著者小传　内容提要

矢野健太郎（Kentaro Yano）教授 1912 年生，1934 年日本东京大学数学系毕业。早年留学法国和美国。1938年得法国博士学位。现在是东京工业大学名誉教授。曾著书和论文数百篇，他的选集将由 North Holland Publishing Co. 出版。他是日本几何学界权威。著名几何学家小畠守生(M.Obata)，小林昭七(S.Kobayashi) 等都是他的学生。

本书的前身《初等黎曼几何学》曾引导一代日本几何学家成长。时至今日对初学者仍很有价值。1971年为适应现代要求，经过修改后由日本森北出版社出版并采用新名。此书使用张量分析法。

本书对读者要求少，学过数学分析、线代数、微分方程初步的人都可学习。如再配上适量文献便可指导学生作些初步研究工作，因此极适于理工学院、师范学院毕业班作选修课教材。对于想学习张量分析的理工科学生，科技人员也是很好的参考书。

中译本根据日文本 1971 年版全文译出。

欣逢

矢野健太郎先生

七十寿辰，译者借此致以最诚挚的祝愿。

前　　言

在 17 世纪，笛卡儿（René Descartes）和费尔马（Pierre de Fermat）发现了解析几何学，牛顿（Issac Newton）和莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz）发现了微积分学的同时就开始了将解析几何学和微积分学的手法运用在曲线和曲面的性质的研究上。

特别是高斯（Carl Friedrich Gauss）运用这些手法彻底地研究了曲面的性质，创立了今天叫做曲面论的学问。

高斯在曲面的性质中特别注意了在等距变换下，即曲面不经伸缩的变换下不变的性质并加以研究。例如，曲面上的曲线为其测地线这样性质在等距变换下不变。还有高斯定义的曲面的全曲率也在等距变换下不变。在曲面的等距变换下不变的曲面性质的研究今天叫做曲面上的几何学。

再者，黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann）1854 年 6 月 10 日在哥廷根大学的就职演说上讲的「关于构成几何学基础的假设」(Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen）里，已将上述高斯的曲面上几何学推广到一般 n 维流形的几何学上去了。这就是今天的黎曼几何学。

由黎曼开创的这种黎曼几何学，经过上世纪的后半叶，由克利斯托费尔（Erwin Bruno Christoffel)，开玲（Wilhelm Killing)，休尔（Issai Schur)，利齐（Curbustro Gregorio Ricci)，列维·齐维塔（Tullio Levi-Civita)，比安基（Luigi Bianchi)，贝尔特腊米（Eugenio Beltrami）等人主要发展了二次微分形式的理论。在世纪转换之年 1901 年，利齐和列维·齐维塔将这些研究集其大成，发表在 Mathematische Annalen 上的「绝对微分学的方法及其应用」(Méthodes de calcul différentiel absolu et leur applications）是有名的。怪不得研究黎曼几何学的非常有力武器、今天的张量分析学当时叫做绝对微分学。

再者，1905年发表了特殊相对论的爱因斯坦（Albert Einstein）1916年在杂志 Annalen der Physik 上以「广义相对论的基础」（Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie）为题发表了前文的推广、广义相对论。爱因斯坦为了开展广义相对论，最大限度地利用了前记绝对微分学、即张量分析学，广义相对论的头一篇论文几乎用一半篇幅解说这种绝对微分学。

这样，黎曼几何学和它的研究方法、绝对微分学一跃而引起世人的注视。

爱因斯坦的广义相对论的头一篇论文发表后一年，列维·齐维塔发表了关于黎曼几何学里的平行性概念的论文（Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana, Rend. Palermo）。由于列维·齐维塔的这篇论文给当时主要做为分析理论研究的黎曼几何学好不容易恢复了几何学面目。

这种列维·齐维塔的见解给黎曼几何学及其推广在以后的发展上以非常大的影响。

首先，所谓黎曼几何学是高斯的曲面上的几何学在一般维数上的推广，在那里度量概念起非常重大的作用。当然，列维·齐维塔也是在这个度量概念的基础上在黎曼空间里引入了向量的平行性概念。

但是回过头来看，平行这个概念不是度量几何学的概念，而是仿射几何学的概念。故可考虑有否可能从黎曼几何学及其研究方法、绝对微分学将度量概念完全去掉，只留下仿射几何学概念再开展理论探讨。

如果在一般的空间里存在向量的平行性概念，那么可以考虑一种曲线，沿此曲线其切向量总是平行的。有度量概念的黎曼空间里这样的曲线叫做测地线，但在没有度量概念，只有平行性概念的空间里这样的曲线叫做道路（path）。反之，若在空间里存在道路系统，可由

此在空间里引入平行性概念。

如上所述，从列维·齐维塔的平行性概念得到启发，从黎曼空间将度量概念完全去掉，考虑只留下平行性概念的空间并开展理论探讨。首先作这种尝试的人是外尔 (Claus Hugo Hermann Weyl: Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2 (1918), 384～411; Raum, Zeit, Materie, Springer, 1921)。

外尔是重视了平行性概念，但重视上述道路的研究主要是云集在普林斯顿大学的微分几何学家爱森哈特 (Luther Pfahler Eisenhart)、魏伯伦(Oswald Veblen)、聂贝尔曼(M.S.Knebelman)、T.Y. 托马斯 (T. Y. Thomas)、J.M.托马斯 (J.M.Thomas)、罗伯特逊 (H. P. Robertson 等作的 (例如参照 L.P. Eisenhart and O. Veblen: The Riemannian geometry and its generalization, Proc. Nat. Acad. Sci., 8. (1922), 19～23)。

象外尔那样，重视平行性的概念来研究空间性质的几何学叫做仿射联络几何学；象普林斯顿学派那样，重视道路的概念来研究空间性质的几何学叫做道路的几何学。

外尔注意到：若在空间里有平行性概念，就可从其切向量互相平行的曲线导入道路的概念；但在空间里给定道路系统时，使切线沿道路平行的平行性并不唯一决定。如上所述，有时将平行性叫做仿射联络，但外尔发现了存在仿射联络的变换使道路系统保持不变。(H. Weyl,Zur Infinitesimalgeometrie:Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Göttinger Nachrichten, 1921, 99～112)。这叫做仿射联络的射影变换，外尔和普林斯顿学派研究了在这种射影变换下的不变性质，目前叫做道路的射影几何学。

荷兰学派的斯高天 (J. A. Schouten)，范但泽 (D.van Dantzig)，韩契斯 (J. Haantjes) 等使用完全不同的方法研究了这种一般 n 维空间的射影几何学。(例如参照 J. A. Schouten und J. Haantjes, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, Compositio Math., 3 (1936), 1～51)。

外尔进而考虑了黎曼空间的度量变换，在这种变换下长度概念改变而角度概念不变；在黎曼空间的性质中，只着眼于保角变换下不变性质的几何学由上记论文创始，叫做黎曼空间的共形几何学。前记普林斯顿学派采用了这种观点。（例如参照 O. Veblen, Conformal tensors and connexions, Proc. Nat. Acad. Sci. 14(1928), 735～745）。而前记荷兰学派用他们的独特方法展开了这种共形几何学的研究（例如参照 J. A. Schouten und J. Haantjes, Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie I,II, Math. Ann. 112(1936),595～629; 113(1938), 568～583)。

列维·齐维塔平行性规定了在空间一点的向量和离此点非常近的点的向量间在怎样的情况下才是平行的。以曲面为例说明如下。在曲面上一点曲面的切向量和离此点非常近的点同一曲面的切向量，当将第二向量正射影在第一点处的切平面上，所得向量与第一向量在普通意义下平行时，就说原来二向量平行。

嘉当(Elie Cartan)重新考虑了上述列维·齐维塔的想法如下。再以曲面为例继续说明之，在曲面的各点考虑曲面的切平面，在曲面上非常接近两点处的切平面间，根据将其中一个正射影在另一个上可以建立欧氏对应，嘉当把这种对应叫做联络。从这种观点看，曲面以及它的推广、黎曼空间可看做在非常接近两点处的切平面（更普遍些在切空间）之间建立一种欧氏对应的空间。从这个立场出发，嘉当把给定黎曼度量以及给定列维·齐维塔平行性概念的空间叫做欧氏联络空间。

根据嘉当的这种见解，黎曼空间是：在各点的切空间是欧氏空间，在非常接近两点的切欧氏空间之间建立了互相重合的规律即联络的空间。根据这种看法，可以想象如下空间：其各点处的切空间是仿射空间、射影空间或共形空间；在非常接近两点的切空间之间建立互相重合的规律，即分别是仿射、射影、共形对应。嘉当把这样空间分别叫做仿射联络空间，射影联络空间，共形联络空间。（例如参照

(E.Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. Ec. Norm. Sup. 40 (1923), 325～412; Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Pol. Math. 2 (1923), 171～221; Sur les variétés à connexion projective, Bull. Soc. Math. France, 52(1924), 205～241).

嘉当的这种看法可和根据变换群的立场将经典几何学分类的克莱因（Felix Klein）纲领媲美，给其后微分几何学研究以非常大的影响。

再回顾一下在上述历史进程中的 1920 年代日本几何学的研究状态。

如上所述，克莱因的看法是研究在运动群下图形的不变性质是欧氏几何学，研究在仿射群下图形的不变性质是仿射几何学，研究在射影变换下图形的不变性质是共形几何学。他将这种看法发表在有名的爱尔兰根纲领里（F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann. 43 (1893)). 根据这种见解，运用微积分学的手法与上述历史平行在1920年代里研究了各种几何学.(例如关于欧几里得微分几何学参照 W.Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Springer, 1921; 关于仿射微分几何学参照 W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, II. Affine Differentialgeometrie, Springer, 1923; 关于射影微分几何学参照 E. Cech et G. Fubini, Introduction à la géométrie différentielle projective des surfaces, Paris, 1931; W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, III, Springer, 1929).

从 1910 年到 1920 年代在日本沿着上述方向进行研究了，特别是云集在仙台东北大学的日本数学家：藤原松三郎、掛谷宗一、窪田忠彦，高须鹤三郎等关于卵形线的微分几何学研究都很有名.（例如

参照 T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Erg. der Math., Springer, 1934.）

但是，高须鹤三郎，河田商次等注意到上述的黎曼几何学及其研究方法、张量分析，以及正在研究中的它们的推广这样世界大势，从经典微分几何学的研究转向黎曼几何学及其推广（例如参照：高须鹤三郎著《わが空间の真相》，共立社，1933）.

河口商次转向黎曼空间的推广芬斯拉空间及其进一步推广所谓高次空间的研究，细川藤右卫门，本部均，穗刈四三二等参加了这种研究。此外，蟹谷乘养运用嘉当方法研究了射影微分几何学。

还有佐佐木重夫与著者运用上述普林斯顿学派的方法或嘉当的方法主要研究了射影联络几何学与共形联络几何学（例如参照：佐佐木重夫著《共形接续几何学》，河出书房，1948；K. Yano, Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths, Thèses, 1938）.

基于以上所说形势，著者整理了 1941 年夏在日土大学讲的讲义，1942 年由考方研究社出版的就是本书。当时，日本几何学界好不容易脱离了经典几何学的研究转向黎曼几何学及其推广，但尚没有适当的黎曼几何学参考书。因此，著者为说明张量分析初步与黎曼几何学概要才敢于写这本书。

但是这本书从写成已历时近 30 年，当然在这中间黎曼几何学有了飞跃发展，日本微分几何学界也有很大成长，研究者的人数异常增多。因此，现在重读此书，著者自己实在感到焦急。

但是，著者周围的人中有人说此书到现在做为黎曼几何学的入门书仍然合适，同时森北出版株式会社愿意给本书再发行一次，所以只把符号改成现代化的，以外都保留原样就再版了。

但是，从黎曼几何学的现状看，本书内容就算是入门的入门也不充分，所以在这里再举几本新参考书。

先从外国的说起。

L. Auslander, Differential geometry, A. Harper Interna-

tional Edition (1967).

L. Auslander and R. J. Mackenzie, Introduction to differentiable manifolds, McGraw-Hill, New York (1963).

R. Bishop and R. J. Crittenden, Geometry of manifolds, Academic Press (1964).

R. Bishop and S. I. Goldberg, Tensor analysis on manifolds, The MacMillan Company, New York (1968).

E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris (1928), 第二版 (1946).

A. J. McConnell, Applications of the absolute differential calculus, Blackie and Son, London and Grassgow (1931).

L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton Univ. Press (1926), 第二版, (1949).

J. C. H. Gerretsen, Lectures on tensor calculus and differential geometry, P. Noordhoff, Groningen (1962).

S. I. Goldberg, Curvature and homology, Academic Press, New York, (1962).

H. W. Guggenheimer, Differential geometry, McGraw-Hill Book Co. New York, (1963).

S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York, (1962).

N. Hicks, Notes on differential geometry, Van Nostrand, (1964).

W. V. D. Hodge, Theory and applications of harmonic integrals, Cambridge University Press, (1949).

S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differentia geometry, I, II, Interscience Publishers, (1963), (1968).

S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience Publishers, New York, (1961).

D. Laugwitz, Differential and Riemannian geometry, Academic Press, New York, (1965).

F. J. Lelong, Géométrie différentielle, Masson et Cie Editeurs, Paris, (1963).

T. Levi-Civita, The absolute differential calculus, Blackie and Son, London and Grassgow, (1927).

A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, (1958).

K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. Japan, No. 2. (1956).

B. O'Neill, Elementary differential geometry, Academic Press, New York and London, (1966).

G. de Rham, Variétés différentiables, Act. Sci. Hermann, Paris, (1955).

J. A. Schouten, Ricci-Calculus, Springer, Berlin, (1954).

S. Sternberg. Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, (1964).

C. E. Weatherburn, An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge University Press, (1938).

T. J. Willmore, An introduction to differential geometry, Clarendon Press, Oxford, (1959).

K. Yano, Integral formulas in Riemannian geometry, Marcel Dekker Inc., New York, (1970).

K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1953).

在这些书中，继本书之后读起来合适的是 R. Bishop and S. I. Goldberg, E. Cartan, A. J. McConnell, L. P. Eisenhart, J. C. H. Gerretsen, H. W. Guggenheimer, N. Hicks,

S. Kobayashi and K. Nomizu, D. Laugwitz, T. Levi-Civita, K. Nomizu, B. O'Neill, C. E. Weatherburn, T. J. Willmore 的书.

其次举日本的书.

栗田 稔 《黎曼几何》，至文堂（1965）；有中译本，东北工学院（1982）.

松岛与三《多样体[1]入门》，裳华房（1965）.

大槻富之助 《接续[2]の几何学》，现代数学讲座，共立出版（1957）.

佐佐木重夫 《黎曼几何学 I，II》，现代数学讲座，共立出版（1957）有中译本.

立花俊一 《黎曼几何学》近代数学讲座 15，朝仓书店（1967）. 有中译本 东北工学院（1981）.

矢野健太郎 《リーマン[3]几何学の概要と最近の微分几何学》，岩波书店（1942）.

———— 《接续の几何学》森北出版（1968）.

著者衷心希望这本小书仍然有用.

在本书校样之际得到琦玉大学奥村正文博士献身的协助，在此表示深切的谢意.

矢野健太郎 于日本东京

1971 年 3 月

1）流形　　2）联络　　3）黎曼（译者注）

目　　录

致中国读者
前　　言 …………………………………………………………… I

第一章　张量代数学

1.1　指标记法 ……………………………………………………13
1.2　关于求总和的规定 …………………………………………15
1.3　行列式 ………………………………………………………16
1.4　一次方程组 …………………………………………………19
1.5　齐线性变换 …………………………………………………20
1.6　在齐线性变换下的不变量，反变向量与共变向量 ………22
1.7　在齐线性变换下的张量 ……………………………………22
1.8　张量的加法，乘法与缩短 …………………………………24
1.9　关于张量的一个定理 ………………………………………26
1.10 向量的线性无关性 …………………………………………27
1.11 一般变量变换 ………………………………………………29
1.12 在一般变量变换下的不变量，向量与张量 ………………30
1.13 在一般变量变换下张量的加法，乘法与缩短 ……………35
1.14 关于一般变量变换下张量的一个定理 ……………………36

第二章　黎曼空间

2.1　黎曼度量　基本张量 ………………………………………38
2.2　曲线的长　向量的长 ………………………………………40
2.3　二向量间的夹角 ……………………………………………42
2.4　体积素 ………………………………………………………43

2.5 变分法的一个引理 ……45
2.6 测地线 ……46

第三章 绝对微分学

3.1 克氏记号 ……48
3.2 绝对微分或共变微分 ……51
3.3 梯度 旋度 散度 ……57
3.4 黎曼·克利斯托费尔张量 利齐张量 曲率数量 ……59
3.5 黎曼·克利斯托费尔张量与利齐张量的性质 ……61
3.6 比安基恒等式 ……63
3.7 黎曼曲率 ……64
3.8 休尔定理 ……65
3.9 平均曲率 利齐主方向 爱因斯坦空间 ……66
3.10 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 的空间 ……68
3.11 向量的平移 ……70
3.12 沿无穷小闭曲线向量的平移 ……73

第四章 曲线论

4.1 测地线方程的级数展开 ……75
4.2 测地坐标 ……76
4.3 法坐标 ……78
4.4 张量的展开 ……80
4.5 弗雷内·塞雷公式 ……84

第五章 曲面论

5.1 n 维黎曼空间 V_n 中的 m 维子空间 V_m ……87
5.2 切向量 法向量 ……91
5.3 V_n 的 $\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}$ 与 V_m 的 $\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}$ 之间的关系 ……92
5.4 沿 V_m 的广义共变微分 欧拉·斯高天曲率张量 ……93

5.5 子空间 V_m 上的曲线 ……96
5.6 平均曲率 平均曲率向量 ……98
5.7 曲率线 ……99
5.8 渐近曲线 …… 100
5.9 全测地曲面 全脐点曲面 …… 102
5.10 极小流形 …… 104
5.11 温加顿公式 …… 106
5.12 高斯，柯达齐和利齐方程 …… 107
5.13 黎曼曲率的几何意义 …… 110

第六章 平坦空间中的子空间

6.1 黎曼空间的类数 …… 116
6.2 类数 p 的黎曼空间 V_m …… 117
6.3 基本方程与基本定理 …… 119
6.4 列维·齐维塔平行性的几何意义 …… 125

第七章 变换论

7.1 微小运动 开玲方程 …… 129
7.2 黎曼空间的射影变换 …… 132
7.3 托麻斯的射影联络系数 …… 137
7.4 黎曼空间的共形变换 …… 139
7.5 外尔共形曲率张量 …… 142
7.6 黎曼空间与局部欧氏空间互相共形的条件 …… 146
7.7 V_n 中的 V_m 的共形性质……148
索 引…… 151

第一章　张 量 代 数 学

1.1　指标记法

在解析几何与微积分中出现三个独立变量时，普通用三个不同字母如 x，y，z 表达。可是今后在黎曼几何学或它的推广、现代微分几何学的研究上，却不用不同的字母而用一个字母，但为了加以区别附以不同的指标。即不采用 x，y，z；而用 x_1，x_2，x_3 更为方便。若采用这种记法，又可把它们写成

$$x_\kappa \quad (\kappa=1,\ 2,\ 3)$$

这种记法之所以方便，在于变量的数目是四个，五个，……，一般来说 n 个时，不用更改字母仅仅增加指标的号数就可以把它们表达出来，如

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n.$$

在上述记法中，把用来区分变量的指标写在字母的右下角了。但也可把它们写在右上角，如

$$x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1},\ x^n$$

或 $$x^\kappa \quad (\kappa=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n).$$

其实在本章要讲解的张量代数之中，巧妙地运用记在右上角的指标和记在右下角的指标进行讨论。以后自然可以理解到在表达自变量和坐标时记在右上角如

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots,\ x^n$$

好处多。

只是应该注意，即使记做 x^1，x^2，$x^3\cdots$，x^n 也决不是表达一次方，二次方，三次方，…，n 次方。记在 x 的右肩上的数字仅仅是为了区分变量的不同而已。

在代数学与解析几何学里，普通将 x，y，z 的一次式记做

$$ax+by+cz.$$

我们已经规定这里出现的变量 x，y，z 分别用 x^1，x^2，x^3 表达。此外如果用记号

$$a=a_1,\quad b=a_2,\quad c=a_3$$

表达 a，b，c，则上述一次式可以写得非常简洁如

$$\sum_{\lambda=1}^{3} a_\lambda x^\lambda = a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3.$$

这种记法尤其方便之处在于，当变量的数目为 n 时可以写成与上完全相同的形状

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda x^\lambda = a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

