（是一个定理而不是公理）在大约有两千年的时间里，人们一直尝试着去证明第五公设。
- 直到 1820 年，Lobachevsky 提出了一个和第五公设相矛盾的公设来代替它，并证明这个新的公设与其它公设所组成的公理系统在逻辑上是相容的。

回到 Euclid 的第五公设

初中课本上 Euclid 的几何学有五条基本的公设，比如第一公设是过平面上的两个不同的点有且仅有一条直线。

- 第五公设：过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行。
- 长久以来，人们认为第五公设很有可能由其他的公理推出！（是一个定理而不是公理）在大约有两千年的时间里，人们一直尝试着去证明第五公设。
- 直到 1820 年，Lobachevsky 提出了一个和第五公设相矛盾的公设来代替它，并证明这个新的公设与其它公设所组成的公理系统在逻辑上是相容的。特别地，他证明了
  - 第五公设不能被证明。
  - 新的第五公设可以给出新的的几何学。

同时代的很多人也发现了新的几何学，比如说 Bolyai 和 Gauss 等。

同时代的很多人也发现了新的几何学，比如说 Bolyai 和 Gauss 等。

- Janos Bolyai 的父亲告诉过 Gauss 他儿子的结果（双曲几何）。

同时代的很多人也发现了新的几何学，比如说 Bolyai 和 Gauss 等。

- Janos Bolyai 的父亲告诉过 Gauss 他儿子的结果（双曲几何）。Gauss 在回信中说道：

  If I commenced by saying that I am unable to praise this work, you would certainly be surprised for a moment. But I cannot say otherwise. To praise it would be to praise myself. Indeed the whole contents of the work, the path taken by your son, the results to which he is led, coincide almost entirely with my meditations, which have occupied my mind partly for the last thirty or thirty-five years.

同时代的很多人也发现了新的几何学，比如说 Bolyai 和 Gauss 等。

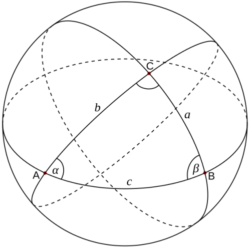
- Janos Bolyai 的父亲告诉过 Gauss 他儿子的结果（双曲几何）。Gauss 在回信中说道：

  If I commenced by saying that I am unable to praise this work, you would certainly be surprised for a moment. But I cannot say otherwise. To praise it would be to praise myself. Indeed the whole contents of the work, the path taken by your son, the results to which he is led, coincide almost entirely with my meditations, which have occupied my mind partly for the last thirty or thirty-five years.

- 从近代微分几何的观点来看，这和空间是否弯曲有关系（平面几何不弯曲！）

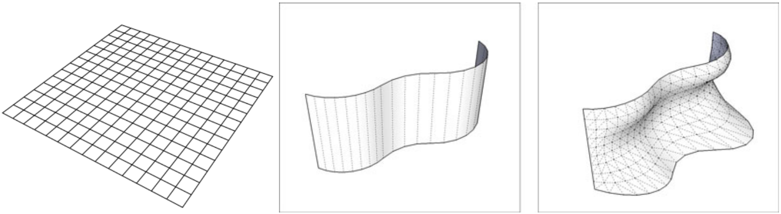
我们可以考虑球面上的几何学：
球面看起来是一个弯曲的面。我们规定：球面上的直线是大圆（过原点的平面和球面的交）。我们观察到第五公设已经不再成立了！因为：任何两条不同的直线都恰好有两个交点。

我们可以考虑球面上的几何学：
球面看起来是一个弯曲的面。我们规定：球面上的直线是大圆（过原点的平面和球面的交）。我们观察到第五公设已经不再成立了！因为：任何两条不同的直线都恰好有两个交点。仿照 Euclid 几何，我们可以研究球面的三角形的几何学，比如说，我们考虑 $\triangle ABC$，它的三条边的长度是 a, b, c，三个角的度数为 α, β, γ. 我们想知道它的面积是怎么算的。



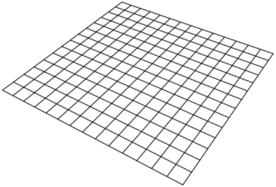
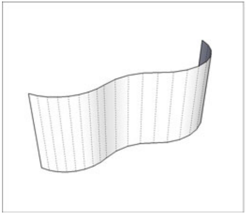
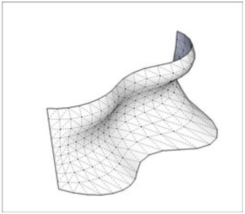
- $|\triangle ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.
- 特别的，三角形内角和大于 180°。

弯曲的曲面

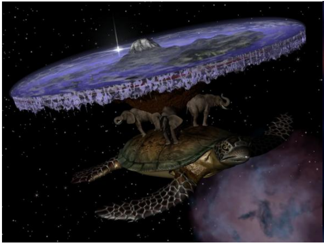


- 我们可以“看到”，第一个曲面是平的，后两个是弯曲的。

弯曲的曲面

- 我们可以“看到”，第一个曲面是平的，后两个是弯曲的。
- 地球表面约是球形曲面。古人却认为“天圆地方”：地球表面是平的！




如何“证明”地球的表面是弯曲的

- 是我们可以“看”或者看完之后类比:


如何“证明”地球的表面是弯曲的

- 是我们可以“看”或者看完之后类比:


- 设想一只蚂蚁（我们认为它是 2-维的生物），它不能到太空中，也不会仰望星空，它能不能知道地球是圆的呢?

如何“证明”地球的表面是弯曲的

- 是我们可以“看”或者看完之后类比:

- 设想一只蚂蚁（我们认为它是 2-维的生物），它不能到太空中，也不会仰望星空，它能不能知道地球是圆的呢?
- 如果假定我们生活的宇宙是 3 维的空间，那么它是平的呢还是弯曲的?

如何“证明”地球的表面是弯曲的

- 是我们可以“看”或者看完之后类比：


- 设想一只蚂蚁（我们认为它是 2-维的生物），它不能到太空中，也不会仰望星空，它能不能知道地球是圆的呢？
- 如果假定我们生活的宇宙是 3 维的空间，那么它是平的呢还是弯曲的？
- 当我们跳不出宇宙，不能以一个高维生物的角度来俯视的时候，我们知道的并不比一只蚂蚁多太多。

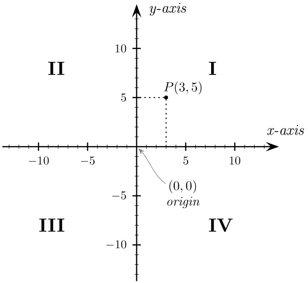
理解平坦

为理解弯曲，先理解平坦。平坦的例子就是平面。

理解平坦

为理解弯曲，先理解平坦。平坦的例子就是平面。

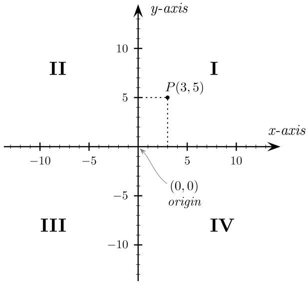
- 在平面上，我们从原点出发，先向东走 3 公里，再向北走 5 公里，或者先向北走 5 公里，再向东走 3 公里，我们都会到达同一个点。

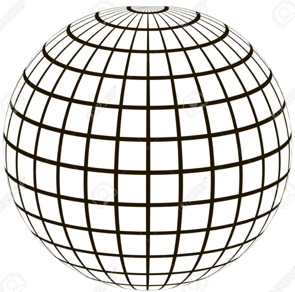


理解平坦

为理解弯曲，先理解平坦。平坦的例子就是平面。

- 在平面上，我们从原点出发，先向东走 3 公里，再向北走 5 公里，或者先向北走 5 公里，再向东走 3 公里，我们都会到达同一个点。





在球面上，我们从赤道的一点出发，先向东走 3 公里，再向北走 5 公里，或者先向北走 5 公里，再向东走 3 公里，我们不会到达同一个点，因为在赤道比其它（北）纬度圈要长！

定义“弯曲”

在微分几何中，我们用刚才两种移动的不交换性来定义一个量，这个量称为是曲率，记作 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$。

定义“弯曲”

在微分几何中，我们用刚才两种移动的不交换性来定义一个量，这个量称为是曲率，记作 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$。我们用曲率来描述空间弯曲的程度。按照定义，理论上我们可以测量曲率。

定义“弯曲”

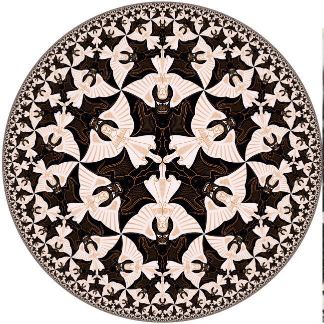
在微分几何中，我们用刚才两种移动的不交换性来定义一个量，这个量称为是曲率，记作 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$。我们用曲率来描述空间弯曲的程度。按照定义，理论上我们可以测量曲率。

- 平面，$R \equiv 0$；单位球面，$R \equiv 1$；
- 还有曲率为负数的曲面（双曲几何），$R \equiv -1$

定义“弯曲”

在微分几何中，我们用刚才两种移动的不交换性来定义一个量，这个量称为是曲率，记作 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$。我们用曲率来描述空间弯曲的程度。按照定义，理论上我们可以测量曲率。

- 平面，$R \equiv 0$；单位球面，$R \equiv 1$；
- 还有曲率为负数的曲面（双曲几何），$R \equiv -1$



- 我们已经不能到达更上层（4 维或者 5 维）的空间结构了，然而新的几何学以最精细的方式，使我们仍通过理性的探索去理解更大尺度的几何！

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

- 1853 年，Riemann 向 Göttingen 大学提交了三个论题来申请一个讲师的职位；Gauss 作为学术委员会的主席，选择了“几何学的基本假设”作为 Riemann 答辩的题目。

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

- 1853 年，Riemann 向 Göttingen 大学提交了三个论题来申请一个讲师的职位；Gauss 作为学术委员会的主席，选择了“几何学的基本假设”作为 Riemann 答辩的题目。Riemann 当时准备并不充分，他一心希望 Gauss 选其它的题目。

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

- 1853 年，Riemann 向 Göttingen 大学提交了三个论题来申请一个讲师的职位；Gauss 作为学术委员会的主席，选择了“几何学的基本假设”作为 Riemann 答辩的题目。Riemann 当时准备并不充分，他一心希望 Gauss 选其它的题目。
- 1854 年，Riemann 在答辩中引入一系列革命性的想法，向人们展示了应该如何刻画高维的弯曲的几何学。

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

- 1853 年，Riemann 向 Göttingen 大学提交了三个论题来申请一个讲师的职位；Gauss 作为学术委员会的主席，选择了“几何学的基本假设”作为 Riemann 答辩的题目。Riemann 当时准备并不充分，他一心希望 Gauss 选其它的题目。
- 1854 年，Riemann 在答辩中引入一系列革命性的想法，向人们展示了应该如何刻画高维的弯曲的几何学。据说听众中只有 Gauss 能理解他的想法，Riemann 几何的基本思想也深受 Gauss 之前对曲面的几何学研究的启发。

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

- 1853 年，Riemann 向 Göttingen 大学提交了三个论题来申请一个讲师的职位；Gauss 作为学术委员会的主席，选择了“几何学的基本假设”作为 Riemann 答辩的题目。Riemann 当时准备并不充分，他一心希望 Gauss 选其它的题目。
- 1854 年，Riemann 在答辩中引入一系列革命性的想法，向人们展示了应该如何刻画高维的弯曲的几何学。据说听众中只有 Gauss 能理解他的想法，Riemann 几何的基本思想也深受 Gauss 之前对曲面的几何学研究的启发。
- Riemann 的几何学对数学和物理的很多分支产生了深远的影响，大大开拓了人们对于空间和几何两个词的认识。