以上，对于表达变量的字母把指标记在右上角，而对于出现的常系数却记在右下角。为什么要这样作？好处在哪呢？只要读到关于求总和的规定就迎刃而解了。

作为运用指标记法的例，用指标记法改写代数学中的齐二次形。一般形状可写成

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy.$$

与前相同，令

$$x=x^1,\quad y=x^2,\quad z=x^3,$$

又令

$$a=a_{11},\quad b=a_{22},\quad c=a_{33}$$

$$f=a_{23}=a_{32},\quad g=a_{31}=a_{13},\quad h=a_{12}=a_{21},$$

则上列二次形变为

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\lambda=1}^{3} a_{\mu\lambda}x^\mu x^\lambda = {} & a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+a_{13}x^1x^3\\ & +a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+a_{23}x^2x^3\\ & +a_{31}x^3x^1+a_{32}x^3x^2+a_{33}x^3x^3.\end{aligned}$$

这样一来，当变量的数目为 n 个时，二次形也可简写为

$$\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda} = a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \cdots + a_{1n}x^1x^n$$
$$+ a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \cdots + a_{2n}x^2x^n$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \cdots + a_{nn}x^nx^n.$$

1.2　关于求总和的规定

当今后学习黎曼几何学时，一般以 n 维空间为研究对象，故 x^1，x^2，…的个数为 n，因此指标的活动范围是在从 1 到 n 的条件下讨论。再者，在前节所论一次形

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda}x^{\lambda}$$

和二次形

$$\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}$$

里，由 1 加到 n 求总和的指标在各项中出现两次。因此，只要规定

如果在各项中相同指标出现两次，一个在上另一个在下，则其含义是关于这种指标求从 1 到 n 的总和，

这时可略去 $\sum\limits_{\lambda=1}^{n}$ 或 $\sum\limits_{\mu,\lambda=1}^{n}$，简写成

$$a_{\lambda}x^{\lambda} = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$
$$a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda} = a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \cdots + a_{1n}x^1x^n$$
$$+ a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \cdots + a_{2n}x^2x^n$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \cdots + a_{nn}x^nx^n$$

非常方便。

今后我们就采取这样规定。应该注意的是重复两次的指标仅仅表示求从 1 到 n 的总和，用其它指标代换也行。例如，

$$a_{\lambda}x^{\lambda} = a_{\mu}x^{\mu} = a_{\nu}x^{\nu} = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

$$
\begin{aligned}
a_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda} = a_{\beta\alpha}x^{\beta}x^{\alpha} = {} & a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \cdots + a_{1n}x^1x^n \\
& + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \cdots + a_{2n}x^2x^n \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \cdots + a_{nn}x^nx^n.
\end{aligned}
$$

这样，要设法使求总和指标出现在上下双方才好发挥作用。

与此相反，有时也使用不表示求总和的指标。例如，

n 个变量　　x^{κ}　$(\kappa = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，

n 个常系数　　a_{λ}　$(\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，

n^2 个常系数　　$a_{\mu\lambda}$　$(\mu,\ \lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

等。以后，大体上指标从 1 变到 n，因此就不每次都加附注而规定：

今后如果不特殊声明，用希腊字母 α，β，γ，$\cdots$，κ，λ，μ，ν，$\cdots$ 等表示的指标总是从 1 变到 n。

即规定用 x^{κ} 表示

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots,\ x^n,$$

用 a_{λ} 表示

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,$$

用 $a_{\mu\lambda}$ 表示

$$
\begin{array}{l}
a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots,\ a_{1n}, \\
a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots,\ a_{2n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3},\ \cdots,\ a_{nn}.
\end{array}
$$

1.3 行列式

在这节里用指标记法改写行列式的几个常见性质。首先考虑 n 阶行列式

$$
a = \begin{vmatrix}
a_1^1 & a_2^1 \cdots a_n^1 \\
a_1^2 & a_2^2 \cdots a_n^2 \\
\cdots & \cdots\cdots \\
a_1^n & a_1^n \cdots a_n^n
\end{vmatrix}.
$$

式中用 a_μ^λ 表示行列式的元素，右上指标表示行列式 a 中这个元素所在的行数，而右下指标表示这个元素所在的列数。

如果这些元素满足条件

$$a_\mu^\lambda = a_\lambda^\mu$$

时，就说这个行列式是对称的；如果满足条件

$$a_\mu^\lambda = -a_\lambda^\mu$$

时，就说这个行列式是反称的。

今将行列式 a 沿第一行展开之得

$$a_1^1\begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2\cdots a_n^2 \\ a_2^3 & a_3^3\cdots a_n^3 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_2^n & a_3^n\cdots a_n^n \end{vmatrix} - a_2^1\begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2\cdots a_n^2 \\ a_1^3 & a_3^3\cdots a_n^3 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_1^n & a_3^n\cdots a_n^n \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1}a_n^1\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2\cdots a_{n-1}^2 \\ a_1^3 & a_2^3\cdots a_{n-1}^3 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_1^n & a_2^n\cdots a_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

如果设 A_1^1，A_1^2，…，A_1^n 分别表示 a_1^1，a_2^1，…，a_n^1 的系数，即行列式 a 中 a_1^1，a_2^1，…，a_n^1 的代数余子式，则上式变为

$$a = a_1^1A_1^1 + a_2^1A_1^2 + \cdots + a_n^1A_1^n.$$

与此完全相同，欲求沿第二行，第三行，……等的展开，用 A_λ^μ 表示行列式 a 中 a_μ^λ 的代数余子式便得

$$a = a_1^2A_2^1 + a_2^2A_2^2 + a_3^2A_2^3 + \cdots + a_n^2A_2^n,$$

$$a = a_1^3A_3^1 + a_2^3A_3^2 + a_3^3A_3^3 + \cdots + a_n^3A_3^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a = a_1^nA_n^1 + a_2^nA_n^2 + a_3^nA_n^3 + \cdots + a_n^nA_n^n.$$

如果用前述指标记法改写之，则这些式子变得非常简单如下所示。

$$a = {}_\nu^1A_1^\nu,\quad a = a_\nu^2A_2^\nu,\quad a = a_\nu^3A_3^\nu,\quad \cdots,\quad a = a_\nu^nA_n^\nu.$$

应该注意在这些式子里 a 的右上指标与 A 的右下指标总相同。试问它

们不同时究竟表示什么呢？以 $a_\nu^1 A_2^\nu$ 为例说明之。

$$a_\nu^1 A_2^\nu = a_1^1 A_2^1 + a_2^1 A_2^2 + a_3^1 A_2^3 + \cdots + a_n^1 A_2^n,$$

式中 a_1^1，a_2^1，a_3^1，…，a_n^1 是行列式 a 的第一行元素，但 A_2^1，A_2^2，…，A_2^n 是行列式 a 的第二行元素 a_1^2，a_2^2，…，a_n^2 的代数余子式。因此，上式是向行列式 a 的第一行各元素分别乘以第二行相应元素的代数余子式并相加而得之和，故由行列式的周知性质可见，这个值恒为 0。同理，$a_\nu^\kappa A_\mu^\nu$ 是向行列式 a 的第 κ 行元素分别乘以第 μ 行对应元素的代数余子式并相加而得之和。于是，$a_\nu^\kappa A_\mu^\nu$ 这样式子，当 κ 与 μ 相等时表示行列式的值，当 κ 与 μ 不等时恒为 0 。这个事实可用

$$a_\nu^\kappa A_\mu^\nu = a\delta_\mu^\kappa$$

表示。式中 δ_μ^κ 是一个符号，当 $\kappa=\mu$ 时表示 1，当 $\kappa\neq\mu$ 时表示 0，它叫做**克朗纳格**（L. Kronecker）的**德耳他**。即

$$\delta_\mu^\kappa = \begin{cases} 1 & \kappa=\mu, \\ 0 & \kappa\neq\mu. \end{cases}$$

到目前为止讨论了沿行列式的行展开，完全一样，如果沿列展开可得

$$a_\mu^\nu A_\nu^\kappa = a\delta_\mu^\kappa.$$

今设 $a\neq 0$，令

$$\frac{A_\mu^\nu}{a} = \alpha_\mu^\nu,$$

则上列二公式可写做

$$a_\nu^\kappa \alpha_\mu^\nu = \delta_\mu^\kappa,\quad a_\mu^\nu \alpha_\nu^\kappa = \delta_\mu^\kappa.$$

我们还知道二行列式

$$a = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \cdots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \cdots a_n^2 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_1^n & a_2^n \cdots a_n^n \end{vmatrix} \quad 与 \quad b = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \cdots b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \cdots b_n^2 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_1^n & b_2^n \cdots b_n^n \end{vmatrix}$$

之积间有公式

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \cdots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^n & a_2^n \cdots a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \cdots b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \cdots b_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_1^n & b_2^n \cdots b_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + \cdots + a_n^1 b_1^n, & a_1^1 b_2^1 + \cdots + a_n^1 b_2^n, & \cdots, & a_1^1 b_n^1 + \cdots + a_n^1 b_n^n \\ a_1^2 b_1^1 + \cdots + a_n^2 b_1^n, & a_1^2 b_2^1 + \cdots + a_n^2 b_2^n, & \cdots, & a_1^2 b_n^1 + \cdots + a_n^2 b_n^n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^n b_1^1 + \cdots + a_n^n b_1^n, & a_1^n b_2^1 + \cdots + a_n^n b_2^n, & \cdots, & a_1^n b_n^1 + \cdots + a_n^n b_n^n \end{vmatrix}$$

如果用指标记法，此式可以写得很简单。

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \cdots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^n & a_2^n \cdots a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \cdots b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \cdots b_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_1^n & b_2^n \cdots b_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\nu^1 b_1^\nu, & a_\nu^1 b_2^\nu, & \cdots, & a_\nu^1 b_n^\nu \\ a_\nu^2 b_1^\nu, & a_\nu^2 b_2^\nu, & \cdots, & a_\nu^2 b_n^\nu \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_\nu^n b_1^\nu, & a_\nu^n b_2^\nu, & \cdots, & a_\nu^n b_n^\nu \end{vmatrix}$$

1.4 一次方程组

考虑含 n 个未知数 x^1，x^2，…，x^n 的 n 个一次方程

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n &= b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n &= b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots + a_n^n x^n &= b^n. \end{aligned}$$

出现在这些方程左边的系数所作成的行列式是前节讲过的行列式。用指标记法表示上述方程得

$$a_\mu^\lambda x^\mu = b^\lambda.$$

众所周知，当系数 a_μ^λ 作成的行列式 a 不是0时，则从上方程可解出未知数 x^μ。今用指标记法可将解法简化，说明如下。因由假设行列式 a 的值不是0，故令行列式 a 中元素 a_μ^λ 的代数余子式为 A_λ^μ，又令

$$\alpha_\lambda^\mu = \frac{A_\lambda^\mu}{a},$$

则由前节的结论可见

$$\alpha_{\lambda}^{\nu}a_{\mu}^{\lambda}=\delta_{\mu}^{\nu} \quad 与 \quad \alpha_{\nu}^{\mu}a_{\mu}^{\lambda}=\delta_{\nu}^{\lambda}。$$

故用 α_{λ}^{ν} 乘

$$a_{\mu}^{\lambda}x^{\mu}=b^{\lambda}$$

的两边，并关于 λ 求从 1 到 n 的总和得

$$\alpha_{\lambda}^{\nu}a_{\mu}^{\lambda}x^{\mu}=\alpha_{\lambda}^{\nu}b^{\lambda},$$

即

$$\delta_{\mu}^{\nu}x^{\mu}=\alpha_{\lambda}^{\nu}b^{\lambda}.$$

然因 $\delta_{\mu}^{\nu}x^{\mu}$ 表示 n 个量：

当 $\nu=1$ 时表示 $\delta_1^1x^1+\delta_2^1x^2+\delta_3^1x^3+\cdots+\delta_n^1x^n$,

当 $\nu=2$ 时表示 $\delta_1^2x^1+\delta_2^2x^2+\delta_3^2x^3+\cdots+\delta_n^2x^n$,

……………………………………………………

当 $\nu=n$ 时表示 $\delta_1^nx^1+\delta_2^nx^2+\delta_3^nx^3+\cdots+\delta_n^nx^n$。

回忆关于 δ_{μ}^{ν} 的规定，显然第一式表示 x^1，第二式表示 x^2，…，第 n 式表示 x^n。故得

$$\delta_{\mu}^{\nu}x^{\mu}=x^{\nu}.$$

即

$$x^{\nu}=\alpha_{\lambda}^{\nu}b^{\lambda}.$$

以上是以克拉美（Cramer）定律称著的解法在指标记法下的表示。

1.5 齐线性变换

考虑 n 个互相独立的 n 个变量 x^1, x^2, …, x^n 变为互相独立的 n 个新变量 $x^{1'}$, $x^{2'}$, …, $x^{n'}$ 的齐线性变换

$$x^{1'}=A_1^{1'}x^1+A_2^{1'}x^2+\cdots+A_n^{1'}x^n,$$

$$x^{2'}=A_1^{2'}x^1+A_2^{2'}x^2+\cdots+A_n^{2'}x^n,$$

……………………………………

$$x^{n'}=A_1^{n'}x^1+A_2^{n'}x^2+\cdots+A_n^{n'}x^n.$$

但假设变换的行列式 $A=|A_{\kappa}^{\kappa'}|$ 的值不是 0。用指标记法可将这些变换式写做

$$x^{\kappa'}=A_{\kappa}^{\kappa'}x^{\kappa}.$$

然因 $A=|A_\kappa^{\kappa'}|\neq 0$，故可从方程组

$$A_{\kappa'}^{\lambda}A_{\mu}^{\kappa'}=\delta_{\mu}^{\lambda}$$

解出 $A_{\kappa'}^{\lambda}$。因此，用它可将前式中的 x^κ 解出，得

$$x^\kappa=A_{\kappa'}^{\kappa}x^{\kappa'}.$$

即前面考虑的齐线性变换的逆变换仍然是齐线性变换。

特别当 $A_\lambda^{\kappa'}=\delta_\lambda^\kappa$ 时得

$$x^{\kappa'}=\delta_\lambda^\kappa x^\lambda=x^\kappa,\qquad |A_\lambda^{\kappa'}|=1\neq 0,$$

这样的齐线性变换叫做**恒等变换**。

再设在齐线性变换

$$x^{\kappa'}=A_\kappa^{\kappa'}x^\kappa\qquad(|A_\kappa^{\kappa'}|\neq 0)$$

下将变量 x^κ 变为 $x^{\kappa'}$，又在齐线性变换

$$x^{\kappa''}=A_{\kappa'}^{\kappa''}x^{\kappa'}\qquad(|A_{\kappa'}^{\kappa''}|\neq 0)$$

下将变量 $x^{\kappa'}$ 变为变量 $x^{\kappa''}$，则将变量 x^κ 直接变为 $x^{\kappa''}$ 的变换式是

$$x^{\kappa''}=A_{\kappa'}^{\kappa''}A_\kappa^{\kappa'}x^\kappa.$$

故令

$$A_{\kappa'}^{\kappa''}A_\kappa^{\kappa'}=A_\kappa^{\kappa''}$$

时，则

$$x^{\kappa''}=A_\kappa^{\kappa''}x^\kappa,$$

而且从

$$|A_\kappa^{\kappa''}|=|A_{\kappa'}^{\kappa''}A_\kappa^{\kappa'}|=|A_{\kappa'}^{\kappa''}|\cdot|A_\kappa^{\kappa'}|\neq 0$$

可见，由两个齐线性变换复合而成的，将 x^κ 直接变到 $x^{\kappa''}$ 的变换仍然是一个齐线性变换。

当某变换的集满足下列三条件时就说这个集作成**群**。

（i）如果将 x^κ 变为 $x^{\kappa'}$ 的变换以及将 $x^{\kappa'}$ 变为 $x^{\kappa''}$ 的变换都属于这个集，则将 x^κ 直接变为 $x^{\kappa''}$ 的变换也属于这个集。

（ii）这个变换的集包含恒等变换。

（iii）如果某变换属于这个集，则其逆变换存在，并且也属于这个集。

故齐线性变换全体而成的集作成群。

1.6 在齐线性变换下的不变量，反变向量与共变向量

今有变量 x^1，x^2，…，x^n 的函数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，如果在变量的齐线性变换

$$x^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa} \qquad (A_{\kappa}^{\kappa'} \text{ 是常数})$$

下，此函数的值不变，就说在齐线性变换下此量是**不变量**或**数量**。

又有变量 x^1，x^2，…，x^n 的 n 个函数 v^1，v^2，…，v^n，如果在变量的齐线性变换 $x^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa}$ 下，这些函数的变化规律是

$$v^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa}$$

时，就说函数 $v^1, v^2, \cdots$，v^n 是一**反变向量的分量**。故变量本身 x^1，x^2，…，x^n 也是一反变向量的分量。

又有变量 x^1，x^2，…，x^n 的 n 个函数 v_1，v_2，…，v_n，如果在变量的齐线性变换下，这些函数的变换规律是

$$v_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} v_{\lambda},$$

就说函数 v_1，v_2，…，v_n 是一**共变向量的分量**。

今设 v_1，v_2，…，v_n 为一共变向量的分量，用它们当系数作一次形

$$v_{\lambda} x^{\lambda} = v_1 x^1 + v_2 x^2 + \cdots + v_n x^n,$$

则此一次形是不变量。原因是，如果在变量变换下 v_{λ} 与 x^{λ} 分别按前述规律变为 $v_{\lambda'}$ 与 $x^{\lambda'}$，则

$$v_{\lambda'} x^{\lambda'} = (A_{\lambda'}^{\lambda} v_{\lambda})(A_{\mu}^{\lambda'} x^{\mu}) = (A_{\lambda'}^{\lambda})(A_{\mu}^{\lambda'}) v_{\lambda} x^{\mu} = \delta_{\mu}^{\lambda} v_{\lambda} x^{\mu} = v_{\lambda} x^{\lambda}.$$

如上所示，今后我们规定将反变向量的分量的指标记在右上角，共变向量的分量的指标记在右下角以资区别。

1.7 在齐线性变换下的张量

设 u^{λ} 与 v^{κ} 分别是反变向量的分量，则在变量的齐线性变换 $x^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa}$ 下这些函数分别变为

$$u^{\lambda'} = A_{\lambda}^{\lambda'} u^{\lambda}, \qquad v^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa}.$$

故 u^{λ} 与 v^{κ} 相乘而得到的 n^2 个函数 $u^{\lambda} v^{\kappa}$ 在上述变量的齐线性变换

下的变换规律是

$$u^{\lambda'}v^{\kappa'}=A_{\lambda}^{\lambda'}A_{\kappa}^{\kappa'}u^{\lambda}v^{\kappa}\ .$$

推而广之，有带两个指标的 n^2 个函数如 $T^{\lambda\kappa}$，在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$T^{\lambda'\kappa'}=A_{\lambda}^{\lambda'}A_{\kappa}^{\kappa'}T^{\lambda\kappa}$$

时，就说这些函数是**二阶反变张量的分量**.

再设 u_μ，v_λ 分别为共变向量的分量．因为这些函数在齐线性变换下的变换规律分别是

$$u_{\mu'}=A_{\mu'}^{\mu}u_\mu \quad 与 \quad v_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}v_\lambda,$$

故 u_μ 与 v_λ 相乘而得到的 n^2 个函数 $u_\mu v_\lambda$ 的变换规律是

$$u_{\mu'}v_{\lambda'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}u_\mu v_\lambda\ .$$

象这样，带两个指标的 n^2 个函数 $T_{\mu\lambda}$ 在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}T_{\mu\lambda}$$

时，就说这些函数是**二阶共变张量的分量**.

用方才定义的共变张量的分量 $T_{\mu\lambda}$ 为系数，变量 x^λ 的二次形 $T_{\mu\lambda}x^\mu x^\lambda$ 是不变量．原因是，

$$\begin{aligned}T_{\mu'\lambda'}x^{\mu'}x^{\lambda'}&=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}T_{\mu\lambda}A_{\omega}^{\mu'}x^{\omega}A_{\nu}^{\lambda'}x^{\nu}\\&=(A_{\mu'}^{\mu}A_{\omega}^{\mu'})(A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\nu}^{\lambda'})T_{\mu\lambda}x^{\omega}x^{\nu}\\&=\delta_{\omega}^{\mu}\delta_{\nu}^{\lambda}T_{\mu\lambda}x^{\omega}x^{\nu}\\&=T_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}\ .\end{aligned}$$

最后设 u^κ 为一反变向量的分量，v_λ 为一共变向量的分量．这些函数在变量的齐线性变换下的变换规律分别是

$$u^{\kappa'}=A_{\kappa}^{\kappa'}u^{\kappa},\qquad v_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}v_\lambda,$$

故它们相乘作出 n^2 个函数 $u^\kappa v_\lambda$，在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$u^{\kappa'}v_{\lambda'}=A_{\kappa}^{\kappa'}A_{\lambda'}^{\lambda}u^{\kappa}v_{\lambda}.$$

象这样，带两个指标的 n^2 个函数 $T^{\kappa}{}_{\lambda}$ 在变量的齐线性变换下的变换规律是

$$T^{\kappa'}{}_{\lambda'} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} T^{\kappa}{}_{\lambda}$$

时，就说这些函数是**二阶混合张量的分量.**

进一步推广上述定义，可以定义**任意阶张量**. 例如，变换规律是

$$T^{\mu'\lambda'\kappa'} = A^{\mu'}_{\mu} A^{\lambda'}_{\lambda} A^{\kappa'}_{\kappa} T^{\mu\lambda\kappa}$$

的 n^3 个函数 $T^{\mu\lambda\kappa}$ 叫做**三阶反变张量的分量**. 变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

的 n^3 个函数 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 叫做**三阶混合张量的分量**. 而变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa}_{\kappa'} T_{\mu\lambda\kappa}$$

的 n^3 个函数 $T_{\mu\lambda\kappa}$ 叫做**三阶共变张量的分量**. 故不变量是0阶张量，反变向量是一阶反变张量，共变向量是一阶共变张量.