这种新的几何现在被称作是 Rimann 几何。

- 1853 年，Riemann 向 Göttingen 大学提交了三个论题来申请一个讲师的职位；Gauss 作为学术委员会的主席，选择了“几何学的基本假设”作为 Riemann 答辩的题目。Riemann 当时准备并不充分，他一心希望 Gauss 选其它的题目。
- 1854 年，Riemann 在答辩中引入一系列革命性的想法，向人们展示了应该如何刻画高维的弯曲的几何学。据说听众中只有 Gauss 能理解他的想法，Riemann 几何的基本思想也深受 Gauss 之前对曲面的几何学研究的启发。
- Riemann 的几何学对数学和物理的很多分支产生了深远的影响，大大开拓了人们对于空间和几何两个词的认识。
- 在 Riemann 演讲之后的 60 几年后，一位叫做 Einstein 年轻人的发现这种新的几何恰好是他想要用来描述空间、时间和引力的语言。

- Riemann 几何学和之前的几何区别非常大：它在不同点处的几何行为可以完全不同，也不能用一个坐标系来刻画（请想象 Descartes 的几何）。

- Riemann 几何学和之前的几何区别非常大：它在不同点处的几何行为可以完全不同，也不能用一个坐标系来刻画（请想象 Descartes 的几何）。
- 需要一族不同的坐标系统才可以刻画空间。空间的几何性质却不依赖于坐标系统的选取。

- Riemann 几何学和之前的几何区别非常大：它在不同点处的几何行为可以完全不同，也不能用一个坐标系来刻画（请想象 Descartes 的几何）。
- 需要一族不同的坐标系统才可以刻画空间。空间的几何性质却不依赖于坐标系统的选取。后一个要求尤为重要，在广义相对论中，这就等于与等效原理。

- Riemann 几何学和之前的几何区别非常大：它在不同点处的几何行为可以完全不同，也不能用一个坐标系来刻画（请想象 Descartes 的几何）。
- 需要一族不同的坐标系统才可以刻画空间。空间的几何性质却不依赖于坐标系统的选取。后一个要求尤为重要，在广义相对论中，这就等于与等效原理。
- Riemann 在他去世的三年前，在意大利短暂呆过一段时间，他的想法影响了几位意大利和瑞士的几何学家，其中有 Christoffel，Ricci 和 Levi-Civita。

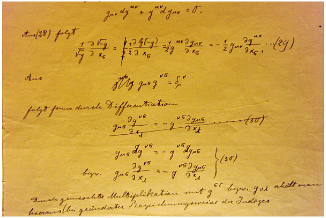
- Riemann 几何学和之前的几何区别非常大：它在不同点处的几何行为可以完全不同，也不能用一个坐标系来刻画（请想象 Descartes 的几何）。
- 需要一族不同的坐标系统才可以刻画空间。空间的几何性质却不依赖于坐标系统的选取。后一个要求尤为重要，在广义相对论中，这就等于与等效原理。
- Riemann 在他去世的三年前，在意大利短暂呆过一段时间，他的想法影响了几位意大利和瑞士的几何学家，其中有 Christoffel，Ricci 和 Levi-Civita。这些人进一步发展和完善了 Riemann 的思想，其中联络、Ricci 曲率等概念对相对论和后面的规范场理论都是本质性的语言。

Einstein 的广义相对论

- 1915-11-25, Einstein 向普鲁士科学院提交了其广义相对论的论文。

Einstein 的广义相对论

- 1915-11-25, Einstein 向普鲁士科学院提交了其广义相对论的论文。


$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$

Aus (28) folgt

$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdots (29)$

Aus $g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$

folgt ferner durch Differentiation

$\cancel{g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda} \cdots (30)}$

$g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} dg_{\mu\sigma}$

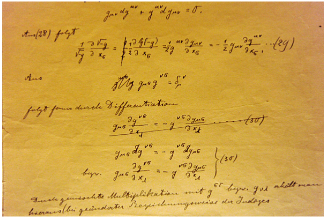
bezw. $g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}$ (30)

Durch gemischte Multiplikation mit $g^{\sigma\tau}$ bezw. $g_{\nu\lambda}$ erhält man hieraus (bei geänderter Bezeichnungsweise der Indices)

- 粗略而言，广义相对论是关于引力的理论。根据广义相对论，引力场或者物质的存在导致了时空几何的弯曲，而时空的弯曲恰恰体现了引力本身的存在。

Einstein 的广义相对论

- 1915-11-25, Einstein 向普鲁士科学院提交了其广义相对论的论文。



- 粗略而言，广义相对论是关于引力的理论。根据广义相对论，引力场或者物质的存在导致了时空几何的弯曲，而时空的弯曲恰恰体现了引力本身的存在。

在讨论广义相对论，需要先谈一下狭义相对论以及相对论的历史。

- 历史上，几位数学家和物理学家几乎在同时发现了狭义相对论的，其中有 Eistein，Lorentz 和 Poincaré。

- 历史上，几位数学家和物理学家几乎在同时发现了狭义相对论的，其中有 Eistein，Lorentz 和 Poincaré。
- 狭义相对论背后所依赖的时空叫做 Miknowski 时空，电磁理论和以及光速不变的观测在这个时空上可以被完美的刻画。

- 历史上，几位数学家和物理学家几乎在同时发现了狭义相对论的，其中有 Eistein，Lorentz 和 Poincaré。
- 狭义相对论背后所依赖的时空叫做 Miknowski 时空，电磁理论和以及光速不变的观测在这个时空上可以被完美的刻画。
- Minkowski 是 Einstein 的老师，他曾经评论道：

  There was a lazy student in my class who had recently done an important work which I had come up with a geometric interpretation.