1.8 张量的加法，乘法与缩短

设有二同类张量，例如 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，求它们的分量之和

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = T_{\mu\lambda}{}^{\kappa},$$

则 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$, $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是同类张量的分量. 原因是，因为 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 分别是张量的分量，所以在变量的齐次变换下其变换规律是

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

以及

$$S_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

边边相加得

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} + S_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} (R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}),$$

即

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

求这样一个新张量叫做求**二张量的和.**

根据完全一样的论法可以证明同类张量的分量之差，例如

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} - S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

也是一同类新张量的分量，它叫做**二张量的差**. 只要二张量是同类的，不论它们的阶数如何，都可定义和与差. 当然二向量 u^{κ} 与 v^{κ} 的和 $u^{\kappa} + v^{\kappa}$ 或差 $u^{\kappa} - v^{\kappa}$ 也包括在这个定义之中.

根据这种理由，令二同类张量的分量相等而得之式

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

是**张量的方程**。即此式若对一种变量系成立，则对由其齐线性变换得到的其他任何变量系此方程也成立。原因是，如果对于某变量系 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 成立，就是对于此变量系，张量的分量

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}-S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

全是0。由张量分量的变换式可见，此张量的分量对于任何变量系也全是0。

其次考虑任意种类的两个张量，例如反变向量 R^{κ} 与二阶共变张量 $S_{\mu\lambda}$。今将这些分量全部相乘得

$$R^{\kappa}S_{\mu\lambda}=T^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\ .$$

这样得到的量 $T^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$ 也是一张量的分量。原因是，因为 R^{κ} 与 $S_{\mu\lambda}$ 都是张量的分量，所以在变量变换下的变换规律分别是

$$R^{\kappa'}=A^{\kappa'}_{\kappa}R^{\kappa},\qquad S_{\mu'\lambda'}=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}S_{\mu\lambda}\ ,$$

故将此二式相乘得

$$R^{\kappa'}S_{\mu'\lambda'}=A^{\kappa'}_{\kappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}R^{\kappa}S_{\mu\lambda},$$

即

$$T^{\kappa'}{}_{\mu'\lambda'}=A^{\kappa'}_{\kappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}T^{\kappa}{}_{\mu\lambda}.$$

这样，有任意类型的两个张量，从其分量相乘求出新张量的分量叫做求**二张量的积**。

当二张量中的一个是数量时，也可求上述的积。例如，一数量 ρ 与一反变向量 v^{κ} 的积 ρv^{κ} 也是反变向量。一般地说某张量乘以数量可得同类张量。

在张量代数学里除了加法，乘法两种代数运算外，尚有叫做缩短的一种特殊运算。今以四阶混合张量 $T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 为例说明之。因为 $T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$为一张量的分量，则在变量的齐线性变换下此量的变换规律是

$$T_{\nu'\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}=A^{\nu}_{\nu'}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\kappa'}_{\kappa}T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

在此式中令 $\kappa'=\nu'$，关于此指标求从 $1'$ 到 n' 的总和，则得

$$T_{\nu'\mu'\lambda'}{}^{\nu'}=A^{\nu}_{\nu'}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\nu'}_{\kappa}T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

$$= \delta^{\nu}_{\kappa} A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$
$$= A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} T_{\nu\mu\lambda}{}^{\nu} .$$
此式说明 $T_{\nu\mu\lambda}{}^{\nu}$ 是一个新的二阶共变张量的分量。这样，在一个张量的分量中令其一个右上指标即**反变指标**与一个右下指标即**共变指标**相等，求从 1 到 n 的总和，作出一个减少两个指标的新张量，这种运算叫做将此张量关于二指标**缩短**。

以上所说张量的乘法与缩短可以同时继续进行。例如，用二张量 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S^{\omega\nu}$ 先求乘积 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\omega\nu}$，其次关于指标 ω 与 μ 缩短作$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\nu}$，再关于 λ 与 ν 缩矩得 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda}$。

1.9 关于张量的一个定理

如在前节之末所述，如果 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S^{\omega\nu}$ 都是张量的分量，由此经相乘，缩短的运算而得
$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda} = T^{\kappa}$$
也是一张量的分量。反之，如果 $S^{\mu\lambda}$ 与 T^{κ} 都是张量的分量，试问 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是不是张量的分量呢？关于这点下列定理成立。

定理 设在
$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda} = T^{\kappa}$$
里，$S^{\mu\lambda}$ 为任意张量的分量时 T^{κ} 总是张量的分量，则 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 也是一张量的分量。

原因是，作变量变换时设 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，$S^{\mu\lambda}$，$T^{\kappa}$ 分别为 $R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}$，$S^{\mu'\lambda'}$，$T^{\kappa'}$，则
$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}S^{\mu'\lambda'} = T^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa}T^{\kappa} = A^{\kappa'}_{\kappa}R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda},$$
另一方面，
$$S^{\mu'\lambda'} = A^{\mu'}_{\mu}A^{\lambda'}_{\lambda}S^{\mu\lambda} .$$
故得
$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}A^{\mu'}_{\mu}A^{\lambda'}_{\lambda}S^{\mu\kappa} = A^{\kappa'}_{\kappa}R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda},$$
即
$$(R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}A^{\mu'}_{\mu}A^{\lambda'}_{\lambda} - A^{\kappa'}_{\kappa}R_{\mu\lambda}{}^{\kappa})S^{\mu\lambda} = 0 .$$

然因 $S^{\mu\lambda}$ 是完全任意的量，故由上式得

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}A^{\mu'}_{\mu}A^{\lambda'}_{\lambda}=A^{\kappa'}_{\kappa}R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

此式关于 $R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}$ 解之得

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\kappa'}_{\kappa}R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

此式说明 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是一张量的分量，于是定理得证。

虽就三个特殊类型的张量讨论了定理的证明，但对于一般情况显然也成立。

做为上述定理的特例，常常用到下面的定理。

定理 当 u_κ，v^λ，w^μ 分别为三个完全任意的共变与反变向量的分量时，

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}u_\kappa v^\mu w^\lambda$$

总是不变量，则 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是一张量的分量。

当然，这个定理对于一般类型的张量也成立。

1.10 向量的线性无关性

今有 m 个反变向量 $h^{\kappa}_{(1)}$，$h^{\kappa}_{(2)}$，$\cdots$，$h^{\kappa}_{(m)}$。如果存在不全为 0 的 m 个数 $c_{(1)}$，$c_{(2)}$，$\cdots$，$c_{(m)}$ 满足方程组

$$c_{(1)}h^{\kappa}_{(1)}+c_{(2)}h^{\kappa}_{(2)}+\cdots+c_{(m)}h^{\kappa}_{(m)}=0,$$

就说 m 个向量 $h^{\kappa}_{(1)}$，$h^{\kappa}_{(2)}$，$\cdots$，$h^{\kappa}_{(m)}$ **线性相关**。反之，如果不存在不全为 0 的 m 个数 $c_{(1)}$，$c_{(2)}$，$\cdots$，$c_{(m)}$；换句话说，满足上式的只有 $c_{(1)}=c_{(2)}=\cdots=c_{(m)}=0$ 的情况，就说 $h^{\kappa}_{(1)}$，$h^{\kappa}_{(2)}$，$\cdots$，$h^{\kappa}_{(m)}$ **线性无关**。

试问 m 个向量 $h^{\kappa}_{(1)}$，$h^{\kappa}_{(2)}$，$\cdots$，$h^{\kappa}_{(m)}$ 线性无关的充要条件是什么？因为

$$c_{(1)}h^{\kappa}_{(1)}+c_{(2)}h^{\kappa}_{(2)}+\cdots+c_{(m)}h^{\kappa}_{(m)}=0,$$

即

$$\begin{aligned}
&c_{(1)}h^{1}_{(1)}+c_{(2)}h^{1}_{(2)}+\cdots+c_{(m)}h^{1}_{(m)}=0,\\
&c_{(1)}h^{2}_{(1)}+c_{(2)}h^{2}_{(2)}+\cdots+c_{(m)}h^{2}_{(m)}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_{(1)}h^{n}_{(1)}+c_{(2)}h^{n}_{(2)}+\cdots+c_{(m)}h^{n}_{(m)}=0
\end{aligned}$$

的成立只有 $c_{(1)}=c_{(2)}=\cdots=c_{(m)}=0$ 之时，故由代数学的众所周知定理可见，矩阵

$$\begin{pmatrix} h_{(1)}^{1}, & h_{(2)}^{1}, & \cdots, & h_{(m)}^{1} \\ h_{(1)}^{2}, & h_{(2)}^{2}, & \cdots, & h_{(m)}^{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{(1)}^{n}, & h_{(2)}^{n}, & \cdots, & h_{(m)}^{n} \end{pmatrix}$$

的秩为 m 是 $h_{(1)}^{\kappa}$，$h_{(2)}^{\kappa}$，…，$h_{(m)}^{\kappa}$ 线性无关的充要条件。故在 n 维空间里至多存在 n 个线性无关的向量。即若在 n 维空间里取 $n+1$ 个向量，则它们必线性相关。今设 $h_{(1)}^{\kappa}$，$h_{(2)}^{\kappa}$，…，$h_{(n)}^{\kappa}$ 是 n 个线性无关向量，v^{κ} 是一任意向量；则 $n+1$ 个向量 v^{κ}，$h_{(1)}^{\kappa}$，$h_{(2)}^{\kappa}$，…，$h_{(n)}^{\kappa}$ 必线性相关。因此，应存在不全为 0 的 $n+1$ 个数 $c_{(0)}$，$c_{(1)}$，$c_{(2)}$，…，$c_{(n)}$ 满足

$$c_{(0)}v^{\kappa}+c_{(1)}h_{(1)}^{\kappa}+c_{(2)}h_{(2)}^{\kappa}+\cdots+c_{(n)}h_{(n)}^{\kappa}=0.$$

式中 $c_{(0)}$ 不是 0。原因是，如果设 $c_{(0)}=0$，则对于不全为 0 的 n 个数 $c_{(1)}$，$c_{(2)}$，…，$c_{(n)}$，方程

$$c_{(1)}h_{(1)}^{\kappa}+c_{(2)}h_{(2)}^{\kappa}+\cdots+c_{(n)}h_{(n)}^{\kappa}=0$$

成立，与 $h_{(1)}^{\kappa}$，$h_{(2)}^{\kappa}$，…，$h_{(n)}^{\kappa}$ 线性无关的假设矛盾。如果 $c_{(0)}\neq 0$，则可从上式解出 v^{κ} 得

$$v^{\kappa}=-\frac{c_{(1)}}{c_{(0)}}h_{(1)}^{\kappa}-\frac{c_{(2)}}{c_{(0)}}h_{(2)}^{\kappa}-\cdots-\frac{c_{(n)}}{c_{(0)}}h_{(n)}^{\kappa}.$$

即任意向量 v^{κ} 是 n 个线性无关向量 $h_{(1)}^{\kappa}$，$h_{(2)}^{\kappa}$，…，$h_{(n)}^{\kappa}$ 的线性组合，即可写成

$$v^{\kappa}=v_{(1)}h_{(1)}^{\kappa}+v_{(2)}h_{(2)}^{\kappa}+\cdots+v_{(n)}h_{(n)}^{\kappa}$$

的形状。而且只要给定 $h_{(1)}^{\kappa}$，$h_{(2)}^{\kappa}$，…，$h_{(n)}^{\kappa}$，则这里出现的系数 $v_{(1)}$，$v_{(2)}$，…，$v_{(n)}$ 就唯一决定。

原因是，设除了

$$v^{\kappa}=v_{(1)}h_{(1)}^{\kappa}+v_{(2)}h_{(2)}^{\kappa}+\cdots+v_{(n)}h_{(n)}^{\kappa}$$

以外，尚有另有一种表示方法如

$$v^{\kappa}=v'_{(1)}h_{(1)}^{\kappa}+v'_{(2)}h_{(2)}^{\kappa}+\cdots+v'_{(n)}h_{(n)}^{\kappa},$$

此二式边边相减得

$$0=(v_{(1)}-v'_{(1)})h^{\kappa}_{(1)}+(v_{(2)}-v'_{(2)})h^{\kappa}_{(2)}+\cdots+(v_{(n)}-v'_{(n)})h^{\kappa}_{(n)}.$$

由于 $h^{\kappa}_{(1)}$，$h^{\kappa}_{(2)}$，…，$h^{\kappa}_{(n)}$ 线性无关的假设知

$$v_{(1)}=v'_{(1)},\quad v_{(2)}=v'_{(2)},\quad \cdots,\quad v_{(n)}=v'_{(n)}.$$

1.11 一般变量变换

在这节里考虑从变量 x^{κ} 到变量 $x^{\kappa'}$ 的变换是由一般的函数

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

给定的情况。但假设式中的 n 个函数 $x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 关于变量 x^1，x^2，…，x^n 有适当次数的连续可微性，而且反过来可解出 x^1，x^2，…，x^n 如下。

$$x^{\kappa}=x^{\kappa}(x^{1'},\ x^{2'},\ \cdots,\ x^{n'}).$$

象这样，可把 $x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\cdots,\ x^n)$ 关于变量 x^1，x^2，…，x^n 可解出的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

在变量的取值范围内不是 0。上述行列式叫做函数 $x^{\kappa'}$ 关于变量 x^{κ} 的**函数行列式或雅可比行列式**。有时将此函数行列式略记为

$$\frac{\partial(x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'},\ \cdots,\ x^{n'})}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots,\ x^n)}\quad 或\quad \left|\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\right|\quad 或\quad \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|.$$

当此函数行列式不为 0 时，就说 n 个函数 $x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 独立。这时，n 个函数

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

关于变量 x^1，x^2，…，x^n 可以解出来。

设根据函数

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

将变量 x^κ 变为变量 $x^{\kappa'}$，根据函数

$$x^{\kappa''}=x^{\kappa''}(x^{1'},\ x^{2'},\ \cdots,\ x^{n'})$$

将变量 $x^{\kappa'}$ 变为变量 $x^{\kappa''}$，则 $x^{\kappa''}$ 间接对 x^κ 求偏导数得

$$\frac{\partial x^{\kappa''}}{\partial x^\kappa}=\frac{\partial x^{\kappa''}}{\partial x^{\kappa'}}\ \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}.$$

故 $x^{\kappa'}$ 关于 x^κ 的函数行列式 $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$，$x^{\kappa''}$ 关于 $x^{\kappa'}$ 的函数行列式 $\left|\frac{\partial x''}{\partial x'}\right|$ 与 $x^{\kappa''}$ 关于 x^κ 的函数行列式 $\left|\frac{\partial x''}{\partial x}\right|$ 之间有关系式

$$\left|\frac{\partial x''}{\partial x}\right|=\left|\frac{\partial x''}{\partial x'}\right|\cdot\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|.$$

在上述关系式中，令

$$x^{\kappa''}=x^\kappa,$$

因为

$$\frac{\partial x^{\kappa''}}{\partial x^\nu}=\delta^\kappa_\nu\ ,$$

所以得

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\mu'}}\ \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}=\delta^\kappa_\nu\ ,$$

故得

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\cdot\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|=1.$$

1.12 在一般变量变换下的不变量，向量与张量

在 1.6 节和 1.7 节定义了在变量的齐线性变换下的数量、向量、张量等．讨论这样的定义能否推广到一般变量变换的情况上去是本节的问题．

（i）**不变量** 今有变量 x^1，x^2，…，x^n 的函数，在变量的一般变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

下，此函数不变其值，即

$$f'(x^{1'},\ x^{2'},\ \cdots,\ x^{n'})=f(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

时，就说 $f(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 是**不变量或数量的分量**。

（ii）**反变向量** 设给出变量的一般变换的函数为

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n),$$

求两边的微分得

$$dx^{\kappa'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^2}dx^2+\cdots+\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^n}dx^n,$$

即

$$dx^{\kappa'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}dx^{\kappa}.$$

设变量变换的反变换为

$$x^{\kappa}=x^{\kappa}(x^{1'},\ x^{2'},\ \cdots,\ x^{n'}),$$

求两边的微分得

$$dx^{\kappa}=\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{1'}}dx^{1'}+\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{2'}}dx^{2'}+\cdots+\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{n'}}dx^{n'},$$

即

$$dx^{\kappa}=\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}dx^{\kappa'}.$$

换句话说，即使变量作一般的变量变换，但此变量的微分却作**齐线性变换**。与前几节讲的齐线性变换本质上不同之点只是系数 $\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}$ 或 $\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}$ 和以前的 $A^{\kappa'}_{\kappa}$ 或 $A^{\kappa}_{\kappa'}$ 不同，不一定是常数，一般是变量的**函数**。

我们把向量概念推广到一般变量变换上去，和 dx^{κ} 有相同变换规律的 n 个量叫做**反变向量的分量**。即，有 n 个变量 x^{κ} 的 n 个函数 $v^{\kappa}(x)$，在变量 x^{κ} 的变换下，它们的变换规律是

$$v^{\kappa'}(x')=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}v^{\kappa}(x)$$

时，就说这 n 个函数是一反变向量的分量。

(iii) **共变向量** 在（i）中已经学到在一般变量变换下不变量的分量 $f(x)$ 的变换式是

$$f'(x')=f(x) .$$

此式对变量 $x^{\lambda'}$ 求偏导数。具体计算之得

$$\frac{\partial f'}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{\lambda'}}+\frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{\lambda'}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial x^{\lambda'}}$$

即
$$\frac{\partial f'}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda},$$

故 n 个函数 $\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ 也作齐线性变换。但系数不一定是常数。它和 dx^κ 的变换规律正好相反。这个事实叫做 dx^κ 的变换规律和 $\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ 的变换规律是互相**反傾**的。

仿照前例，与 $\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ 有相同变换规律的 n 个函数叫做**共变向量的分量**。即，有变量 x^κ 的 n 个函数 $v_\lambda(x)$，在变量的一般变换下的变换规律是

$$v_{\lambda'}(x')=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}v_\lambda(x)$$

时，就说此 n 个函数是**共变向量的分量**。前述不变量对各变量求偏导数而得函数是共变向量的分量的一例。这样，求不变量的偏导数而得共变向量普通叫做**梯度**。

(iv) **张量** 已经把不变量，反变向量，共变向量的概念推广到一般变量变换的情况上去了，因此要想把张量概念推广到一般变量变换的情况上来不是难事。

例如，有三个指标的 n^3 个函数 $T_{\mu\lambda}{}^\kappa(x)$，若在一般变量变换下的变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}(x')=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}T_{\mu\lambda}{}^\kappa(x)$$

时，就说 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}(x)$ 是**张量的分量**。正确地说 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是关于 κ 反变，关于 μ 与 λ 共变的三阶混合张量。以前也说过，在目前情况下 κ 是**反变指标**，μ 与 λ 是**共变指标**。

一般地说，只有反变指标的张量叫做**反变张量**，只有共变指标的张量叫做**共变张量**，反变指标和共变指标都有的张量叫做**混合张量**。

在这里将以后经常出现的二阶张量讲得仔细一些。

二阶张量也有三种如下所示：

二阶反变张量 $T^{\lambda\kappa}$ 的变换规律是

$$T^{\lambda'\kappa'}=\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}T^{\lambda\kappa},$$

二阶混合张量 $T_{\lambda}{}^{\kappa}$ 的变换规律是

$$T_{\lambda'}{}^{\kappa'}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}T_{\lambda}{}^{\kappa},$$

二阶共变张量 $T_{\mu\lambda}$ 的变换规律是

$$T_{\mu'\lambda'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}T_{\mu\lambda}.$$

当一个张量 $T_{\mu\lambda}$ 满足

$$T_{\mu\lambda}=T_{\lambda\mu}$$

时，就说此张量关于 μ 与 λ **对称**；满足

$$T_{\mu\lambda}=-T_{\lambda\mu}$$

时，就说此张量关于 μ 与 λ **反称**。

以下继续说明关于 μ 与 λ 对称的张量 $g_{\mu\lambda}$。在变量变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

下，$g_{\mu\lambda}$ 的变换规律是

$$g_{\mu'\lambda'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\lambda}.$$

故考虑以 $g_{\mu\lambda}$ 为元素的行列式

$$g=\begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \cdots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \cdots, & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \cdots, & g_{nn} \end{vmatrix},$$

则其变换规律是

$$g'=\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\cdot\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\cdot g,$$

即

$$g'=\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g .$$

在一般变量变换下作如上变换的 g 叫做**权为 2 的密度。**

令元素 $g_{\mu\lambda}$ 在行列式里的代数余子式为 $G^{\lambda\mu}$，以前已经说明

$$g_{\mu\lambda}G^{\lambda\kappa}=g\delta^{\kappa}_{\mu}.$$

如果 $g_{\mu\lambda}$ 关于 μ 与 λ 对称，则 $G^{\lambda\kappa}$ 也关于 λ 与 κ 对称. 现在假设 $g\neq 0$，令

$$\frac{G^{\lambda\kappa}}{g}=g^{\lambda\kappa},$$

则由前式得

$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\kappa}=\delta^{\kappa}_{\mu}.$$

如果 $g_{\mu\lambda}$ 是二阶共变张量，则上面定义的 $g^{\lambda\kappa}$ 是二阶反变张量. 以下说明之.