- 历史上，几位数学家和物理学家几乎在同时发现了狭义相对论的，其中有 Eistein，Lorentz 和 Poincaré。
- 狭义相对论背后所依赖的时空叫做 Miknowski 时空，电磁理论和以及光速不变的观测在这个时空上可以被完美的刻画。
- Minkowski 是 Einstein 的老师，他曾经评论道：

  There was a lazy student in my class who had recently done an important work which I had come up with a geometric interpretation.
- Miknowski 的几何又和我们所熟知的几何大不相同，比如说有一些向量的长度是零，它们可以来描述光线的传播。

- 历史上，几位数学家和物理学家几乎在同时发现了狭义相对论的，其中有 Eistein，Lorentz 和 Poincaré。
- 狭义相对论背后所依赖的时空叫做 Miknowski 时空，电磁理论和以及光速不变的观测在这个时空上可以被完美的刻画。
- Minkowski 是 Einstein 的老师，他曾经评论道：

  There was a lazy student in my class who had recently done an important work which I had come up with a geometric interpretation.
- Miknowski 的几何又和我们所熟知的几何大不相同，比如说有一些向量的长度是零，它们可以来描述光线的传播。
- 光速不变的实验很大程度上促成 Minkowski 时空的出现，在这种几何中，时间和空间的位置变得对等起来了（为什么?）。

- Minkowski 在他的工作中还引入了张量的概念，并证明了时空的对称群恰好是 Lorentz 变换群。

- Minkowski 在他的工作中还引入了张量的概念，并证明了时空的对称群恰好是 Lorentz 变换群。
- Poincaré 进一步认为 Minkowski 时空只是某一种可能的 4 维流形而已，他说道

  In truth, we are dealing with more than merely a new conception of space and time. The claim is that it is rather a quite specific natural law, which, because of its importance –since it alone deals with the primitive concepts of all natural knowledge, namely space and time –can claim to be called the first of all laws of nature.

- Minkowski 在他的工作中还引入了张量的概念，并证明了时空的对称群恰好是 Lorentz 变换群。
- Poincaré 进一步认为 Minkowski 时空只是某一种可能的 4 维流形而已，他说道

  In truth, we are dealing with more than merely a new conception of space and time. The claim is that it is rather a quite specific natural law, which, because of its importance –since it alone deals with the primitive concepts of all natural knowledge, namely space and time –can claim to be called the first of all laws of nature.
- Einstein 很快就认识到狭义相对论和 Newton 的引力理论并不相容，他需要一种新的几何来描述引力。

- Einstein 认为正确的引力势场应该随着时空位置的变化而变化，并且依赖于这一点处的切向量。可是他不知道什么样的数学工具可以来表达这样的事实。

- Einstein 认为正确的引力势场应该随着时空位置的变化而变化，并且依赖于这一点处的切向量。可是他不知道什么样的数学工具可以来表达这样的事实。
- 他找了大学的朋友 Grossman 帮忙，Grossman 告诉他引力场应该由 Riemann 几何中的度量张量来描述。

- Einstein 认为正确的引力势场应该随着时空位置的变化而变化，并且依赖于这一点处的切向量。可是他不知道什么样的数学工具可以来表达这样的事实。
- 他找了大学的朋友 Grossman 帮忙，Grossman 告诉他引力场应该由 Riemann 几何中的度量张量来描述。
- 他们在图书馆里学习掌握了张量的语言，但是他们在数学上面临了更大的挑战：不知道如何求张量的导数。

- Einstein 认为正确的引力势场应该随着时空位置的变化而变化，并且依赖于这一点处的切向量。可是他不知道什么样的数学工具可以来表达这样的事实。
- 他找了大学的朋友 Grossman 帮忙，Grossman 告诉他引力场应该由 Riemann 几何中的度量张量来描述。
- 他们在图书馆里学习掌握了张量的语言，但是他们在数学上面临了更大的挑战：不知道如何求张量的导数。这恰好是 Christoffel 和 Levi-Civita 的联络理论。

- Einstein 认为正确的引力势场应该随着时空位置的变化而变化，并且依赖于这一点处的切向量。可是他不知道什么样的数学工具可以来表达这样的事实。
- 他找了大学的朋友 Grossman 帮忙，Grossman 告诉他引力场应该由 Riemann 几何中的度量张量来描述。
- 他们在图书馆里学习掌握了张量的语言，但是他们在数学上面临了更大的挑战：不知道如何求张量的导数。这恰好是 Christoffel 和 Levi-Civita 的联络理论。
- Grossman 还帮助 Einstein 在图书馆里找到了 Ricci 的论文，Ricci 已经从 Riemann 的张量出发构造出所谓的 Ricci 曲率张量（度量的 2 阶导数），Einstein 一下子就意识到这应该是他要找的方程的左边。

- Einstein 认为正确的引力势场应该随着时空位置的变化而变化，并且依赖于这一点处的切向量。可是他不知道什么样的数学工具可以来表达这样的事实。
- 他找了大学的朋友 Grossman 帮忙，Grossman 告诉他引力场应该由 Riemann 几何中的度量张量来描述。
- 他们在图书馆里学习掌握了张量的语言，但是他们在数学上面临了更大的挑战：不知道如何求张量的导数。这恰好是 Christoffel 和 Levi-Civita 的联络理论。
- Grossman 还帮助 Einstein 在图书馆里找到了 Ricci 的论文，Ricci 已经从 Riemann 的张量出发构造出所谓的 Ricci 曲率张量（度量的 2 阶导数），Einstein 一下子就意识到这应该是他要找的方程的左边。
- 1912 年到 13 年之间，他们发表了所找到的方程（今天我们称作是真空场方程）。

- 从 1913 年到 1915 年，Einstein 面临着两个困难，第一，解方程并给出合理的物理和天文意义；第二，找到最正确的那个方程。

- 从 1913 年到 1915 年，Einstein 面临着两个困难，第一，解方程并给出合理的物理和天文意义；第二，找到最正确的那个方程。当他回首那段时间的时候，这么说道：

  In the light of knowledge attained, the happy achievement seems almost a matter of course, and any intelligent student can grasp it without too much trouble. But the years of anxious searching in the dark, with their intense longing, their alternations of confidence and exhaustion and the final emergence into light - only those who have experienced it can understand that.