首先在一般变量变换下，上式变为

$$g_{\mu'\lambda'}g^{\lambda'\kappa'}=\delta^{\kappa'}_{\mu'}.$$

因为 $g_{\mu\lambda}$ 是共变张量的分量，所以

$$g_{\mu'\lambda'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\lambda}.$$

代入上式得

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\lambda}g^{\lambda'\kappa'}=\delta^{\kappa'}_{\mu'}.$$

向此式的两边乘 $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\omega}}$，关于 μ' 求从 $1'$ 到 n' 的总和，得

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\omega}}\ \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\ \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\omega}} \delta^{\kappa'}_{\mu'},$$

$$\delta^{\mu}_{\omega} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}}, \quad \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\omega\lambda} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}}.$$

其次向此式的两边乘 $g^{\nu\omega}$，关于 ω 求从 1 到 n 的总和得

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\omega\lambda} g^{\nu\omega} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x_{\omega}} g^{\nu\omega},$$

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \delta^{\nu}_{\lambda} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}} g^{\nu\omega}, \quad \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda'}} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}} g^{\nu\omega}.$$

再向此式两边乘 $\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}$，关于 ν 求从 1 到 n 的总和得

$$\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda'}} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\ \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}} g^{\nu\omega},$$

$$\delta^{\nu'}_{\lambda'} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\ \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} g^{\nu\kappa}, \quad g^{\nu'\kappa'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\ \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} g^{\nu\kappa}.$$

此式说明 $g^{\nu\kappa}$ 是一反变张量的分量，由此我们的主张得证。这个 $g^{\nu\kappa}$ 叫做与共变张量 $g_{\mu\lambda}$ **共轭**的反变张量。

1.13 在一般变量变换下张量的加法，乘法与缩短

在 1.8 节已经讨论过在变量的齐线性变换下张量的加法，乘法与缩短。完全一样的说法也适用于一般变量变换下张量的加法，乘法与缩短。以下简单说明之。

（i）**加法** 有两个同类张量，例如 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，以各分量之和

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

为分量的量仍然是与 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 以及 $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 同类的张量． 这个张量叫做二张量之和。至于证明，只要将 1.8 节中的 $A^{\kappa'}_{\kappa}$ 改为 $\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}$，将 $A^{\kappa}_{\kappa'}$ 改

为 $\dfrac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}$，和 1.8 节的完全一样，故从略。

（ii）**乘法** 有二张量，例如 $R_{\nu\mu}$ 与 $S_{\lambda}{}^{\kappa}$，以这些分量之积

$$R_{\nu\mu}S_{\lambda}{}^{\kappa}=T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

为分量的量也是一张量的分量。它叫做二张量的积。

（iii）**缩短** 这里有一个混合张量，例如 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，让指标 κ 与 μ 相等并求从 1 到 n 的总和，令

$$T_{\mu\lambda}{}^{\mu}=T^{\lambda},$$

则得比先前给定的张量少两个指标的张量。这种演算叫做关于指标 κ 与 μ 的**缩短**。

今有一反变向量 u^{κ} 与一共变向量 v_{λ}，作它们的**乘积**

$$u^{\kappa}v_{\lambda},$$

则得一个二阶混合张量。在此式中关于 κ 与 λ 缩短，作

$$u^{\lambda}v_{\lambda},$$

则得少两个指标的张量，即不变量。它叫做反变向量 u^{κ} 与共变向量 v_{λ} 的**内积**。

1.14 关于一般变量变换下张量的一个定理

对于一般变量变换下的张量，1.9 节里所说定理也成立。证明与以前的完全一样，在这里仅将结论重复一次。例如，

如果 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是 n^3 个函数，对于任意的张量 $S^{\mu\lambda}$，

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda}=T^{\kappa}$$

总是张量（在此例中是向量），则 $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 也是一张量的分量。这时，如果 $S^{\mu\lambda}$ 是对称张量，则 $\dfrac{1}{2}(R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}+R_{\lambda\mu}{}^{\kappa})$ 是张量的分量。

做为此定理的应用，考虑二次微分形式

$$g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}.$$

一般这里的 $g_{\mu\lambda}$ 是变量 x^{κ} 的函数，因为它是二次形式的系数，故可设关于 μ 与 λ 对称，即

$$g_{\mu\lambda} = g_{\lambda\mu}$$

并不失其普遍性。

再者，假设二次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ 是一不变量，即数量。这时，此二次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ 的系数是一个二阶共变张量的分量。

原因是，变量的微分 dx^{μ} 是一反变向量的分量。故 $dx^{\mu}dx^{\lambda}$ 是一个二阶对称反变张量的分量。然因 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ 总是一个不变量，故由前面定理知

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\lambda} + g_{\lambda\mu}) = g_{\mu\lambda}$$

是一共变张量的分量。

这个事实也可直接证明如下。作变量变换

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

时，设二次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ 变为 $g_{\mu'\lambda'}dx^{\mu'}dx^{\lambda'}$，由此二次微分形式是不变量这个假设得

$$g_{\mu'\lambda'}dx^{\mu'}dx^{\lambda'} = g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}.$$

注意

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}dx^{\mu'}, \quad dx^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}dx^{\lambda'},$$

则上式又变为

$$g_{\mu'\lambda'}dx^{\mu'}dx^{\lambda'} = g_{\mu\lambda}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}dx^{\mu'}dx^{\lambda'}.$$

然因 $dx^{\mu'}$，$dx^{\lambda'}$ 是任意的，故由上式得

$$g_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\lambda}.$$

此式说明 $g_{\mu\lambda}$ 是一个二阶共变张量的分量。

第二章 黎曼空间

2.1 黎曼度量 基本张量

在三维欧氏空间里，直角坐标分别为 (x, y, z) 与 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 的非常接近两点间的距离是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

如果采用球坐标

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

时，则决定 ds^2 的上述公式变为

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 .$$

再在三维欧氏空间里考虑由参数

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

给定的二维曲面，则对应于参数值分别为 (u,v) 与 $(u+du, v+dv)$ 的曲面上非常接近两点 (x, y, z) 与

$$\left(x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \right.$$

$$\left. z + \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)$$

之间的距离 ds 是

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 .$$

但

$$\begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 . \end{cases}$$

不论看哪个例，非常接近两点间的距离 ds 的平方都是坐标的微分的二次形式。

黎曼推广了这种想法，在他的著名论文 B.Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, (1854), Habilitationsschrift 里考虑了

由带有坐标系的邻域即坐标邻域复盖，在各坐标邻域里坐标分别为（x^κ）与（$x^\kappa+dx^\kappa$）的两点间的无穷小距离 ds 由坐标的微分的二次形式

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

给定的 n 维流形。

我们说由上述二次微分形式定义的度量是**黎曼度量**，度量是黎曼度量的空间叫做**黎曼空间**。研究黎曼空间以及其中图形的性质的科学叫做**黎曼几何学**。

我们定义了 ds 为

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda \quad ,$$

若二次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ 不总是正或 0 时，则 ds 不总是实数。因此假设二次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ 是正定二次形式。于是由二次形式的周知定理可见，用系数 $g_{\mu\lambda}$ 作成的行列式 g

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots\cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots\cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots\cdots & g_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

决不是 0。

固然在特殊和广义相对论里应用的黎曼几何学必须考虑二次微分形式未必正定的度量。然而，要想知道黎曼几何学是什么，先从上述假设出发是自然的。

上面定义的 ds 是两点间的距离，纯系几何概念，故必须是与坐标变换

$$x^{\lambda'}=x^{\lambda'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$
无关的量即不变量，即 ds 或 ds^2 必须是一个不变量。既然 $ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ 是一个不变量，则由第一章末所说事实可见 $g_{\mu\lambda}$ 是关于 μ 与 λ 对称的一个共变张量的分量．我们说这个共变张量是黎曼空间的**基本共变张量**。因为以基本共变张量的分量为元素作成的 n 行 n 列行列式 g 的值不是 0，故由第一章 1.12 节证明的定理知道，从
$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\kappa}=\delta_\mu^\kappa$$
可以解出关于 λ 与 κ 对称的一个反变张量 $g^{\lambda\kappa}$，它叫做黎曼空间的**基本反变张量**。

利用基本共变张量 $g_{\mu\lambda}$ 与基本反变张量 $g^{\lambda\kappa}$ 按如下方法可从一个反变向量 v^κ 作出共变向量 v_λ，从一个共变向量 v_λ 作出反变向量 v^κ。
$$v_\lambda=v^\mu g_{\mu\lambda},\qquad v^\kappa=v_\lambda g^{\lambda\kappa}.$$
对于张量也可施行这种运算。例如
$$T_{\mu\lambda}{}^\kappa=T_{\mu\lambda\alpha}g^{\alpha\kappa},\qquad T_{\mu\lambda\kappa}=T_{\mu\lambda}{}^\alpha g_{\alpha\kappa}.$$
这种运算叫做用 $g^{\lambda\kappa}$ 升标，用 $g_{\mu\lambda}$ 降标，用基本张量升标后再降标，或者降标后再升标就恢复原状。原因是，例如
$$v^\kappa=v^\alpha\delta_\alpha^\kappa=v^\alpha(g_{\alpha\lambda}g^{\lambda\kappa})=(v^\alpha g_{\alpha\lambda})g^{\lambda\kappa}.$$
故在存在基本张量的黎曼空间里，我们认为反变张量，混合张量，共变张量间并不存在区别，存在的是一个张量的反变分量，混合分量与共变分量是合适的。

例如

以 v^κ 表达的几何对象与

以 v_λ 表达的几何对象

都是向量，但一个是用反变分量 v^κ 表达，另一个是用共变分量 v_λ 表达。v^κ 与 v_λ 之间的关系是
$$v^\kappa=v_\lambda g^{\lambda\kappa},\qquad v_\lambda=v^\alpha g_{\alpha\lambda}.$$

2.2 曲线的长　向量的长

如果黎曼空间中点的坐标 x^κ 由一个参数 t 的函数

$$x^\kappa = x^\kappa(t)$$

给定时，则对应于参数值 t 与 $t+dt$，曲线上两点

$$x^\kappa(t), \qquad x^\kappa(t)+\frac{dx^\kappa}{dt}dt$$

间的距离 ds 由

$$ds=\sqrt{g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}}dt$$

而定。故从参数为 $t=t_1$ 的曲线上点到参数为 $t=t_2$ 的点间之弧长由积分

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}}\,dt$$

决定。如果取这样定义的 s 做为曲线的参数便得恒等式

$$g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\lambda}{ds}=1.$$

仔细看看 ds 的定义式

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda,$$

此式说明从点 x^κ 到 $x^\kappa+dx^\kappa$，分量为 dx^κ 的反变向量之长是 ds。

与此相同，设一向量的反变向量为 u^κ，则由

$$(u)^2=g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda$$

给定的不变量 u 定义**向量 u^κ 之长（或模）**。故恒等式

$$1=g_{\mu\lambda}\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\lambda}{ds}$$

说明：表达曲线的切向量的反变向量 $\frac{dx^\kappa}{ds}$ 之长是1。这样，长为1的向量叫做**单位向量**。

设某向量的反变分量为 u^κ，其共变分量 u_λ 可由

$$u_\lambda=u^\alpha g_{\alpha\lambda}$$

给出。故求此向量之长的公式 $(u)^2=g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda$ 又可写成

$$(u)^2=u_\lambda u^\lambda.$$

再注意

$$u^{\kappa}=u_{\lambda}g^{\lambda\kappa}\ ,$$

上式又可写成

$$(u)^2=g^{\lambda\kappa}u_{\lambda}u_{\kappa}.$$

2.3 二向量间的夹角

在三维欧氏空间里取一直角坐标轴，则方向余弦分别为（l_1，m_1，n_1），（l_2，m_2，n_2）的二方向的夹角 θ 可由

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$

而定，式中的（l_1，m_1，n_1），（l_2，m_2，n_2）分别满足

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \quad 与 \quad l_2^2+m_2^2+n_2^2=1\ ,$$

故都可看做单位向量的分量。

又在三维欧氏空间里取一斜交坐标轴。设它们间的夹角分别为 α，β，γ；则方向系数分别为（l_1，m_1，n_1），（l_2，m_2，n_2）的二方向的夹角 θ 可由

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2+(m_1n_2+m_2n_1)\cos\alpha$$
$$(n_1l_2+n_2l_1)\cos\beta+(l_1m_2+l_2m_1)\cos\gamma$$

给出。式中（l_1，m_1，n_1），（l_2，m_2，n_2）分别满足

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2+2m_1n_1\cos\alpha+2n_1l_1\cos\beta+2l_1m_1\cos\gamma=1$$

与 $$l_2^2+m_2^2+n_2^2+2m_2n_2\cos\alpha+2n_2l_2\cos\beta+2l_2m_2\cos\gamma=1,$$

故都可看做单位向量的分量。

参照这些例子，在黎曼空间里用

$$\cos\theta=g_{\mu\lambda}u^{\mu}v^{\lambda}$$

定义二单位向量 u^{κ} 与 v^{κ} 间的夹角是极其自然的。显然这个量是不变量，即它的值不因坐标的取法而改变。但是为了说明这个定义有意义，必须证出 $g_{\mu\lambda}u^{\mu}v^{\lambda}$ 的绝对值小于1．为此，考虑向量 $t\cdot u^{\kappa}+v^{\kappa}$ 的长。由关系 $g_{\mu\lambda}u^{\mu}u^{\lambda}=1$，$g_{\mu\lambda}v^{\mu}v^{\lambda}=1$ 得

$$g_{\mu\lambda}(t\cdot u^{\mu}+v^{\mu})(t\cdot u^{\lambda}+v^{\lambda})=t^2+2t\cdot g_{\mu\lambda}u^{\mu}v^{\lambda}+1.$$

然而此式左边不论 t 取任何值总不是负。故

$$t^2+2tg_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda+1$$

的判别式为负或0。因此

$$(g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda)^2-1\leqslant 0$$

此式说明 $g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda$ 的绝对值小于1。由此证出上述角的定义是有意义的。

如上所述，二向量 u^κ 与 v^κ 是单位向量时，可以定义其间的夹角。如果二者之一，或全不是单位向量时，怎样定义其间的夹角呢？在这种情况下，u^κ 与 v^κ 分别用它们的长除，使之变为单位向量

$$\frac{u^\kappa}{\sqrt{(g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda)}},\qquad \frac{v^\kappa}{\sqrt{(g_{\mu\lambda}v^\mu v^\lambda)}},$$

然后再考虑它们的夹角即可.当然，这是因为一个向量用不是0的正不变量乘或除表示与原向量同向的向量。求此二单位向量间的夹角 θ 得

$$\cos\theta=\frac{g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda}{\sqrt{(g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda)}\sqrt{(g_{\mu\lambda}v^\mu v^\lambda)}}.$$

这是定义一般二向量 u^κ 与 v^κ 的夹角 θ 的表达式。设 u^κ 与 v^κ 的长分别用 u，v 表示，则由上式得

$$uv\cos\theta=g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda.$$

此式的右边又可写做

$$g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda=u_\lambda v^\lambda=u^\mu v_\mu,$$

如前所述，此不变量叫做二向量 u^κ 与 v^κ 的**内积**。即二向量的内积是各长度之积乘以夹角的余弦。

特别是二向量 u^κ 与 v^κ 正交的条件由 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 得

$$g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda=0,\qquad u_\lambda v^\lambda=0\quad 或\quad u^\lambda v_\lambda=0.$$

2.4 体积素

在三维欧氏空间里，取夹角分别为 α，β，γ 的斜交轴 x，y，z，则其体积素 dV 是

$$dV = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dxdydz .$$

再考虑由参数表示

$$x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) , \quad z = z(u, v)$$

给定的二维曲面，它的面积素 dS 是

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dudv.$$

把这些推广到黎曼空间的体积素上来，定义

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

因为体积素是纯几何量，所以必须证明由上式定义的量与坐标的取法无关，即不变量。然从微积分知道在坐标变换

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

下，$dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ 这个量的变换式是

$$dx^{1'} dx^{2'} \cdots dx^{n'} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

而以 $g_{\mu\lambda}$ 为元素的行列式 g 的变换式是

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g$$

如第一章 1.12 节所示。故如 $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| > 0$，则其平方根 $\sqrt{g}$ 的变换式是

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{g} .$$

于是 $dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ 的变换式与$\sqrt{g}$的变换式相乘，注意$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = 1$ 得

$$\sqrt{g'}\, dx^{1'} dx^{2'} \cdots dx^{n'} = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

此式说明在黎曼空间里定义的体积素 dV 确实是不变量． 能够选择坐标邻域恒可使 $\left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right|>0$ 的空间叫做**可定向的**.

2.5 变分法的一个引理

考虑通过黎曼空间中两点P与Q的曲线 $x^\kappa(t)$。设P与Q是对应于参数值为 $t=t_1$，$t=t_2$ 的曲线上的点。研究沿此曲线的一个积分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}F(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n;\ \dot{x}^1;\ \dot{x}^2,\ \cdots,\ \dot{x}^n)dt.$$

但设式中 $\dot{x}^\kappa=\dfrac{dx^\kappa}{dt}$，$F$是 $2n$ 个变量 x^κ，$\dot{x}^\kappa$ 的函数。

其次取通过P，Q与 $x^\kappa(t)$ 非常近的另一条曲线

$$\overline{x}^\kappa(t)=x^\kappa(t)+\varepsilon\cdot v^\kappa(t),$$

式中 ε 为无穷小常数，

$$v^\kappa(t_1)=v^\kappa(t_2)=0.$$

沿此曲线考虑上记积分，以 $\overline{I}$ 记之，则得

$$\begin{aligned}\overline{I}&=\int_{t_1}^{t_2}F(x^1+\varepsilon\cdot v^1,\ x^2+\varepsilon\cdot v^2,\ \cdots,\ x^n+\varepsilon\cdot v^n;\\&\qquad x^1+\varepsilon\cdot\dot{v}^1,\ \dot{x}^2+\varepsilon\cdot\dot{v}^2,\ \cdots,\ \dot{x}^n+\varepsilon\cdot\dot{v}^n)dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[F+\varepsilon\cdot\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda+\cdots\right]dt\\&=I+\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda\right]dt+\cdots.\end{aligned}$$

式中 $\dot{v}=\dfrac{d}{dt}v^\lambda$。由上式可见，

$$\overline{I}-I=\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda\right]dt+\cdots.$$

令此式右边里 ε 的系数为 δI，根据分部积分法计算之得

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda dt+\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda}v^\lambda\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda}\right)v^\lambda dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda}\right)\right]v^\lambda dt\text{.}$$

对于满足 $v^\lambda(t_1)=v^\lambda(t_2)=0$ 的任意函数 $v^\kappa(t)$，$\delta I=0$ 时，就说积分 I 沿曲线 $x^\kappa(t)$ 是**临界的**（或取**临界值**）。故积分 I 沿曲线 $x^\kappa(t)$ 取临界值的充要条件是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda}\right)-\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}=0$$

在变分法里此式叫做**欧拉微分方程**。

2.6 测地线

在度量由

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

给定的一个黎曼空间里，从一曲线 $x^\kappa(t)$ 上一点 $x^\kappa(t_1)$ 到另一点 $x^\kappa(t_2)$ 的曲线弧长由积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\mu\lambda}\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda}\,dt$$

而定。使此积分取临界值的曲线 $x^\kappa(t)$ 叫做黎曼空间的**测地线**。它恰好是欧氏空间中直线的推广。现在求它的微分方程。将

$$F=\sqrt{g_{\mu\lambda}\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda}$$

代入欧拉微分方程，因为

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha}=\frac{g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\mu\lambda}\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda}}=\frac{g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu}{\dfrac{ds}{dt}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}}{\sqrt{g_{\mu\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}}}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}}{\frac{ds}{dt}},$$

故得

$$\frac{g_{\mu\alpha}\ddot{x}^{\mu}}{\frac{ds}{dt}}+\frac{\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}}{\frac{ds}{dt}}-\frac{g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\mu}\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}}{\frac{ds}{dt}}=0,$$

即得

$$g_{\mu\alpha}\ddot{x}^{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}-g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\mu}\frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}=0.$$

但式中令

$$\ddot{x}^{\mu}=\frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2}.$$

再向上式乘以 $g^{\kappa\alpha}$ 并关于 α 从 1 加到 n，注意 $g^{\kappa\alpha}g_{\alpha\mu}=\delta^{\kappa}_{\mu}$，则得

$$\ddot{x}^{\kappa}+\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}-\dot{x}^{\kappa}\frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}=0.$$

在此式中，令 $s=t$，则得

$$\frac{d^2 x^{\kappa}}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds}=0.$$

这是以弧长 s 为参数的测地线的微分方程。

第三章 绝对微分学

3.1 克氏记号

在前章之末，讨论了黎曼空间中的测地线微分方程是

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\kappa\omega}\left(\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\omega}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\lambda}{ds}=0.$$

左边第二项的系数普通写做

$$\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}=\frac{1}{2}g^{\kappa\omega}\left(\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\omega}\right),$$

叫做**克氏三指标记号**，简称**克氏记号**。显然，$\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}$ 关于 μ 与 λ 对称，即

$$\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}=\left\{{}_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu}\right\},$$

但它不是张量的分量。现在研究在坐标变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

下它的变化规律。

先将 $g_{\lambda\omega}$ 的变换式

$$g_{\lambda'\omega'}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\ \frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}g_{\lambda\omega}$$

对 $x^{\mu'}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial g_{\lambda'\omega'}}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\ \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\ \frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}\ \frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\ \frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}g_{\alpha\omega}$$

$$+\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\omega'}}g_{\lambda\alpha},$$

同理，$g_{\mu'\omega'}$ 与 $g_{\mu'\lambda'}$ 分别对 $x^{\lambda'}$ 与 $x^{\omega'}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial g_{\mu'\omega'}}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\ \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\ \frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}\ \frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}}\ \frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}g_{\alpha\omega}+$$

$$+\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\omega'}}g_{\mu\alpha},$$

$$\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\omega'}}=\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\omega}}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\omega'}\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\alpha\lambda}$$

$$+\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\omega'}\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\alpha},$$

故得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda'\omega'}}{\partial x^{\mu'}}+\frac{\partial g_{\mu'\omega'}}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\omega'}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}$$

$$\times\left(\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\omega}}\right)+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}g_{\alpha\omega}$$

此式两边乘以

$$g^{\kappa'\omega'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\omega'}}{\partial x^{\delta}}g^{\kappa\delta}$$

关于 ω' 从1加到 n 求总和得

$$\left\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\right\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right).$$

这是**克氏记号**的变换式，但一般来说 $\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\neq 0$，因此一般 $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$不是张量的分量。上列变换式又可写做

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\left\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\right\}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}.$$

这种形状以后很常用。

其次求克氏记号满足的几个重要恒等式。先从定义式

$$\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\varepsilon}}\right)$$

得

$$\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right),$$

同理得 $$\left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} g_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} \right).$$

故将这些式子边边相加得

$$\left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} g_{\alpha\lambda} + \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} g_{\mu\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}.$$

再对 x^{ν} 求恒等式

$$g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^{\lambda}_{\beta}$$

的偏导数得 $$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0.$$

将前述恒等式得到的

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} = g_{\varepsilon\beta} \left\{ {\varepsilon \atop \nu\alpha} \right\} + g_{\alpha\varepsilon} \left\{ {\varepsilon \atop \nu\beta} \right\}$$

代入此式第二项，则

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha} \left(g_{\varepsilon\beta} \left\{ {\varepsilon \atop \nu\alpha} \right\} + g_{\alpha\varepsilon} \left\{ {\varepsilon \atop \nu\beta} \right\} \right) = 0,$$

故得 $$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha} g_{\varepsilon\beta} \left\{ {\varepsilon \atop \nu\alpha} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \nu\beta} \right\} = 0.$$

此式两边乘以 $g^{\beta\kappa}$，并关于 β 从 1 加到 n 求总和，则得恒等式

$$\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \left\{ {\lambda \atop \nu\alpha} \right\} g^{\alpha\kappa} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} g^{\lambda\alpha} = 0.$$

最后，在 $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ 中令 $\kappa=\lambda$ 并从 1 加到 n 求总和得 $\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\}$。以下计算这个 $\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\}$。由定义知

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}}.$$

然因用 $g_{\lambda\alpha}$ 作成的行列式 g 中 $g_{\alpha\lambda}$ 的代数余子式 $G^{\lambda\alpha}$ 除以 g 是 $g^{\lambda\alpha}$，

故得 $$\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2g} G^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}}.$$

然因 $G^{\lambda\alpha} \dfrac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}}$ 等于行列式的各行分别对 x^{μ} 求偏导数而得 n 个

行列式之和，故正好等于行列式 g 对 x^μ 的偏导数，因此得

$$\left\{{\lambda \atop \mu\lambda}\right\}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial x^\mu}.$$

这也是有用的恒等式.

3.2 绝对微分或共变微分

3.2.1 不变量的绝对微分或共变微分 设 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 为一不变量的分量，则此函数的值在坐标变换下不变，即

$$f'(x')=f(x).$$

此式两边对坐标 $x^{\lambda'}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial f'}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$

此式说明不变量 f 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ 是一共变向量的分量. 它叫做不变量 f 的**绝对导数或共变导数**[1]，用

$$\nabla_\lambda f=\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

表示. 如果考虑不变量 f 在 dx^λ 方向上的微分，则得 $df=dx^\lambda\nabla_\lambda f$，当然它也是不变量. 这个不变量叫做 f 在 dx^λ 方向上的**共变微分**或**绝对微分**，用

$$\delta f=df$$

表示.

3.2.2. 共变向量的绝对微分或共变微分 上述事实对于向量已不合适. 例如共变向量 u_λ 的变换式是

$$u_{\lambda'}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}u_\lambda$$

对坐标 $x^{\mu'}$ 求此式的偏导数得

1) 目前普遍使用共变导数这个词.（译者注）

$$\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}u_{\alpha},$$

可见$\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}$不是张量的分量。今将 $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 的变换式

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\{{}^{\alpha'}_{\mu'\lambda'}\}-\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}$$

代入此式得

$$\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}u_{\alpha}\{{}^{\alpha'}_{\mu'\lambda'}\}-\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}u_{\alpha}\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\},$$

即 $$\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}-\{{}^{\alpha'}_{\mu'\lambda'}\}u_{\alpha'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left(\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}u_{\alpha}\right).$$

此式说明

$$\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}u_{\alpha}$$

是一个二阶张量的分量。它叫做向量 u_{λ} 的**绝对导数**或**共变导数**，记做

$$\nabla_{\mu}u_{\lambda}=\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}u_{\alpha}.$$

这个共变导数乘以 dx^{μ} 并缩短之，叫做在 dx^{μ} 方向上的**绝对微分**或**共变微分**，记做

$$\delta u_{\lambda}=du_{\lambda}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}dx^{\mu}u_{\alpha}.$$

它和 u_{λ} 一样是共变向量。

3.2.3 反变向量的绝对微分或共变微分 与前相同，对于反变向量 u^{κ} 也可以定义绝对导数或共变导数。

反变向量 u^{κ} 的变换式

$$u^{\kappa'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}u^{\kappa}$$

或 $$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}u^{\kappa'}=u^{\kappa}$$

对坐标 $x^{\mu'}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}u^{\lambda'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}.$$

将 $\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}$ 的变换式

$$\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\{{}_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}\}-\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}$$

代入此式得

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}}+\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\{{}_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}\}u^{\lambda'}-\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}u^{\lambda'}$$

$$=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{\mu}},$$

即

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\left(\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}}+\{{}_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}\}u^{\lambda'}\right)=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\left(\frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}+\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}u^{\lambda}\right).$$

此式又可写做

$$\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}}+\{{}_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}\}u^{\lambda'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\left(\frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}+\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}u^{\lambda}\right),$$

这说明

$$\frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}+\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}u^{\lambda}$$

是一个二阶张量的分量。它叫做反变向量 u^{κ} 的**绝对导数**或**共变导数**，记做

$$\nabla_{\mu}u^{\kappa}=\frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}+\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}u^{\lambda}.$$

此绝对导数乘以 dx^{μ} 并关于 μ 缩短而得之量叫做在 dx^{μ} 方向上的**绝对微分**或**共变微分**，记做

$$\delta u^{\kappa}=du^{\kappa}+\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}dx^{\mu}u^{\lambda}$$

和 u^{κ} 一样，它是反变向量。

3.2.4 张量的绝对微分或共变微分 上述共变向量与反变向量的

绝对导数或共变导数概念可以推广到张量上去。令以三阶混合张量 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 为例说明之。

在坐标变换

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

下 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 的变换式是

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa},$$

此式又可写做

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}} T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

此式对变量 $x^{\nu'}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\alpha'}} T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} T_{\alpha\lambda}{}^{\kappa} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\lambda'}} T_{\mu\alpha}{}^{\kappa}.$$

将 $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ 的变换式

$$\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}} \left\{ {\kappa' \atop \nu'\alpha'} \right\} - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\}$$

等代入此式得

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}} \left\{ {\kappa' \atop \nu'\alpha'} \right\} T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'} - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'}$$

$$= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \left\{ {\alpha' \atop \nu'\mu'} \right\} T_{\alpha\lambda}{}^{\kappa} -$$

$$- \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} T_{\alpha\lambda}{}^{\kappa} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \left\{ {\alpha' \atop \nu'\lambda'} \right\} T_{\mu\alpha}{}^{\kappa}$$

$$- \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} T_{\mu\alpha}{}^{\kappa},$$

此式又可写做

$$\frac{\partial T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}}{\partial x^{\nu'}}+\left\{{}^{\kappa'}_{\nu'\alpha'}\right\}T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'}-\left\{{}^{\alpha'}_{\nu'\mu'}\right\}T_{\alpha'\lambda'}{}^{\kappa'}-\left\{{}^{\alpha'}_{\nu'\lambda'}\right\}T_{\mu'\alpha'}{}^{\kappa'}$$

$$=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left(\frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\left\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\right\}T_{\mu\lambda}{}^{\alpha}\right.$$

$$\left.-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^{\kappa}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^{\kappa}\right).$$

这说明

$$\frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\left\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\right\}T_{\mu\lambda}{}^{\alpha}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^{\kappa}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^{\kappa}$$

是一个四阶张量，它叫做张量 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 的**绝对导数**或**共变导数**，记做

$$\nabla_{\nu}T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\left\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\right\}T_{\mu\lambda}{}^{\alpha}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^{\kappa}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^{\kappa}.$$

由此容易想象一般张量的共变导数的表达式。写出普遍的定义式

$$\nabla_{\mu}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}=\frac{\partial T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_s}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}}{\partial x^{\mu}}+\sum_{i=1}^{r}\left\{{}^{\kappa_i}_{\mu\alpha}\right\}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\left\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda_j}\right\}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}.$$

这时，在 dx^{ν} 方向上的**共变微分**或**绝对微分**的定义式如下所示。

$$\delta T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}=dT^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}+\sum_{i=1}^{r}\left\{{}^{\kappa_i}_{\mu\alpha}\right\}dx^{\mu}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\left\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda_j}\right\}dx^{\mu}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}.$$

3.2.5 $g_{\mu\lambda}$，$g^{\lambda\kappa}$ 与 δ^{κ}_{μ} 的绝对微分或共变微分 我们已经讨论了一般张量的共变导数与共变微分，做为应用考虑黎曼空间的基本张量 $g_{\mu\lambda}$ 与 $g^{\lambda\kappa}$ 的共变导数与共变微分。先是

$$\nabla_{\nu}g_{\mu\lambda}=\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda}-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}g_{\mu\alpha},$$

$$\delta g_{\mu\lambda} = \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\} g_{\alpha\lambda} - \left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\} g_{\mu\alpha}\right) dx^\nu.$$

根据在 3.1 节证明的恒等式知，此二式的右边是 0。故得如下定理。

定理 基本共变张量的共变导数与共变微分是 0。

再看基本反变张量 $g^{\lambda\kappa}$ 的共变导数与共变微分。

$$\nabla_\nu g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} + \left\{{\lambda \atop \nu\alpha}\right\} g^{\alpha\kappa} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\} g^{\lambda\alpha},$$

$$\delta g^{\lambda\kappa} = \left(\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} + \left\{{\lambda \atop \nu\alpha}\right\} g^{\alpha\kappa} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\} g^{\lambda\alpha}\right) dx^\nu.$$

再根据在 3.1 节证明的恒等式知，此二式的右边是 0。故得如下定理。

定理基本反变张量的共变导数与共变微分是 0。

我们知道 $g_{\mu\lambda}$ 与 $g^{\lambda\kappa}$ 都是张量的分量，因此相乘后关于 λ 缩短得到的

$$A_\mu^\kappa = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\kappa} = \delta_\mu^\kappa$$

显然也是一个张量的分量。由此张量的分量作成的矩阵是单位矩阵。这个张量叫做**单位张量**。下面求单位张量 A_μ^κ 的共变导数与共变微分。

$$\nabla_\nu A_\mu^\kappa = \frac{\partial A_\mu^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\} A_\mu^\alpha - \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\} A_\alpha^\kappa = \left\{{\kappa \atop \nu\mu}\right\} - \left\{{\kappa \atop \nu\mu}\right\} = 0,$$

$$\delta A_\mu^\kappa = 0.$$

故得下列定理。

定理 单位张量的共变导数与共变微分是 0。

3.2.6 张量的和与积的共变导数与共变微分 以前讨论的共变微分这种运算与普通微分遵循完全相同的规律。先以两个三阶张量为例考虑其和的共变导数。由定义知

$$\nabla_\nu (R_{\mu\lambda}{}^\kappa + S_{\mu\lambda}{}^\kappa) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(R_{\mu\lambda}{}^\kappa + S_{\mu\lambda}{}^\kappa) + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}(R_{\mu\lambda}{}^\alpha + S_{\mu\lambda}{}^\alpha)$$

$$- \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}(R_{\alpha\lambda}{}^\kappa + S_{\alpha\lambda}{}^\kappa) - \left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}(R_{\mu\alpha} + S_{\mu\alpha}{}^\kappa)$$

$$= \frac{\partial R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \left\{ {}^{\kappa}_{\nu\alpha} \right\} R_{\mu\lambda}{}^{\alpha} - \left\{ {}^{\alpha}_{\nu\mu} \right\} R_{\alpha\lambda}{}^{\kappa} - \left\{ {}^{\alpha}_{\nu\lambda} \right\} R_{\mu\alpha}{}^{\kappa}$$

$$+ \frac{\partial S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \left\{ {}^{\kappa}_{\nu\alpha} \right\} S_{\mu\lambda}{}^{\alpha} - \left\{ {}^{\alpha}_{\nu\mu} \right\} S_{\alpha\lambda}{}^{\kappa} - \left\{ {}^{\alpha}_{\nu\lambda} \right\} S_{\mu\alpha}{}^{\kappa}$$

$$= \nabla_{\nu} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + \nabla_{\nu} S_{\mu\lambda}{}^{\kappa},$$

即和的共变导数等于共变导数的和，对于共变微分有相同的定理。

$$\delta(R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}) = \delta R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + \delta S_{\mu\lambda}{}^{\kappa},$$

即和的共变微分等于共变微分的和。

其次，以两个二阶张量 $R_{\nu\mu}$，$S_{\lambda}{}^{\kappa}$为例考虑其积的共变导数。

$$\nabla_{\omega}(R_{\nu\mu} S_{\lambda}{}^{\kappa}) = \frac{\partial (R_{\nu\mu} S_{\lambda}{}^{\kappa})}{\partial x^{\omega}} + \left\{ {}^{\kappa}_{\omega\alpha} \right\} R_{\nu\mu} S_{\lambda}{}^{\alpha} - \left\{ {}^{\alpha}_{\omega\nu} \right\} R_{\alpha\mu} S_{\lambda}{}^{\kappa}$$

$$- \left\{ {}^{\alpha}_{\omega\mu} \right\} R_{\nu\alpha} S_{\lambda}{}^{\kappa} - \left\{ {}^{\alpha}_{\omega\lambda} \right\} R_{\nu\mu} S_{\alpha}{}^{\kappa}$$

$$= \left(\frac{\partial R_{\nu\mu}}{\partial x^{\omega}} - \left\{ {}^{\alpha}_{\omega\nu} \right\} R_{\alpha\mu} - \left\{ {}^{\alpha}_{\omega\mu} \right\} R_{\nu\alpha} \right) S_{\lambda}{}^{\kappa}$$

$$+ R_{\nu\mu} \left(\frac{\partial S_{\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\omega}} + \left\{ {}^{\kappa}_{\omega\alpha} \right\} S_{\lambda}{}^{\alpha} - \left\{ {}^{\alpha}_{\omega\lambda} \right\} S_{\alpha}{}^{\kappa} \right)$$

$$= (\nabla_{\omega} R_{\nu\mu}) S_{\lambda}{}^{\kappa} + R_{\nu\mu} (\nabla_{\omega} S_{\lambda}{}^{\kappa}),$$

即积的共变导数与普通导数遵循完全相同的规律。又其共变微分满足

$$\delta(R_{\nu\mu} S_{\lambda}{}^{\kappa}) = (\delta R_{\nu\mu}) S_{\lambda}{}^{\kappa} + R_{\nu\mu} (\delta S_{\lambda}{}^{\kappa}),$$

因此积的共变微分与普通微分遵循完全相同的规律 。

关于二张量的内积上述规律也正确。原因是，

$$\nabla_{\omega}(R_{\nu\alpha} S_{\lambda}{}^{\alpha}) = (\nabla_{\omega} R_{\nu\alpha}) S_{\lambda}{}^{\alpha} + R_{\nu\alpha} (\nabla_{\omega} S_{\lambda}{}^{\alpha}),$$

$$\delta(R_{\nu\alpha} S_{\lambda}{}^{\alpha}) = (\delta R_{\nu\alpha}) S_{\lambda}{}^{\alpha} + R_{\nu\alpha} (\delta S_{\lambda}{}^{\alpha}).$$

以上讨论均以特殊类型的张量为例进行，但其证法是普遍的。显然，对于任何类型的张量，这些定理都成立。

3.3 梯度 旋度 散度

在本节里讨论普通向量分析中常常出现的**数量的梯度，向量的旋度，向量的散度**在绝对微分学里应该怎样表达。

如前所述，数量 f 的**梯度** f_λ 由

$$f_\lambda = \nabla_\lambda f = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

而定。这样得到的 f_λ 是一共变向量，如果想得到反变向量，用 $g^{\lambda\kappa}$ 升标即可。

$$f^\kappa = f_\lambda g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\kappa}.$$

为了求一共变向量 v_λ 的旋度，先求 v_λ 的共变导数

$$\nabla_\mu v_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} v_\alpha,$$

在此式中对调指标 μ 与 λ 并相减之。因 $\left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} = \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\}$，故得

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda}.$$

它叫做共变向量 v_λ 的**旋度**。特别当 v_λ 是梯度，即存在满足

$$v_\lambda = \frac{\partial v}{\partial x^\lambda}$$

的数量 v 时

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial^2 v}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = 0,$$

即其旋度是 0。反之，如果旋度是 0，即

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda} = 0,$$

则由微积分的定理知道必局部地存在函数 v 满足

$$v_\lambda = \frac{\partial v}{\partial x^\lambda}.$$

故得一共变向量 v_λ 为梯度的充要条件是其旋度为 0.