- 从 1913 年到 1915 年，Einstein 面临着两个困难，第一，解方程并给出合理的物理和天文意义；第二，找到最正确的那个方程。当他回首那段时间的时候，这么说道：

  In the light of knowledge attained, the happy achievement seems almost a matter of course, and any intelligent student can grasp it without too much trouble. But the years of anxious searching in the dark, with their intense longing, their alternations of confidence and exhaustion and the final emergence into light - only those who have experienced it can understand that.

- 1915 年的夏天，Einstein 去 Göttigen 去找数学家帮忙，那个时候的 Göttingen 群星灿烂，有 Hilbert，Weyl，Noether 等人。

- 从 1913 年到 1915 年，Einstein 面临着两个困难，第一，解方程并给出合理的物理和天文意义；第二，找到最正确的那个方程。当他回首那段时间的时候，这么说道：

  In the light of knowledge attained, the happy achievement seems almost a matter of course, and any intelligent student can grasp it without too much trouble. But the years of anxious searching in the dark, with their intense longing, their alternations of confidence and exhaustion and the final emergence into light - only those who have experienced it can understand that.

- 1915 年的夏天，Einstein 去 Göttigen 去找数学家帮忙，那个时候的 Göttingen 群星灿烂，有 Hilbert，Weyl，Noether 等人。
- 1915 年 11 月，Hilbert 通过他所定义的作用量找到了正确的场方程，他把这个方程写在明信片上寄给 Einstein，Einstein 也很快写下了方程，第二个困难被解决了。

- Einstein 开始非常担心广义相对论的优先权，Hilbert 很快就公开声明相对论的发明者是 Einstein。

- Einstein 开始非常担心广义相对论的优先权，Hilbert 很快就公开声明相对论的发明者是 Einstein。
- Einstein 在他的论文里对 Hilbert 的贡献只字未提。

- Einstein 开始非常担心广义相对论的优先权，Hilbert 很快就公开声明相对论的发明者是 Einstein。
- Einstein 在他的论文里对 Hilbert 的贡献只字未提。
- 广义相对论是人类对自然和真理探索史上无论如何赞誉都不会过分理论！

- Einstein 开始非常担心广义相对论的优先权，Hilbert 很快就公开声明相对论的发明者是 Einstein。
- Einstein 在他的论文里对 Hilbert 的贡献只字未提。
- 广义相对论是人类对自然和真理探索史上无论如何赞誉都不会过分理论！然而，我们也应该记住，这套理论背后也有众多伟大的几何学家的心血。

Einstein 的引力场方程

- Einstein 的引力场方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Einstein 的引力场方程

- Einstein 的引力场方程:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

- 方程左边都是曲率项，描述的是时空的几何。

Einstein 的引力场方程

- Einstein 的引力场方程:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

- 方程左边都是曲率项，描述的是时空的几何。
- 方程右边是所谓的动量－能量张量，描述的是物质场的分布。

Einstein 的引力场方程

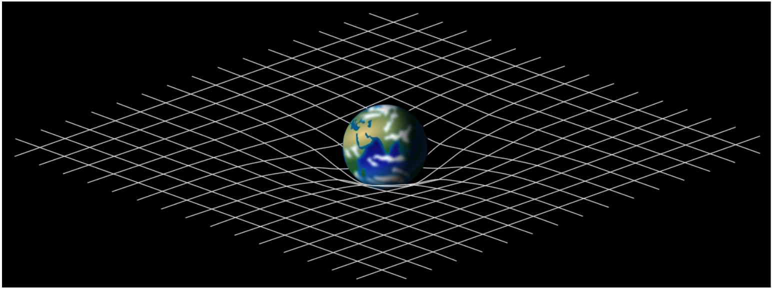
- 方程讲的是（引力） = 几何 = 物理。

Einstein 的引力场方程

- 方程讲的是（引力）= 几何 = 物理。
- 经典物理学假设时空是不变化的，一切物理现象发生在不变的时空中。广义相对论说时空本身也是物理现象。

Einstein 的引力场方程

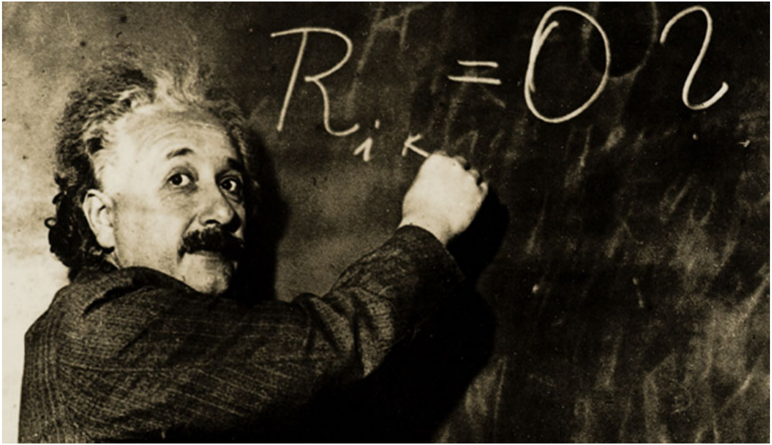
- 方程讲的是（引力） = 几何 = 物理。
- 经典物理学假设时空是不变化的，一切物理现象发生在不变的时空中。广义相对论说时空本身也是物理现象。
- 根据场方程，空间中如果有物质分布（比如说星体，电磁波等），那么时空的几何（曲率）就会有变化，根据我们举的例子，这也就是说产生了引力。



真空场方程

在空间当中没有物质（那还有什么？）的时候，方程右边 $T_{\mu\nu} = 0$，从而约化为

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{（真空场方程）}$$

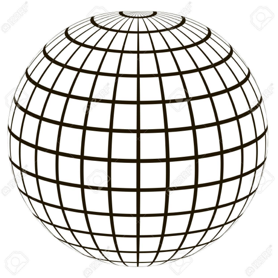
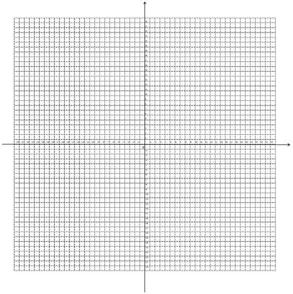


引力与几何

我们举一个（不恰当的）例子来解释引力和弯曲的的关系

引力与几何

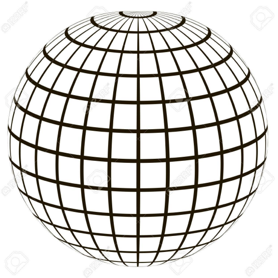
我们举一个（不恰当的）例子来解释引力和弯曲的的关系：

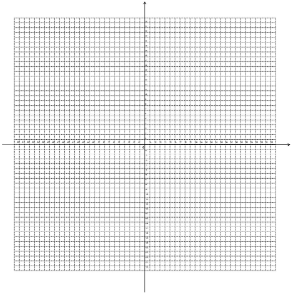
 

- 假想两人从赤道上不同的两点出发，向北前进，速度一样。
- 时间越久，他们离北极就越近，他们之间的距离就越近。他们可能会觉得是某种神秘的力量（引力?）将他们越拉越近。

引力与几何

我们举一个（不恰当的）例子来解释引力和弯曲的的关系：

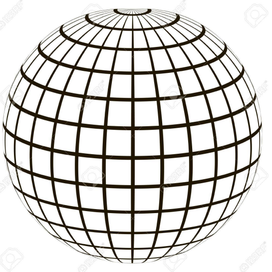


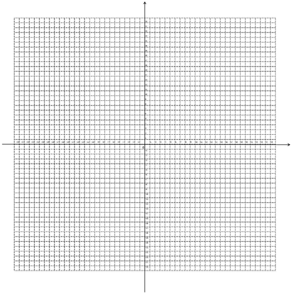


- 假想两人从赤道上不同的两点出发，向北前进，速度一样。
- 时间越久，他们离北极就越近，他们之间的距离就越近。他们可能会觉得是某种神秘的力量（引力?）将他们越拉越近。
- 如果在平面上，就不会出现这种事情。

引力与几何

我们举一个（不恰当的）例子来解释引力和弯曲的的关系：

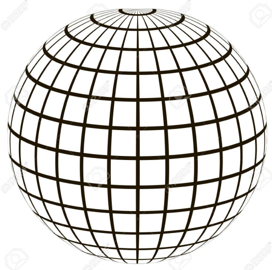


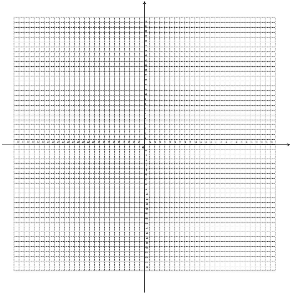


- 假想两人从赤道上不同的两点出发，向北前进，速度一样。
- 时间越久，他们离北极就越近，他们之间的距离就越近。他们可能会觉得是某种神秘的力量（引力?）将他们越拉越近。
- 如果在平面上，就不会出现这种事情。
- 这种吸引只是不同的几何所导致的，根本没有什么力，或者说，几何就是这种力！

引力与几何

我们举一个（不恰当的）例子来解释引力和弯曲的的关系：





- 假想两人从赤道上不同的两点出发，向北前进，速度一样。
- 时间越久，他们离北极就越近，他们之间的距离就越近。他们可能会觉得是某种神秘的力量（引力?）将他们越拉越近。
- 如果在平面上，就不会出现这种事情。
- 这种吸引只是不同的几何所导致的，根本没有什么力，或者说，几何就是这种力！

解方程

按照场方程的意义，每一个解都对应着一个物理时空（宇宙）。

- 第一个解叫做 Minkowski 时空（比真空还要真空的！），这个解是用来描述狭义相对论的。

解方程

按照场方程的意义，每一个解都对应着一个物理时空（宇宙）。

- 第一个解叫做 Minkowski 时空（比真空还要真空的！），这个解是用来描述狭义相对论的。
- 1915 年圣诞节之前的一天, 42 岁的德国人 Schwarzschild 从德军在俄国方面的前线给 Einstein 写了一封信：“... 就像您读到的一样, 这场战争对我还算不错，尽管硝烟弥漫，我却可以沉浸在您的理论之中...” 随信附上的还有下面的公式:

$$g = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

解方程

按照场方程的意义，每一个解都对应着一个物理时空（宇宙）。

- 第一个解叫做 Minkowski 时空（比真空还要真空的！），这个解是用来描述狭义相对论的。
- 1915 年圣诞节之前的一天, 42 岁的德国人 Schwarzschild 从德军在俄国方面的前线给 Einstein 写了一封信：“... 就像您读到的一样, 这场战争对我还算不错，尽管硝烟弥漫，我却可以沉浸在您的理论之中...” 随信附上的还有下面的公式:

$$g = -(1 - \frac{2Gm}{rc^2})dt^2 + (1 - \frac{2Gm}{rc^2})^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