为了求一反变向量 v^κ 的散度，先求其共变导数

$$\nabla_\mu v^\kappa = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} v^\lambda.$$

因为此 $\nabla_\mu v^\kappa$ 为二阶混合张量，故关于 κ 与 μ 缩短应得一个数量。即

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \left\{ {}_{\mu}{}^{\mu}{}_{\lambda} \right\} v^\lambda \ .$$

然由本章 3.1 节末证明的公式得

$$\left\{ {}_{\mu}{}^{\mu}{}_{\lambda} \right\} = \left\{ {}_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\mu} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\lambda},$$

故

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\mu} v^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, v^\mu)}{\partial x^\mu}.$$

这是向量 v^κ 的**散度**公式。

一个数量 f 的梯度之长的平方

$$g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

普通记做 $\Delta_1 f$，叫做**贝尔特腊米第一类微分参数**，梯度 $\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ 的反变分量 $g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ 的散度

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right)$$

记做 $\Delta_2 f$，叫做**贝尔特腊米第二类微分参数**，或**拉氏算子**。

3.4 黎曼·克利斯托费尔张量　利齐张量　曲率数量

在本章 2.6 节里讨论了张量的和与积的共变导数与普通导数遵循相同的规律。但继续求两次共变导数却不象求普通导数那样，可以对调求导数的顺序。今以反变向量 v^κ 为例，对调求共变导数的顺序并求其差。首先，因为

$$\nabla_\mu v^\kappa = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda} \right\} v^\lambda$$

是一个二阶混合张量，故再求其共变导数

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa = \frac{\partial\nabla_\mu v^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}\nabla_\mu v^\alpha - \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}\nabla_\alpha v^\kappa$$

$$= \frac{\partial^2 v^\kappa}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} v^\lambda + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}$$

$$+ \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu} + \left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} v^\lambda\right) - \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}\nabla_\alpha v^\kappa,$$

故对调 ν 与 μ 边边相减之得

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu\nabla_\nu v^\kappa = \left(\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} - \left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\right)v^\lambda.$$

因此令

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} - \left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\},$$

则得

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu\nabla_\nu v^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v^\lambda.$$

然而一般 $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ 并不恒为 0，从而

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa \neq \nabla_\mu\nabla_\nu v^\kappa.$$

即求共变导数与求导顺序有关。

再者，在公式

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu\nabla_\nu v^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v^\lambda$$

里，左边是二张量之差，因此也是张量。而 v^κ 是任意反变向量。故由第一章 1.14 节证明的定理可见，$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ 是一个张量的分量，它叫做**黎曼·克利斯托费尔张量**或黎曼空间的**曲率张量**。

同理，对于共变向量 v_λ 有相应的公式

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = -K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v_\kappa.$$

这些公式可以推广到一般的张量上。例如，以三阶混合张量 $T_{\mu\lambda}{}^\kappa$ 为例写出这个公式得

$$\nabla_\omega\nabla_\nu T_{\mu\lambda}{}^\kappa - \nabla_\nu\nabla_\omega T_{\mu\lambda}{}^\kappa = K_{\omega\nu\alpha}{}^\kappa T_{\mu\lambda}{}^\alpha - K_{\omega\nu\mu}{}^\alpha T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha T_{\mu\alpha}{}^\kappa.$$

而对于一般张量 $T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}$,

$$\nabla_\nu\nabla_\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s} - \nabla_\mu\nabla_\nu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s} = \sum_{i=1}^{r} K_{\nu\mu\alpha}{}^{\kappa_i} T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}$$

$$- \sum_{j=1}^{s} K_{\nu\mu\lambda_j}{}^{\alpha} T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}$$

这些公式叫做**利齐公式**。

我们知道 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 是一个张量，故关于 κ 与 ν 缩短之而得

$$K_{\mu\lambda} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\nu}$$

显然也是张量。它叫做**利齐张量**。再向 $K_{\mu\lambda}$ 乘 $g^{\mu\lambda}$ 并关于 μ 与 λ 缩短可得数量

$$K = g^{\mu\lambda} K_{\mu\lambda} \quad .$$

它叫做**曲率数量**。

3.5 黎曼·克利斯托费尔张量与利齐张量的性质

先从黎曼·克利斯托费尔张量

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = \frac{\partial\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\left\{{}^{\ \kappa}_{\nu\lambda}\right\}}{\partial x^{\mu}} + \left\{{}^{\ \kappa}_{\nu\alpha}\right\}\left\{{}^{\ \alpha}_{\mu\lambda}\right\} - \left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\alpha}\right\}\left\{{}^{\ \alpha}_{\nu\lambda}\right\}$$

说起。由此可见，$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 关于 ν 与 μ 反称，即

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = -K_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$$

以及

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} + K_{\mu\lambda\nu}{}^{\kappa} + K_{\lambda\nu\mu}{}^{\kappa} = 0.$$

后式叫做**比安基第一恒等式**。

其次，将利齐公式应用于基本共变张量 $g_{\lambda\kappa}$ 得

$$\nabla_\nu\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} - \nabla_\mu\nabla_\nu g_{\lambda\kappa} = -K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha} g_{\alpha\kappa} - K_{\nu\mu\kappa}{}^{\alpha} g_{\lambda\alpha},$$

因左边恒等于 0，故令

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha} g_{\alpha\kappa} = K_{\nu\mu\lambda\kappa},$$

则由上式得

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -K_{\nu\mu\kappa\lambda}.$$

即 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 关于 λ 与 κ 反称。这样定义的共变张量 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 叫做**共变曲率张量**。也有人把 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 叫做**第一类黎曼记号**，把 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 叫做**第二类黎**

量记号。显然，从定义可见 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 关于 ν 与 μ 反称，即

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=-K_{\mu\nu\lambda\kappa}.$$

再向

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}+K_{\mu\lambda\nu}{}^{\alpha}+K_{\lambda\nu\mu}{}^{\alpha}=0$$

乘 $g_{\alpha\kappa}$ 并关于 α 缩短得

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}+K_{\mu\lambda\nu\kappa}+K_{\lambda\nu\mu\kappa}=0.$$

下面具体地计算 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$。

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=\left(\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}}{\partial x^{\mu}}+\left\{{\alpha \atop \nu\beta}\right\}\left\{{\beta \atop \mu\lambda}\right\}-\left\{{\alpha \atop \mu\beta}\right\}\left\{{\beta \atop \nu\lambda}\right\}\right)g_{\alpha\kappa}$$

$$=\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}-\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}$$
$$+\left\{{\alpha \atop \nu\beta}\right\}\left\{{\beta \atop \mu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}-\left\{{\alpha \atop \mu\beta}\right\}\left\{{\beta \atop \nu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}$$

$$=\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}-\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}\left(\left\{{\beta \atop \nu\alpha}\right\}g_{\beta\kappa}+\left\{{\beta \atop \nu\kappa}\right\}g_{\alpha\beta}\right)$$
$$+\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\left(\left\{{\beta \atop \mu\alpha}\right\}g_{\beta\kappa}+\left\{{\beta \atop \mu\kappa}\right\}g_{\alpha\beta}\right)+\left\{{\alpha \atop \nu\beta}\right\}\left\{{\beta \atop \mu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}$$
$$-\left\{{\alpha \atop \mu\beta}\right\}\left\{{\beta \atop \nu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}$$

$$=\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}-\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}\left\{{\beta \atop \nu\kappa}\right\}g_{\alpha\beta}+\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\left\{{\beta \atop \mu\kappa}\right\}g_{\alpha\beta}.$$

将

$$\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\right),$$

$$\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\alpha\kappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\right)$$

代入上式得

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}\right)$$
$$-\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}\left\{{\beta \atop \nu\kappa}\right\}g_{\alpha\beta}+\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\left\{{\beta \atop \mu\kappa}\right\}g_{\alpha\beta}.$$

由此式易见

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=K_{\lambda\kappa\nu\mu}.$$

总结我们证明了的 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 的性质如下所示。

$$\begin{cases} K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = -K_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}, \\ K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} + K_{\mu\lambda\nu}{}^{\kappa} + K_{\lambda\nu\mu}{}^{\kappa} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -K_{\mu\nu\lambda\kappa}, \\ K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -K_{\nu\mu\kappa\lambda}, \\ K_{\nu\mu\lambda\kappa} = K_{\lambda\kappa\nu\mu}, \\ K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\lambda\nu\kappa} + K_{\lambda\nu\mu\kappa} = 0. \end{cases}$$

下面讲利齐张量 $K_{\mu\lambda}$ 的性质。改写

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\lambda\nu\kappa} + K_{\lambda\nu\mu\kappa} = 0$$

变为

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\lambda\nu\kappa} - K_{\nu\lambda\mu\kappa} = 0.$$

此式乘以 $g^{\nu\kappa}$，关于 ν 与 κ 缩短并注意

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}g^{\nu\kappa} = K_{\mu\lambda}, \qquad K_{\mu\lambda\nu\kappa}g^{\nu\kappa} = 0,$$

则得

$$K_{\mu\lambda} - K_{\lambda\mu} = 0.$$

即利齐张量 $K_{\mu\lambda}$ 关于其共变指标对称。

3.6 比安基恒等式

将利齐公式用于一共变向量 v_λ 的共变导数 $\nabla_\mu v_\lambda$ 上，则

(a) $\nabla_\omega\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\nu\nabla_\omega\nabla_\mu v_\lambda = -K_{\omega\nu\mu}{}^{\alpha}\nabla_\alpha v_\lambda - K_{\omega\nu\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\mu v_\alpha,$

在此式中更换指标 $\omega\to\nu\to\mu\to\omega$ 得

(b) $\nabla_\nu\nabla_\mu\nabla_\omega v_\lambda - \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\omega v_\lambda = -K_{\nu\mu\omega}{}^{\alpha}\nabla_\alpha v_\lambda - K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\omega v_\alpha,$

(c) $\nabla_\mu\nabla_\omega\nabla_\nu v_\lambda - \nabla_\omega\nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = -K_{\mu\omega\nu}{}^{\alpha}\nabla_\alpha v_\lambda - K_{\mu\omega\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\nu v_\alpha.$

其次，利齐公式

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = -K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}v_\alpha,$$

即

$$-\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}v_\alpha$$

对 x^ω 求共变导数得

(d) $-\nabla_\omega\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\omega\nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = (\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha})v_\alpha + K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\omega v_\alpha,$

在此式中更换指标 $\omega\to\nu\to\mu\to\omega$ 得

(e) $-\nabla_\nu\nabla_\mu\nabla_\omega v_\lambda+\nabla_\nu\nabla_\omega\nabla_\mu v_\lambda=(\nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\alpha)v_\alpha+K_{\mu\omega\lambda}{}^\alpha\nabla_\nu v_\alpha$,

(f) $-\nabla_\mu\nabla_\omega\nabla_\nu v_\lambda+\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\omega v_\lambda=(\nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha)v_\alpha+K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha\nabla_\mu v_\alpha$.

将所得六式 (a), (b), (c), (d), (e), (f) 全加在一起得

$$-(K_{\omega\nu\mu}{}^\alpha+K_{\nu\mu\omega}{}^\alpha+K_{\mu\omega\nu}{}^\alpha)\nabla_\alpha v_\lambda$$
$$+(\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha+\nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\alpha+\nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha)v_\alpha=0.$$

根据 $K_{\omega\nu\mu}{}^\alpha$ 的性质知，第一项恒为 0 。在第二项里，v_α 是完全任意共变向量。故由上式得恒等式

$$\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa+\nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\kappa+\nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda}{}^\kappa=0.$$

此式是黎曼空间论里重要恒等式之一，叫做**比安基第二恒等式**。在此恒等式里令 $\kappa=\omega$ 并缩短之得

$$\nabla_\alpha K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha-\nabla_\nu K_{\mu\lambda}+\nabla_\mu K_{\nu\lambda}=0,$$

此式再乘以 $g^{\mu\lambda}$ 并缩短之，注意

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha g^{\mu\lambda}=K_\nu{}^\alpha=K_{\nu\mu}g^{\mu\alpha},\qquad K_{\mu\lambda}g^{\mu\lambda}=K$$

得

$$2\nabla_\alpha K_\nu{}^\alpha-\nabla_\nu K=0.$$

故令

$$G_\lambda{}^\kappa=K_\lambda{}^\kappa-\frac{1}{2}K\delta_\lambda^\kappa,$$

则得

$$\nabla_\alpha G_\lambda{}^\alpha=\nabla_\alpha K_\lambda{}^\alpha-\frac{1}{2}\nabla_\lambda K=0\ ,$$

这是在相对论里起重要作用的一个公式。

3.7 黎曼曲率

设在黎曼空间的一点 (x^κ) 给定二反变向量 u^κ 与 v^κ，则由此可作出数量

$$k=-\frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}.$$

此数量的几何意义是：过点 (x^κ) 切于二向量 u^κ 与 v^κ 所决定的二

维平面作所有可能的测地线，形成一个二维曲面；这个曲面在 (x^κ) 处的高斯曲率便是 k（证明见第五章 5.13 节）。这个数量叫做关于二向量 u^κ 与 v^κ 所决定方向的**黎曼曲率**[1]。

如果此黎曼曲率不论在哪一点都与方向 u^κ，v^κ 无关，由此可得[2]

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=-k(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}).$$

式中 k 是一个数量。为了决定此数量，上式乘以 $g^{\nu\kappa}g^{\mu\lambda}$ 并缩短之得

$$K=-k(n-n^2),$$

即
$$k=\frac{K}{n(n-1)}.$$

如果这个黎曼曲率不论对于任何方向 u^κ 与 v^κ，也不论在任何点恒为 0，则得

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=0.$$

曲率张量为 0 的黎曼空间叫做**平坦空间**。以后要证明平坦黎曼空间是局部欧氏空间。

3.8 休尔定理

前节讲到如果黎曼曲率和定义它的二方向 u^κ 以及 v^κ 无关时，共变曲率张量 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 必是

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=-k(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})$$

的形状。式中出现的 k 一般可以是坐标的函数。但将上式代入比安基恒等式

$$\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda\kappa}+\nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda\kappa}+\nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda\kappa}=0,$$

则得

$$(\nabla_\omega k)(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})+(\nabla_\nu k)(g_{\mu\lambda}g_{\omega\kappa}-g_{\omega\lambda}g_{\mu\kappa})$$
$$+(\nabla_\mu k)(g_{\omega\lambda}g_{\nu\kappa}-g_{\nu\lambda}g_{\omega\kappa})=0.$$

此式乘以 $g^{\mu\lambda}$ 并缩短得

$$(n-2)(\nabla_\omega k g_{\nu\kappa}-\nabla_\nu k g_{\omega\kappa})=0.$$

1） 也叫做截面曲率。（译者注）

2） 其证明见 立花俊一著《黎曼几何》中译本 p.14 定理 3.5′。（译者注）

此式再乘以 $g^{\alpha\kappa}$ 并缩短得

$$(n-1)(n-2)\nabla_\nu k = 0。$$

故当 $n \geqslant 3$ 时，由上式得

$$\nabla_\kappa k = \frac{\partial k}{\partial x^\kappa} = 0。$$

此式说明在空间到处数量 k 是一定的。它叫做**休尔定理**。即

定理 如果在空间各点黎曼曲率和定义它的二方向无关，则此黎曼曲率在空间里到处是常数。

这样空间叫做**常曲率空间**。

3.9 平均曲率 利齐主方向 爱因斯坦空间

在黎曼空间中一点(x^κ)，考虑互相正交的 n 个单位向量 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$(α, $\beta = 1, 2, \cdots, n$)。其中的 (α) 是区别向量的指标，κ 表示向量的反变指标。假设求总和的规律不适用括弧之内。

再者，$h_{(\alpha)}^{\kappa}$ 是互相正交的 n 个单位向量，这样性质可表示为

$$g_{\mu\lambda} h_{(\alpha)}^{\mu} h_{(\beta)}^{\lambda} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

这样，在空间各点定义的 n 个单位正交向量之集叫做**正交标架**。令 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ 的共变分量为

$$g_{\mu\lambda} h_{(\alpha)}^{\lambda} = h_{(\alpha)\mu},$$

则由上式得

$$h_{(\alpha)\lambda} h_{(\beta)}^{\lambda} = \delta_{\alpha\beta}。$$

此式说明 $h_{(\alpha)\lambda}$ 作成的矩阵与 $h_{(\beta)}^{\lambda}$ 作成的矩阵之积等于 $\delta_{\alpha\beta}$ 作成的矩阵，即**单位矩阵**。故

$$\sum_{\alpha=1}^{n} h_{(\alpha)\lambda} h_{(\alpha)}^{\mu} = \delta_\lambda^\mu$$

应与上式同时成立。此式再乘以 $g^{\lambda\kappa}$ 并缩短得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} h_{(\alpha)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\kappa} = g^{\mu\kappa}。$$

在此标架中取两个向量 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ 与 $h_{(\beta)}^{\kappa}$，由此二向量所定方向的黎曼曲率用 $K_{(\alpha)(\beta)}$ 表示之得

$$K_{(\alpha)(\beta)}=-\frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\beta)}^{\mu}h_{(\alpha)}^{\lambda}h_{(\beta)}^{\kappa}}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\beta)}^{\mu}h_{(\alpha)}^{\lambda}h_{(\beta)}^{\kappa}},$$

即

$$K_{(\alpha)(\beta)}=-K_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\beta)}^{\mu}h_{(\alpha)}^{\lambda}h_{(\beta)}^{\kappa}\quad(\alpha\neq\beta).$$

在此式中关于 $\beta=1,2,\cdots,n$ 求 $K_{(\alpha)(\beta)}$ 的总和得

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{n}K_{(\alpha)(\beta)}&=-K_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\alpha)}^{\lambda}\sum_{\beta=1}^{n}h_{(\beta)}^{\mu}h_{(\beta)}^{\kappa}\\&=-K_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\alpha)}^{\lambda}g^{\mu\kappa}\\&=K_{\nu\lambda}h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\alpha)}^{\lambda}.\end{aligned}$$

但在这里假设了 $K_{(\alpha)(\alpha)}=0$。故 $\sum\limits_{\beta=1}^{n}K_{(\alpha)(\beta)}$ 是 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ 和与 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ 正交的 $n-1$ 个互相正交向量所决定的黎曼曲率之和。它叫做关于方向 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ 的**平均曲率**。

再求关于 n 个互相正交方向的平均曲率之和，由上式得

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}K_{(\alpha)(\beta)}=\sum_{\alpha=1}^{n}K_{\nu\lambda}h_{(\alpha)}^{\nu}h_{(\alpha)}^{\lambda}=K_{\mu\lambda}g^{\mu\lambda}=K.$$

此结果与标架的选法无关。故得

定理 关于 n 个互相正交方向的平均曲率之和与标架的选法无关，等于数量曲率。

今取任意向量 v^{κ}。设关于此方向的平均曲率为 M，则

$$M=\frac{K_{\mu\lambda}v^{\mu}v^{\lambda}}{g_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}},$$

以下求方向 v^{κ} 使此 M 取极值。为此，计算

$$\frac{\partial M}{\partial v^{\nu}}=0,$$

则得

$$\frac{2K_{\nu\lambda}v^{\lambda}(g_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta})-2g_{\nu\beta}v^{\beta}(K_{\mu\lambda}v^{\mu}v^{\lambda})}{(g_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta})^{2}}=0,$$

即

$$(K_{\nu\lambda}-Mg_{\nu\lambda})v^{\lambda}=0.$$

满足此方程的方向一般有 n 个，而且互相正交，它们叫做**利齐主方向**. 使利齐主方向不定的空间，即

$$K_{\mu\lambda}=Mg_{\mu\lambda}$$

的空间叫做**爱因斯坦空间**. 上式乘以 $g^{\mu\lambda}$ 并缩短之得

$$g^{\mu\lambda}K_{\mu\lambda}=nM, \qquad \therefore \quad M=\frac{1}{n}K.$$

故爱因斯坦空间的定义式可写做

$$K_{\mu\lambda}=\frac{1}{n}Kg_{\mu\lambda}.$$

这是在相对论里使用的空间.

3.10 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 的空间

以前我们将 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 的空间叫做平坦空间，在这一节证明平坦空间就是局部欧氏空间.

在证明之前先研究一下欧氏空间，它固然是黎曼空间，究竟是怎样的黎曼空间呢？在欧氏空间中取一正交轴 (x^1, x^2, …, x^n)，则其微小距离 ds 的平方等于坐标微分的平方和

$$ds^2=dx^1dx^1+dx^2dx^2+\cdots+dx^ndx^n.$$

若取斜交轴 (x^1, x^2, …, x^n) 时，则 ds 由以常数为系数的二次微分形式

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$$

决定. 又知，经过适当的线性变换，以常数为系数的正定二次微分形式可以变为微分的平方和. 故得

定理 欧氏空间是在适当的坐标变换下可使基本张量的分量全为常数的黎曼空间.

以下证明：一黎曼空间是局部欧氏空间的充要条件是 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$。

显然这个条件是必要的，原因是：在欧氏空间之中取一斜交轴，则 $g_{\mu\lambda}$ 全是常数，故 $\{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 全是0。从而 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 的分量全是0。即 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$。因为它是一个张量方程，故对于任何坐标系都成立。因此若某黎曼空间是局部欧氏空间，则不论对于任何坐标系必然 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$。故 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 是黎曼空间为局部欧氏空间的必要条件。其次证明它也是充分条件。只要证出在 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 成立的条件下进行适当的坐标变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$$

可使全部 $g_{\mu'\lambda'}$ 为常数就达到了目的。今因

$$\{^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}=\frac{1}{2}g^{\kappa'\alpha'}\left(\frac{\partial g_{\lambda'\alpha'}}{\partial x^{\mu'}}+\frac{\partial g_{\mu'\alpha'}}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\alpha'}}\right),$$

$$\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\nu'}}=\{^{\alpha'}_{\nu'\mu'}\}g_{\alpha'\lambda'}+\{^{\alpha'}_{\nu'\lambda'}\}g_{\mu'\alpha'},$$

故为了证明 $g_{\mu'\lambda'}$ 全为常数，只要证出 $\{^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}$ 全为0即可。因而由 $\{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 的变换式

$$\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}\{^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}$$

可见，只要证出确有满足

$$\frac{\partial^2 x^{\kappa'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$$

的 $(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 的函数 $x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 即可。即只要证出在 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 的条件下，上列偏微分方程是完全可积的，问题就告完结。

上列偏微分方程的双方对 x^{ν} 求偏导数

$$\frac{\partial^3 x^{\kappa'}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial^2 x^{\kappa'}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\alpha}}\{^{\alpha}_{\mu\lambda}\}+\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial\{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^{\nu}},$$

将原来的偏微分方程代入此式右边得

$$\frac{\partial^3 x^{\kappa'}}{\partial x^\nu \partial x^\mu \partial x^\lambda} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left(\left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} + \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu}\right).$$

故给定偏微分方程的完全可积条件是此式右边关于 ν 与 μ 对称[1]，即右边括弧中的式子关于 ν 与 μ 对称。然由

$$\left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} + \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} - \left\{ {\kappa \atop \mu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} - \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^\mu}$$

$$= \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\kappa \atop \mu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$$

可见，这个偏微分方程是完全可积的。因此定理证毕。即得

定理　黎曼空间为局部欧氏空间的充要条件是 $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$。

3.11 向量的平移

在欧氏空间之中取一斜交轴，在一点 (x^κ) 处的向量 v^κ 平移到邻近点 $x^\kappa + dx^\kappa$ 处这个事实，可用 v^κ 的分量不变，即

$$dv^\kappa = 0$$

表达。可是在黎曼空间里，向量的平移就不能用上式定义。因为 v^κ 是向量的分量时，dv^κ 未必是向量的分量。故上方程不是张量（向量）方程。不能具备与坐标轴的选法无关的几何意义。

为了弥补这种缺陷，不用普通微分而用共变微分 δv^κ，当

$$\delta v^\kappa = dv^\kappa + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} dx^\mu v^\lambda = 0$$

时，我们说向量 v^κ 从点 (x^κ) 平移到点 $(x^\kappa + dx^\kappa)$。这就是**列维·齐维塔平行性**。它的几何意义容后再述。

其次假设将向量 v^κ 由点 (x^κ) 平移到 $(x^\kappa + dx^\kappa)$。讨论其长 $(v)^2 = g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda$ 所发生的变化。

$$\begin{aligned} d(v)^2 &= d(g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda) \\ &= (dg_{\mu\lambda}) v^\mu v^\lambda + g_{\mu\lambda}(dv^\mu) v^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu (dv^\lambda) \\ &= (dg_{\mu\lambda}) v^\mu v^\lambda - g_{\alpha\lambda}\left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} dx^\nu v^\mu v^\lambda - g_{\mu\alpha}\left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} dx^\nu v^\mu v^\lambda \end{aligned}$$

1）其证明见栗田稔著《黎曼几何》p.121　东北工学院 1982。
或陆启铿著《微分几何学及其在物理学中的应用》p.199　科学出版社 1981。

$$= (dg_{\mu\lambda} - g_{\alpha\lambda}\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}dx^{\nu} - g_{\mu\alpha}\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}dx^{\nu})v^{\mu}v^{\lambda}$$
$$= 0,$$

可见 v 的值不变。也可用下法证明：注意 $d(v)^2 = \delta(v^2)$，则

$$d(v)^2 = \delta(v)^2 = \delta(g_{\mu\lambda}v^{\mu}v^{\lambda})$$
$$= (\delta g_{\mu\lambda})v^{\mu}v^{\lambda} + g_{\mu\lambda}(\delta v^{\mu})v^{\lambda} + g_{\mu\lambda}v^{\mu}(\delta v^{\lambda}) = 0.$$

故得

定理 在平移下向量之长不变。

再设将二向量 u^{κ} 与 v^{κ} 全由点 (x^{κ}) 平移到 $(x^{\kappa}+dx^{\kappa})$，讨论其间的夹角

$$\cos\theta = \frac{g_{\mu\lambda}u^{\mu}v^{\lambda}}{uv}$$

的变化。这里 u，v 分别表达 u^{κ} 与 v^{κ} 之长。然因在平移下 u，v 不变，故

$$d\cos\theta = \delta\cos\theta = \frac{1}{uv}[(\delta g_{\mu\lambda})u^{\mu}v^{\lambda} + g_{\mu\lambda}(\delta u^{\mu})v^{\lambda} + g_{\mu\lambda}u^{\mu}(\delta v^{\lambda})] = 0.$$

因此得

定理 平移二向量，它们间的夹角不变。

上述平移的定义仅仅适用于从点 (x^{κ}) 移动到它的无穷接近点 $(x^{\kappa}+dx^{\kappa})$。若想将向量从 $(x^{\kappa})_0$ 平移到离有限远处的一点 $(x^{\kappa})_1$ 上去，必须指出沿连结 $(x^{\kappa})_0$ 与 $(x^{\kappa})_1$ 的哪条曲线平移才行。现在要沿着满足

$$x^{\kappa}(t_0) = (x^{\kappa})_0, \qquad x^{\kappa}(t_1) = (x^{\kappa})_1$$

的一条曲线 $x^{\kappa}(t)$ 平移向量 v^{κ}，就是给出 $t=t_0$ 处 v^{κ} 的值解微分方程

$$\frac{dv^{\kappa}}{dt} + \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\frac{dx^{\mu}}{dt}v^{\lambda} = 0.$$

因为其解 $v^{\kappa}(t)$ 表示沿着曲线 $x^{\kappa}(t)$ 平移的向量的分量，故在点 $(x^{\kappa})_0$ 的向量 $v^{\kappa}(t_0)$ 沿曲线 $x^{\kappa}(t)$ 平移到点 $(x^{\kappa})_1$ 而得向量是 $v^{\kappa}(t_1)$。这样定义的向量的平移与连接两点的曲线有关。显然连接两

点的曲线有了改变时它的结果也要改变。

在第二章2.6里学过在黎曼空间中测地线的微分方程是

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\lambda}{ds}=0.$$

然因$\frac{dx^\kappa}{ds}$是此测地线的单位切向量，上微分方程又可看作

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\lambda}{ds}=0,$$

这说明其切向量$\frac{dx^\kappa}{ds}$沿此曲线总是平移，故得

定理　测地线的切向量总沿此测地线平移。

故如尚有沿此测地线平移的向量v^κ，则由前定理得

定理　沿测地线平移的向量和测地线的切线向量的夹角是一定的。

由此定理可得下列二维黎曼空间里的列维·齐维塔平行性的几何解释。即三维欧氏空间里的二维曲面可看做一个二维黎曼空间如前所述。在此曲面上非常接近两点处的二向量在列维·齐维塔意义下平行等价于连结此二点的测地线与二向量的夹角相等。

如上所述，将向量$v^\kappa(x)$从一点平移到另一点与连结这两点的曲线有关。以下调查一下，如果不论连结此二点的曲线如何所得的结果相同，试问$v^\kappa(x)$要满足什么条件呢？为此，

$$\frac{dv^\kappa}{dt}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}v^\lambda=\left(\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}v^\lambda\right)\frac{dx^\mu}{dt}=0$$

不论$\frac{dx^\mu}{dt}$如何总要成立。故由此式得

$$\nabla_\mu v^\kappa=\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}v^\lambda=0\quad.$$

这是向量的平行性与路无关的条件。

以下讨论任何向量的平行性全与路无关的情况。这时由 $\nabla_\mu v^\kappa=0$ 得

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa-\nabla_\mu\nabla_\nu v^\kappa=K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v^\lambda=0。$$

然因 v^κ 是完全任意的向量。故由上式得

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa=0\ .$$

即此空间必是局部欧氏空间。故得如下定理。

定理 任何向量的平移都与路无关的黎曼空间是局部欧氏空间。

3.12 沿无穷小闭曲线向量的平移

在黎曼空间里，考虑无穷小闭曲线 $(x^\kappa)\to(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)\to(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa+\underset{2}{d}x^\kappa+\underset{21}{dd}x^\kappa)\to(x^\kappa+\underset{2}{d}x^\kappa)\to(x^\kappa)$，沿这条曲线研究向量 v^κ 的平移。

先将 v^κ 从点 (x^κ) 平移到 $(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)$。由

$$\underset{1}{d}v^\kappa+\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda=0$$

即由

$$\underset{1}{d}v^\kappa=-\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda$$

得出在 $(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)$ 处的向量

$$v^\kappa-\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda\ ,$$

再将点 $(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)$ 处的此向量平移到 $(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa+\underset{2}{d}x^\kappa+\underset{21}{dd}x^\kappa)$，则由

$$\underset{2}{d}\left(v^\kappa-\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda\right)+\left(\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\frac{\partial\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\underset{1}{d}x^\nu\right)\underset{2}{d}x^\mu\left(v^\lambda-\left\{{}^{\ \lambda}_{\alpha\beta}\right\}\underset{1}{d}x^\alpha v^\beta\right)=0\ ,$$

即由

$$\underset{2}{d}\left(v^\kappa-\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda\right)=-\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda-\frac{\partial\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda$$
$$+\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\alpha}\right\}\left\{{}^{\ \alpha}_{\nu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda$$

得到在 $(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa+\underset{2}{d}x^\kappa+\underset{21}{dd}x^\kappa)$ 处的向量

$$v^{\kappa}-\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\underset{1}{d}x^{\mu}v^{\lambda}-\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}-\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^{\nu}}\underset{1}{d}x^{\nu}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}+\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\}\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\underset{1}{d}x^{\nu}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}.$$

同理经过路径 $(x^{\kappa})\rightarrow(x^{\kappa}+\underset{2}{d}x^{\kappa})\rightarrow(x^{\kappa}+\underset{2}{d}x^{\kappa}+\underset{1}{d}x^{\kappa}+\underset{1}{d}\underset{2}{d}x^{\kappa})$ 将向量 v^{κ} 平移到同一点 $(x^{\kappa}+\underset{2}{d}x^{\kappa}+\underset{1}{d}x^{\kappa}+\underset{1}{d}\underset{2}{d}x^{\kappa})=(x^{\kappa}+\underset{1}{d}x^{\kappa}+\underset{2}{d}x^{\kappa}+\underset{2}{d}\underset{1}{d}x^{\kappa})$得

$$v^{\kappa}-\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}-\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\underset{1}{d}x^{\mu}v^{\lambda}-\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\}}{\partial x^{\mu}}\underset{1}{d}x^{\nu}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}+\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\}\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}\underset{1}{d}x^{\nu}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}.$$

因此，这些结果未必相等，求其差得

$$\left(\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\}}{\partial x^{\mu}}+\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\}\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}-\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\}\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\right)\underset{1}{d}x^{\nu}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}$$
$$=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}\underset{1}{d}x^{\nu}\underset{2}{d}x^{\mu}v^{\lambda}.$$

故若这个差恒为 0，则得 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$。这是 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 的一种几何意义。

第四章 曲 线 论

4.1 测地线方程的级数展开

在第二章 2.6 节学过了在黎曼空间中弧长 s 取极值的曲线，即测地线的微分方程是

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0.$$

这个微分方程是含 n 个未知函数的二阶微分方程组。故其通解含有 $2n-1$ 个任意常数。因此若给定黎曼空间中一点，以及通过此点的一个单位向量，则此微分方程的解有一个，且只有一个。

假设在这一节里给定了黎曼空间中的一点 x_0^κ 以及通过此点的一单位向量

$$\xi^\kappa=\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0,$$

求上记微分方程的解，即测地线的方程的级数解。但式中的（ ）$_0$ 表示在一点 x_0^κ 处括弧中函数的值。

首先将曲线 $x^\kappa(s)$ 展成从一点 x_0^κ 量的弧长 s 的幂级数得

$$x^\kappa(s)=x_0^\kappa+\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0 s+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}\right)_0 s^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}\right)_0 s^3+\cdots$$

式中 s 的系数等于给定的

$$\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0=\xi^\kappa.$$

由原微分方程可见，s^2 的系数等于

$$\left(\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}\right)_0=-\left(\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\right)_0=-\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}_0\xi^\mu\xi^\lambda.$$

为了求 s^3 的系数，将给定微分方程对 s 求导数得

$$\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}+\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}+$$

$$+\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\lambda}{ds}+\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}=0.$$

将从原微分方程得到的值代入此式的$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}$等处中得

$$\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}+\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$-\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\}\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}$$

$$-\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\}\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0.$$

即

$$\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}=-\left(\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}-\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\}-\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\{{}^{\kappa}_{\alpha\mu}\}\right)\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds},$$

故得

$$\left(\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}\right)_0=-\left[\left(\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}\right)_0-2\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}_0\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\}_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda.$$

因此得测地线方程到 s^3 的级数解为

$$x^\kappa=x^\kappa_0+\xi^\kappa s-\frac{1}{2!}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0\xi^\mu\xi^\lambda s^2$$

$$-\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}\right)_0-2\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}_0\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\}_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda s^3-\cdots.$$

4.2 测 地 坐 标

在欧氏空间中取一个斜交坐标系或更普遍的仿射坐标系，关于这些坐标系在空间到处基本张量 $g_{\mu\lambda}$ 的分量是常数。在本章 4.1 节也讨论过如果在黎曼空间里存在一种坐标系使得基本张量 $g_{\mu\lambda}$ 全是常

数，也就是$\{{}^{\ \kappa}_{\mu\ \lambda}\}$全是 0，则此黎曼空间只能是$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 的空间，即局部欧氏空间。故在一般的黎曼空间中未必存在在空间各点基本张量 $g_{\mu\lambda}$ 为常数，从而$\{{}^{\ \kappa}_{\mu\ \lambda}\}$的值全是 0 的坐标系。

然而，如果问题仅限于黎曼空间的一个指定点 x_0^κ 的话，可以证明存在坐标系使得全部$\{{}^{\ \kappa}_{\mu\ \lambda}\}$在这一点等于 0，以后在 x_0^κ 处的函数值全用$(\quad)_0$ 表示之。以下考虑坐标变换

$$\overline{x}^\kappa=(x^\kappa-x_0^\kappa)+\frac{1}{2}\{{}^{\ \kappa}_{\mu\ \lambda}\}_0(x^\mu-x_0^\mu)(x^\lambda-x_0^\lambda).$$

在此坐标变换下，克氏记号$\{{}^{\ \kappa}_{\mu\ \lambda}\}$变为$\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\mu\ \lambda}\}$，其变换规律是

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial\overline{x}^\alpha}\{{}^{\ \overline{\alpha}}_{\gamma\ \beta}\}=\frac{\partial x^\mu}{\partial\overline{x}^\gamma}\ \frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\beta}\{{}^{\ \kappa}_{\mu\ \lambda}\}+\frac{\partial^2x^\kappa}{\partial\overline{x}^\gamma\partial\overline{x}^\beta},$$

或改变 x^κ 与 $\overline{x}^\kappa$ 的地位得

$$\frac{\partial\overline{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\{{}^{\ \alpha}_{\gamma\ \beta}\}=\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\ \frac{\partial\overline{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\mu\ \lambda}\}+\frac{\partial^2\overline{x}^\kappa}{\partial x^\gamma\partial x^\beta},$$

故在点 x_0^κ 得

$$\left(\frac{\partial\overline{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0\{{}^{\ \alpha}_{\gamma\ \beta}\}_0=\left(\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\right)_0\left(\frac{\partial\overline{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\right)_0\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\mu\ \lambda}\}_0+\left(\frac{\partial^2\overline{x}^\kappa}{\partial x^\gamma\partial x^\beta}\right)_0$$

由变换的方程立即可见

$$\left(\frac{\partial\overline{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0=\delta_\alpha^\kappa,\qquad\left(\frac{\partial^2\overline{x}^\kappa}{\partial x^\gamma\partial x^\beta}\right)_0=\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\ \beta}\}_0,$$

因此上变换式给出

$$\delta_\alpha^\kappa\{{}^{\ \alpha}_{\gamma\ \beta}\}_0=\delta_\gamma^\mu\delta_\beta^\lambda\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\mu\ \lambda}\}_0+\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\ \beta}\}_0,$$

故得

$$\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\ \beta}\}_0=\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\gamma\ \beta}\}_0+\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\ \beta}\}_0,$$

即

$$\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\gamma\ \beta}\}_0=0.$$

故在坐标系$(\overline{x}^\kappa)$下，在点 x_0^κ 即 $\overline{x}_0^\kappa=0$ 处，$\{{}^{\ \overline{\kappa}}_{\gamma\ \beta}\}$的值全是 0。这样的坐标系叫做以点 $\overline{x}_0^\kappa$ 为**极点**的**测地坐标**。因为在测地坐标的

极点，克氏记号全是 0，所以在极点处的共变导数和普通导数相同。

可将上述结果推广，能够证明存在坐标系使得在黎曼空间中任意曲线上的各点$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$的值为 0。这个命题叫做**费尔米定理**。

4.3 法 坐 标

在本章 4.1 节讨论了通过点 x_0^κ 的测地线方程可以展成级数

$$x^\kappa = x_0^\kappa + \xi^\kappa s - \frac{1}{2!}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0 \xi^\mu \xi^\lambda s^2 - \cdots .$$

令

$$\bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s$$

时，则上级数变成

$$x^\kappa = x_0^\kappa + \bar{x}^\kappa - \frac{1}{2!}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0 \bar{x}^\mu \bar{x}^\lambda - \cdots .$$

因为此方程再不含 ξ^κ，所以可看作将坐标系(x^κ) 变为坐标系$(\bar{x}^\kappa)$的变换方程。而且它的函数行列式 $\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$ 在 x_0^κ 为 1，故在这点附近，上方程可就 $\bar{x}^\kappa$ 解出来，其结果应具备如下形状

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa - x_0^\kappa + \Gamma^\kappa(x^1 - x_0^1, \cdots, x^n - x_0^n) .$$

这里 Γ^κ 是由 $x^\kappa - x_0^\kappa$ 的二次项开始的幂级数。

再者，因为在点 x_0^κ，$\left(\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\mu}\right)_0 = \delta_\mu^\kappa$，所以在点 x_0^κ 的向量 ξ^κ，不管关于坐标系(x^κ)还是关于$(\bar{x}^\kappa)$都有相同分量 ξ^κ. 故

$$\bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s$$

是坐标系$(\bar{x}^\kappa)$下的测地线方程。测地线可以写成 s 的一次式的坐标系叫做以 $\bar{x}_0^\kappa = 0$ 为**原点的法坐标**．这和在欧氏几何里取仿射坐标系时过原点的直线方程一样。当然在法坐标下，测地线的微分方程也应有如下的形状

$$\frac{d^2\bar{x}^\kappa}{ds^2} + \overline{\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}\frac{d\bar{x}^\mu}{ds}\frac{d\bar{x}^\lambda}{ds} = 0.$$

因为 $\overline{x}^{\kappa}=\xi^{\kappa}s$ 是此微分方程的一解，故代入上式得

$$\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}\xi^{\mu}\xi^{\lambda}=0.$$

此式两边乘以 s^2 再用 $\overline{x}^{\kappa}=\xi^{\kappa}s$ 得

$$\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}\overline{x}^{\mu}\overline{x}^{\lambda}=0\ .$$

在法坐标之下此式在空间里到处成立。反之，若此式成立时，显然 $\overline{x}^{\kappa}=\xi^{\kappa}s$ 满足

$$\frac{d^2\overline{x}^{\kappa}}{ds^2}+\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}\frac{d\overline{x}^{\mu}}{ds}\frac{d\overline{x}^{\lambda}}{ds}=0.$$

故得

定理 在坐标系$(\overline{x}^{\kappa})$下，克氏记号用 $\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}$ 表示之时，则坐标系$(\overline{x}^{\kappa})$ 为法坐标的充要条件是方程

$$\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}\overline{x}^{\mu}\overline{x}^{\lambda}=0$$

在空间各点成立。

通过法坐标系$(\overline{x}^{\kappa})$的原点 $\overline{x}_0^{\kappa}=0$，切于向量 ξ^{κ} 的测地线方程展为级数得

$$\overline{x}^{\kappa}=\xi^{\kappa}s-\frac{1}{2!}\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}_0\xi^{\mu}\xi^{\lambda}s^2-\cdots.$$

然因此式必须是 $\overline{x}^{\kappa}=\xi^{\kappa}s$，故得

$$\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}_0\xi^{\mu}\xi^{\lambda}=0.$$

然而此式中 ξ^{κ} 的比可以任意选取，并且 $\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}_0$ 关于 μ 与 λ 对称。故有

$$\left\{\begin{smallmatrix}\bar{\kappa}\\ \mu\lambda\end{smallmatrix}\right\}_0=0.$$