- 这是真空场方程的第二个解，叫做 Schwarzschild 时空，它描述了一个球状对称静止的星球所在的时空的几何。

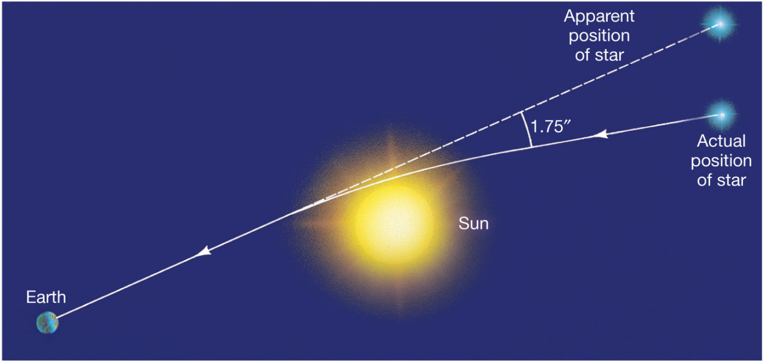
光线的弯曲

Schwarzschild 时空是 4 维的空间，我们可以（用纸和笔!）研究它的几何学，特别的，我们可以研究它里面的“直线”。

光线的弯曲

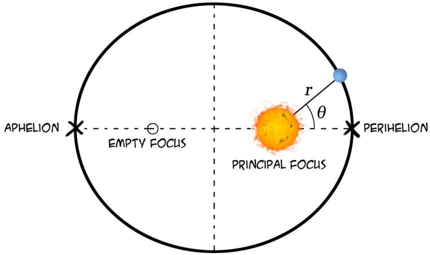
Schwarzschild 时空是 4 维的空间，我们可以（用纸和笔!）研究它的几何学，特别的，我们可以研究它里面的“直线”。

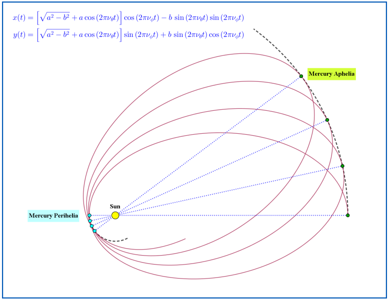
作为对“类光直线”的研究和计算的应用，我们可以预言光线在星体附近的弯曲（1919 年由 Arthur Eddington 观测验证!）



水星在近地点的反常进动

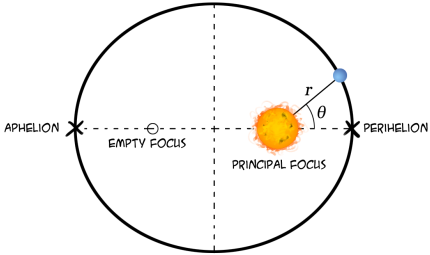
根据 Newton 力学，可以证明行星绕太阳的轨道是一个椭圆，而且周而复始做周期运动（Kepler 第一定律）。

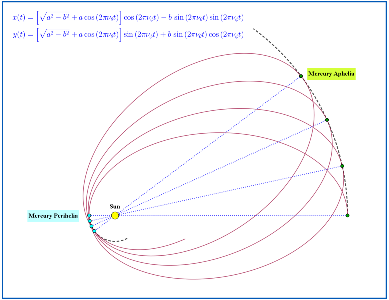




水星在近地点的反常进动

根据 Newton 力学，可以证明行星绕太阳的轨道是一个椭圆，而且周而复始做周期运动（Kepler 第一定律）。

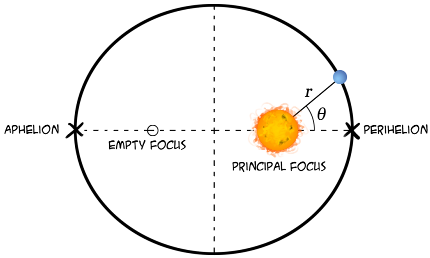


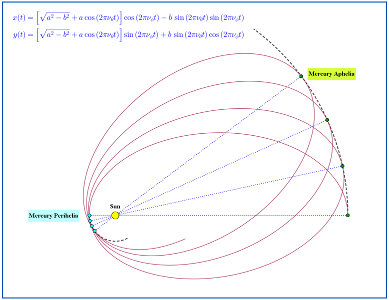


然而水星（轨道离心率最大的行星）的近地点有每世纪 $43.03''$（$3600'' = 1^\circ$）的反常进动，这不是 Newton 力学能回答的。

水星在近地点的反常进动

根据 Newton 力学，可以证明行星绕太阳的轨道是一个椭圆，而且周而复始做周期运动（Kepler 第一定律）。





然而水星（轨道离心率最大的行星）的近地点有每世纪 $43.03''$（$3600'' = 1^\circ$）的反常进动，这不是 Newton 力学能回答的。通过对“类时直线”的计算，我们可以用 Schwarzschild 时空来证明这件事情。

黑洞

- Schwarzschild 时空最让人振奋让人激动的其实是: 它预言了黑洞。
- 我们先来研究一下解的表达式:

$$g = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

- 当 $r = r_0 = \frac{2Gm}{c^2}$ 时，红色一项是无限大的。
- 当 r 从大到小跨过 r_0 时，我们看到上面两项的符号都变了一下，这对应着时间和空间的地位有了转换。
- $r \leq \frac{2Gm}{c^2}$ 区域我们称之为**黑洞**。

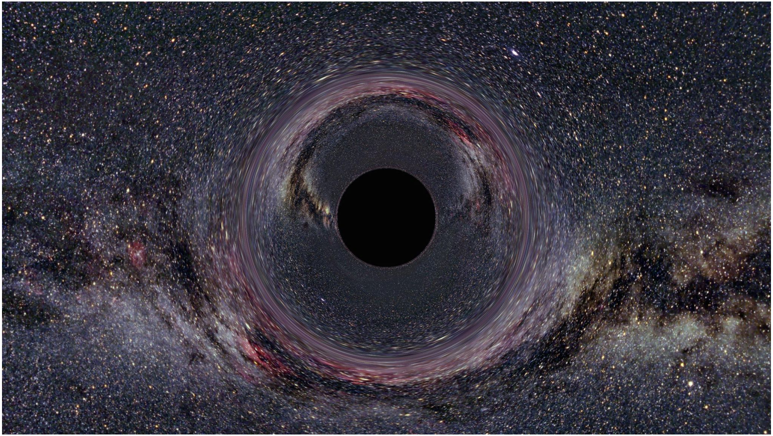
想象一下黑洞

按照定义，黑洞时时空中的特定的区域（可以用方程写下来！）。

想象一下黑洞

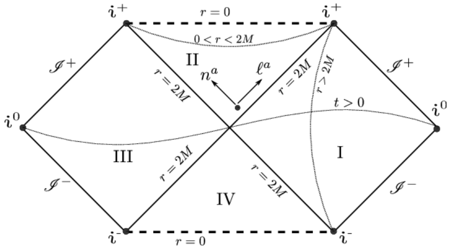
按照定义，黑洞时时空中的特定的区域（可以用方程写下来！）。

基于对于“黑”和“洞”两个字的理解和想象，我们通常会“看到”这样的黑洞：



黑洞为什么黑又为什么是洞呢

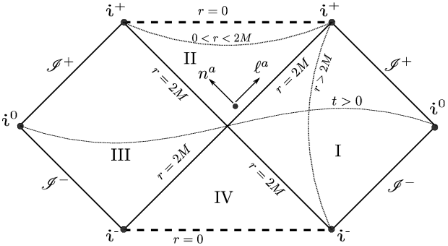
黑洞为什么黑又为什么是洞呢



只需要做到一点点几何学：

- 我们可以计算那些起始点在黑洞内部的类光射线，可以证明，它们永远都不会跑出 $r \leq r_0$，也就是说黑洞里面的光是跑不出来的，我们看不到光，所以它是黑的！

黑洞为什么黑又为什么是洞呢



只需要做到一点点几何学：

- 我们可以计算那些起始点在黑洞内部的类光射线，可以证明，它们永远都不会跑出 $r \leq r_0$，也就是说黑洞里面的光是跑不出来的，我们看不到光，所以它是黑的！
- 我们可以用 Gauss-Bonnet 定理（微分几何）证明，黑洞的边界一定是球面，所谓我们称它为“洞”而不是“环”或者“块”。

- 1963 年（Einstein 已经去世），Kerr 写下了真空场方程的另一个解：

$$g = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2$$
$$+ \Sigma d\theta^2 + \left(\Delta + \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2,$$

其中 $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$，$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$。

- 1963 年（Einstein 已经去世），Kerr 写下了真空场方程的另一个解：

$$g = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\Delta + \frac{2Mr(r^2+a^2)}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2,$$

  其中 $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$，$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$。
- 这个度量是来描述一个稳态的旋转的黑洞。

- 1963 年（Einstein 已经去世），Kerr 写下了真空场方程的另一个解：

$$g = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2$$
$$+\Sigma d\theta^2 + \left(\Delta + \frac{2Mr(r^2+a^2)}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2,$$

  其中 $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$，$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$。
- 这个度量是来描述一个稳态的旋转的黑洞。
- 物理学家猜想（如果没有电磁场的话）宇宙按照相对论的最终的演化状态应该被上面这个解所描述。

- 1965 年，Penrose 证明了如果时空中存在所谓的捕获曲面的话，那么时空在未来一定有奇点。

- 1965 年，Penrose 证明了如果时空中存在所谓的捕获曲面的话，那么时空在未来一定有奇点。
- 如果 Eistein 的场方程右边 $T_{\mu\nu}$ 满足足够好的正性的条件，Hawking 证明了每一条走向过去的类时测地线的长度都有一致的下界。

- 1965 年，Penrose 证明了如果时空中存在所谓的捕获曲面的话，那么时空在未来一定有奇点。
- 如果 Eistein 的场方程右边 $T_{\mu\nu}$ 满足足够好的正性的条件，Hawking 证明了每一条走向过去的类时测地线的长度都有一致的下界。
- 在广义相对论中，类时测地线代表的是有质量的粒子的世界线。Hawking 的定理说明我们的宇宙可能存在一个起始点。

- 1981 年，Schoen 和 Yau 用微分几何中极小曲面的方法证明了质量猜想。
- 1990 年左右，Christodoulou 和 Klainerman 证明了 Minkowski 空间的非线性稳定性。
- 2009 年，Christodoulou 在数学上严格刻画了黑洞的形成机制。
- 2017 年，多国科学家宣布人类第一次直接探测到来自双中子星合并的引力波。
- 在偏微分方程方面，可压缩的三维 Euler 方程的解背后对应着一套 Lorentz 几何，这种几何决定了声音的传播。
- ……

- 1981 年，Schoen 和 Yau 用微分几何中极小曲面的方法证明了质量猜想。
- 1990 年左右，Christodoulou 和 Klainerman 证明了 Minkowski 空间的非线性稳定性。
- 2009 年，Christodoulou 在数学上严格刻画了黑洞的形成机制。
- 2017 年，多国科学家宣布人类第一次直接探测到来自双中子星合并的引力波。
- 在偏微分方程方面，可压缩的三维 Euler 方程的解背后对应着一套 Lorentz 几何，这种几何决定了声音的传播。
- ……
- 几何是一门具有两千年历史的严肃学科，她告诉人们如何在宏大的图像中找到精致的结构又如何从细微的空间还原整体的构型。

- 1981 年，Schoen 和 Yau 用微分几何中极小曲面的方法证明了质量猜想。
- 1990 年左右，Christodoulou 和 Klainerman 证明了 Minkowski 空间的非线性稳定性。
- 2009 年，Christodoulou 在数学上严格刻画了黑洞的形成机制。
- 2017 年，多国科学家宣布人类第一次直接探测到来自双中子星合并的引力波。
- 在偏微分方程方面，可压缩的三维 Euler 方程的解背后对应着一套 Lorentz 几何，这种几何决定了声音的传播。
- ……
- 几何是一门具有两千年历史的严肃学科，她告诉人们如何在宏大的图像中找到精致的结构又如何从细微的空间还原整体的构型。

  这只是一个旅途的开始。

谢谢大家！