所以得

定理 法坐标是一种测地坐标。

再者，只要规定原点，对于普通坐标系(x^{κ})，法坐标唯一地决定。故若普通坐标系(x^{κ})发生变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,x^2,\cdots,x^n),$$

则对于这种变换，法坐标系从$(\overline{x}^{\kappa})$变为$(\overline{x}^{\kappa'})$。以下求它们之间的关

系。这时，通过同一原点的一条测地线的方程

在法坐标系$(\bar{x}^\kappa)$下应可写为 $\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$，

在法坐标系$(\bar{x}^{\kappa'})$下应可写为 $\bar{x}^{\kappa'}=\xi^{\kappa'} s$。

然因 ξ^κ 是反变向量的分量，故

$$\xi^{\kappa'}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\right)_0\xi^\kappa \ ,$$

于是由上式得

$$\bar{x}^{\kappa'}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\right)_0\bar{x}^\kappa \ .$$

因此得

定理 这时法坐标系发生常系数的线性变换。

4.4 张量的展开

设在一般坐标系(x^κ)下一张量的分量为$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$。今取一点$x_0^\kappa$ 为原点，根据

$$x^\kappa=\bar{x}_0^\kappa+\bar{x}^\kappa-\frac{1}{2!}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda-\cdots$$

从一般坐标系(x^κ)变换为法坐标系$(\bar{x}^\kappa)$，则在法坐标系 $(\bar{x}^\kappa)$ 下此张量的分量$\overline{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(\bar{x})$由公式

$$\overline{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(\bar{x})=\frac{\partial\bar{x}^{\lambda_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{\lambda_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\bar{x}^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial\bar{x}^{\mu_s}}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$$

而定。

这个$\overline{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(\bar{x})$对法坐标 $\bar{x}^\nu$ 求 t 次偏导数得到的

$$D_{\nu_1\cdots\nu_t}\overline{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}=\frac{\partial^t\overline{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}}{\partial\bar{x}^{\nu_1}\cdots\partial\bar{x}^{\nu_t}}$$

在 $\bar{x}^\kappa=0$ 的值又是一个张量的分量。原因是，对一般的坐标系(x^κ)作坐标变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,x^2,\cdots,x^n),$$

因为对应于此变换的法坐标发生线性变换

$$\bar{x}^{\kappa'} = \left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\right)_0 \bar{x}^{\kappa},$$

所以在法坐标系$(\bar{x}^{\kappa'})$下，上记张量的分量由

$$\bar{T}^{\lambda_1'\cdots\lambda_r'}_{\mu_1'\cdots\mu_s'} = \left(\frac{\partial x^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial x^{\lambda_r'}}{\partial x^{\lambda_r}}\right)_0 \left(\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial x^{\mu_s}}{\partial x^{\mu_s'}}\right)_0 \bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}$$

而定。此式两边依次对 $\bar{x}^{\nu_1'}, \cdots, \bar{x}^{\nu_t'}$ 求偏导数，则得在点 $\bar{x}^{\kappa}=0$

$$\left(D_{\nu_1'\cdots\nu_t'} \bar{T}^{\lambda_1'\cdots\lambda_r'}_{\mu_1'\cdots\mu_s'}\right)_0 = \left(\frac{\partial x^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial x^{\lambda_r'}}{\partial x^{\lambda_r}}\right)_0 \left(\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}}\right)_0 \cdots$$

$$\left(\frac{\partial x^{\mu_s}}{\partial x^{\mu_s'}}\right)_0 \left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial x^{\nu_t}}{\partial x^{\nu_t'}}\right)_0$$

$$\left(D_{\nu_1\cdots\nu_t} \bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}\right)_0$$

此式说明 $(D_{\nu_1\cdots\nu_t} \bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s})_0$ 正好表示一个张量的分量。

再者，张量 $(D_{\nu_1\cdots\nu_t} \bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s})_0$ 在原来的一般坐标系(x^{κ})下点(x^{κ}_0)处的分量 $(D_{\gamma_1\cdots\gamma_t} T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s})_0$ 由

$$(D_{\gamma_1\cdots\gamma_t} T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s})_0 = \left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{\lambda_1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial \bar{x}^{\lambda_r}}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\right)_0 \cdots$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^{\mu_s}}{\partial x^{\beta_s}}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{x}^{\nu_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial \bar{x}^{\nu_t}}{\partial x^{\gamma_t}}\right)_0$$

$$(D_{\nu_1\cdots\nu_t} \bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s})_0$$

给定。然因在点 x^{κ}_0 处

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\right)_0 = \delta^{\lambda}_{\mu}, \quad \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}}\right)_0 = \delta^{\lambda}_{\mu},$$

故上式变为

$$(D_{\gamma_1\cdots\gamma_t} T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s})_0 = \left(\frac{\partial^t \bar{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}}{\partial \bar{x}^{\gamma_1}\cdots\partial \bar{x}^{\gamma_t}}\right)_0.$$

在各点 x_0^κ 具有这样分量的张量$D_{\gamma_1\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 叫做张量$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 的 **t 阶展开。**

容易验证张量$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 的 1 阶展开和以前学过的共变导数一致。但 2 阶以上的展开一般不和二阶以上共变导数一致。原因是，张量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 的 t 阶展开$D_{\gamma_1\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 关于它的 t 个指标 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 对称，但张量$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 的 t 阶共变导数$\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\cdots\nabla_{\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 一般不能说关于 t 个指标 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 对称。

以下从一般坐标系(x^κ)出发，以点 x_0^κ 为原点的法坐标系($\bar{x}^\kappa$)下的克氏记号用$\{\bar{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\}$表示，同理从一般坐标系 ($x^{\kappa'}$) 出发，以上述相同点为原点的法坐标系($\bar{x}^{\kappa'}$)下的克氏记号用$\{\bar{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}}\}$表示，则在 $\{\bar{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\}$ 与 $\{\bar{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}}\}$之间有如下关系

$$\left\{\bar{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}}\right\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\lambda'}}\left\{\bar{{}^{\alpha}_{\gamma\beta}}\right\}+\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right).$$

然而，从法坐标系($\bar{x}^\kappa$)到法坐标系($\bar{x}^{\kappa'}$)的变换公式由

$$\bar{x}^{\kappa'}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\alpha}\right)_0\bar{x}^\alpha,\qquad \bar{x}^\alpha=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\kappa'}}\right)_0\bar{x}^{\kappa'}$$

而定，故上式变为

$$\left\{\bar{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}}\right\}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\alpha}\right)_0\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\mu'}}\right)_0\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\lambda'}}\right)_0\left\{\bar{{}^{\alpha}_{\gamma\beta}}\right\}.$$

因此，此式对 $\bar{x}^\nu$ 求偏导数得

$$\frac{\partial\left\{\bar{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu'}}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\alpha}\right)_0\left(\frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\nu'}}\right)_0\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\mu'}}\right)_0\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^{\lambda'}}\right)_0\frac{\partial\left\{\bar{{}^{\alpha}_{\gamma\beta}}\right\}}{\partial\bar{x}^\delta}.$$

于是在点 x_0^κ 令

$$D_\nu\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}=\frac{\partial\left\{\bar{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^\nu},$$

则它是一个张量的分量，叫做$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$的 **1 阶展开**。完全一样，可以证明$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$的 t 阶展开

$$D_{\nu_1\cdots\nu_l}\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}=\frac{\partial^l\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu_1}\cdots\partial\overline{x}^{\nu_l}}$$

也是一个张量的分量。这样得到的张量叫做**法张量**。

以下求这种法张量和曲率张量的关系。

首先因为在法坐标系$(\overline{x}^{\kappa})$下，

$$\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\overline{x}^{\mu}\overline{x}^{\lambda}=0$$

恒成立，所以上式对 $\overline{x}^{\nu}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}\overline{x}^{\mu}\overline{x}^{\lambda}+\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}}\right\}\overline{x}^{\lambda}+\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\nu}}\right\}\overline{x}^{\mu}=0.$$

此式乘以 $\overline{x}^{\nu}$，求从 1 到 n 的总和，根据关系式 $\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\overline{x}^{\mu}\overline{x}^{\lambda}=0$ 得

$$\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}\overline{x}^{\mu}\overline{x}^{\lambda}\overline{x}^{\nu}=0.$$

故在法坐标的原点必须

$$\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}+\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\lambda\nu}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\mu}}+\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\mu}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\lambda}}=0.$$

另一方面，在法坐标系$(\overline{x}^{\kappa})$的原点

$$\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}=0,$$

故从曲率的表达式

$$\overline{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}-\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\mu}}+\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}}\right\}\left\{\overline{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}}\right\}-\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}}\right\}\left\{\overline{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}}\right\}$$

知，在法坐标系的原点

$$\overline{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}-\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\mu}}.$$

在此式中对调 μ 与 λ 得

$$\overline{K}_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\lambda\mu}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}-\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\mu}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\lambda}},$$

故上列二式相加得

$$\overline{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+\overline{K}_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa}=2\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}-\left(\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\mu}}+\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\nu}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\lambda}}\right)=3\frac{\partial\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}}{\partial\overline{x}^{\nu}}.$$

因此在法坐标系的原点得

$$\frac{\partial\{\overline{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}}\}}{\partial \overline{x}^{\nu}}=\frac{1}{3}(\overline{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+\overline{K}_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa}) \ .$$

因为此式两边都是张量的分量，故若此式返回原坐标系(x^{κ})，则得法张量 $D_{\nu}\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}$ 与曲率张量 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 间的关系式

$$D_{\nu}\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}=\frac{1}{3}(K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+K_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa}) \ .$$

4.5 弗雷内·塞雷公式

在黎曼空间里考虑一曲线 $x^{\kappa}=x^{\kappa}(s)$，其中 s 为从曲线一定点沿曲线量得的弧长。曲线上点 $x^{\kappa}(s)$ 对参数 s 的导数以

$$\xi_{(1)}^{\kappa}=\frac{dx^{\kappa}}{ds}$$

记之，则由恒等式

$$g_{\mu\lambda}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds}=g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\xi_{(1)}^{\lambda}=1$$

可见，$\xi_{(1)}^{\kappa}$ 为切于曲线的单位向量。将关系式

$$g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\xi_{(1)}^{\lambda}=1$$

沿曲线求共变导数，共变导数用 $\frac{\delta}{\delta s}$ 表示并注意 $\delta g_{\mu\lambda}=0$ 得

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\mu}\right)\xi_{(1)}^{\lambda}+g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\lambda}\right)=0 \ \text{即} \ g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\lambda}\right)=0.$$

上式说明，只要不 $\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\lambda}\equiv 0$，切向量 $\xi_{(1)}^{\kappa}$ 沿曲线与共变导数 $\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\kappa}$ 正交。如前所述，因为

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\kappa}=0$$

是测地线的微分方程，所以只要所论曲线不是测地线，则$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(1)}\neq 0$. 故用 $\kappa_{(1)}$ 表示$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(1)}$ 之长，用 $\xi^{\kappa}_{(2)}$ 表示与$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(1)}$ 同向的单位向量，则得

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(1)}=\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(2)}.$$

但 $\xi^{\kappa}_{(1)},\xi^{\kappa}_{(2)}$ 满足

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\lambda}_{(2)}=0 \text{ 以及 } g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\lambda}_{(2)}=1.$$

再沿曲线求这些式子的共变导数得

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(1)}\right)\xi^{\lambda}_{(2)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(2)}\right)\xi^{\lambda}_{(2)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0,$$

即

$$\kappa_{(1)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0.$$

这些式子说明，向量 $\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}$ 与二向量 $\xi^{\kappa}_{(1)},\xi^{\kappa}_{(2)}$ 全正交。故设 $\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}\neq 0$，用 $\kappa_{(2)}$ 表示其长，并用 $\xi^{\kappa}_{(3)}$ 表示与 $\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}$ 同向的单位向量，则有

$$\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}=\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(3)}, \text{ 即} \frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}=-\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\kappa_{2}\xi^{\kappa}_{(3)}.$$

但这里的 $\xi^{\kappa}_{(3)}$ 是满足

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\lambda}_{(3)}=0,\qquad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\lambda}_{(3)}=0,\qquad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\xi^{\lambda}_{(3)}=1$$

的向量。再沿曲线求它们的共变导数得

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(1)}\right)\xi^{\lambda}_{(3)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(2)}\right)\xi^{\lambda}_{(3)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(3)}\right)\xi^{\lambda}_{(3)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

即

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$\kappa_{(2)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0.$$

然而这些式子说明$\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}$与三向量 $\xi^{\kappa}_{(1)},\xi^{\kappa}_{(2)},\xi^{\kappa}_{(3)}$ 全正交。假设 $\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}\neq 0$，以 $\kappa_{(3)}$ 表示其长，并用 $\xi^{\kappa}_{(4)}$ 表示与 $\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}$ 同向的单位向量，故得

$$\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}=\kappa_{(3)}\xi^{\kappa}_{(4)},$$

即

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}=-\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\kappa_{(3)}\xi^{\kappa}_{(4)}.$$

但这里的 $\xi^{\kappa}_{(4)}$ 满足

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\lambda}_{(4)}=0,\quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\lambda}_{(4)}=0,\quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\xi^{\lambda}_{(4)}=0,\quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(4)}\xi^{\lambda}_{(4)}=1.$$

再沿曲线求这些式子的共变导数，并重复方才的讨论，终于得到公式

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n-1)}=-\kappa_{(n-2)}\xi^{\kappa}_{(n-2)}+\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n)},$$

并得互相正交的单位向量 $\xi^{\kappa}_{(1)},\xi^{\kappa}_{(2)},\cdots,\xi^{\kappa}_{(n)}$，最后的向量 $\xi^{\kappa}_{(n)}$ 满足 n

个关系式

$$g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\xi_{(n)}^{\lambda}=0,$$
$$g_{\mu\lambda}\xi_{(2)}^{\mu}\xi_{(n)}^{\lambda}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{\mu\lambda}\xi_{(n-1)}^{\mu}\xi_{(n)}^{\lambda}=0,$$
$$g_{\mu\lambda}\xi_{(n)}^{\mu}\xi_{(n)}^{\lambda}=1.$$

再沿曲线求这些式子的共变导数得

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(1)}^{\mu}\right)\xi_{(n)}^{\lambda}+g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$
$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(2)}^{\mu}\right)\xi_{(n)}^{\lambda}+g_{\mu\lambda}\xi_{(2)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n-1)}^{\mu}\right)\xi_{(n)}^{\lambda}+g_{\mu\lambda}\xi_{(n-1)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$
$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\mu}\right)\xi_{(n)}^{\lambda}+g_{\mu\lambda}\xi_{(n)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$

即

$$g_{\mu\lambda}\xi_{(1)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$
$$g_{\mu\lambda}\xi_{(2)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\kappa_{(n-1)}+g_{\mu\lambda}\xi_{(n-1)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0,$$
$$g_{\mu\lambda}\xi_{(n)}^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\lambda}\right)=0.$$

然而这些方程说明，向量 $\kappa_{(n-1)}\xi_{(n-1)}^{\kappa}+\frac{\delta}{\delta s}\xi_{(n)}^{\kappa}$ 与 n 个互相正交的单位向量 $\xi_{(1)}^{\kappa},\xi_{(2)}^{\kappa},\cdots,\xi_{(n)}^{\kappa}$ 全正交。又因我们的空间是 n 维的，故这

样的向量 $\kappa_{(n-1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(n-1)}+\frac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(n)}$ 的分量只能全部是 0，从而得

$$\kappa_{(n-1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(n-1)}+\frac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(n)}=0,$$

即

$$\frac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(n)}=-\kappa_{(n-1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(n-1)}.$$

这一系列公式

$$\begin{cases}\dfrac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(1)}= & \kappa_{(1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(2)},\\[2mm] \dfrac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(2)}=-\kappa_{(1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(1)} & +\kappa_{(2)}\overset{\kappa}{\xi}_{(3)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(n-1)}=-\kappa_{(n-2)}\overset{\kappa}{\xi}_{(n-2)} & +\kappa_{(n-1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(n)},\\[2mm] \dfrac{\delta}{\delta s}\overset{\kappa}{\xi}_{(n)}=-\kappa_{(n-1)}\overset{\kappa}{\xi}_{(n-1)} & \end{cases}$$

叫做**弗雷内·塞雷公式**。这里出现的 $n-1$ 个数量 $\kappa_{(1)}$，$\kappa_{(2)}$，…，$\kappa_{(n-1)}$ 分别叫做曲线的**第一曲率，第二曲率，…，第 $n-1$ 曲率**；n 个互相正交的单位向量 $\overset{\kappa}{\xi}_{(1)}$，$\overset{\kappa}{\xi}_{(2)}$，…，$\overset{\kappa}{\xi}_{(n)}$ 分别叫做曲线的**切向量，第一法向量，第二法向量，…，第 $n-1$ 法向量**。

第五章 曲 面 论

5.1 n 维黎曼空间 V_n 中的 m 维子空间 V_m

用 V_n表示以前所考虑的 n 维黎曼空间。其中的点的坐标用$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$表示。设它的度量，即二点 (x^κ) 与 $(x^\kappa + dx^\kappa)$ 间的距离 ds 由 $ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ 定义。现在将 $m(<n)$ 个互相独立的变量 $(x^{\dot 1}, x^{\dot 2}, \cdots, x^{\dot m})$的函数 $x^\kappa = x^\kappa(x^{\dot 1}, x^{\dot 2}, \cdots, x^{\dot m})$ 看作V_n中的点的坐标，这样的点集形成 n 维黎曼空间 V_n 的 m 维子空间。这个子空间的维数确实是 m，而不小于 m 这个事实可由 x^κ 对 x^i $(h, i, j, k, \cdots = \dot 1, \dot 2, \cdots, \dot m)$的偏导数

$$B_i{}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}$$

所作成的**函数矩阵的秩是** m来表示。以后我们假设这一事实成立。如果参数$(x^{\dot 1}, x^{\dot 2}, \cdots, x^{\dot m})$的值一定，因此它们的函数 x^κ 之值也就一定，从而子空间中的点一定，所以 $(x^{\dot 1}, x^{\dot 2}, \cdots, x^{\dot m})$可以看作子空间中点的坐标。今在子空间中取非常接近两点(x^i) 与$(x^i + dx^i)$。把这两点看作 V_n 里的点时，它们的坐标分别为(x^κ)与$\left(x^\kappa + \dfrac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}dx^i\right)$。故两点间的距离 ds 是

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda = g_{\mu\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}dx^j dx^i.$$

故令

$$g_{ji} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}g_{\mu\lambda} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$$

时，则 m 维子空间里两点(x^h)与$(x^h + dx^h)$间的距离 ds 可由

$$ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$$

给定。然而 $|g_{\mu\lambda}| = g \neq 0$，并假设了由 $B_j{}^\mu$ 所作的矩阵之秩为 m，故由 $g_{ji} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$ 所作的 m 行 m 列行列式的值亦不为 0，而且二次微分形式 $ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$ 是正定形式。因此得

定理 n 维黎曼空间 V_n 里的 m 维子空间是以 $g_{ji} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$ 为基本张量的一个 m 维黎曼空间。

这个 m 维子黎曼空间今后用 V_m 表示。上述定理说明在子空间 V_m 中非常接近两点间的距离用 V_n 里的基本张量来求，还是用 V_m 里的基本张量来求结果都一样。

对于子空间 V_m 里一点(x^i)处的微小向量 dx^i，在 V_n 里有微小向量 dx^κ 与之对应，则它们之间有如下关系

$$dx^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i} dx^i = B_i{}^\kappa dx^i.$$

这件事说明，若将此向量看做 V_n 里的向量，则其分量为 dx^κ，若看做 V_m 里的向量，则其分量为 dx^i。再考虑一个这样的向量

$$\delta x^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i} \delta x^i = B_i{}^\kappa \delta x^i .$$

求二向量 dx^κ 与 δx^κ 之间的夹角。

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{g_{\mu\lambda} dx^\mu \delta x^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda} dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{g_{\mu\lambda}\delta x^\mu \delta x^\lambda}} \\
&= \frac{g_{\mu\lambda} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda dx^j \delta x^i}{\sqrt{g_{\mu\lambda} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda dx^j dx^i}\sqrt{g_{\mu\lambda} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda \delta x^j \delta x^i}} \\
&= \frac{g_{ji} dx^j \delta x^i}{\sqrt{g_{ji} dx^j dx^i}\sqrt{g_{ji}\delta x^j \delta x^i}}.
\end{aligned}$$

因为 $dx^\kappa = B_i{}^\kappa dx^i$ 与 $\delta x^\kappa = B_i{}^\kappa \delta x^i$ 是切于子空间 V_m 的两个向量，所以得

定理 切于子空间 V_m 的二向量的夹角不论用 V_n 里的基本张量来求，还是用 V_m 里的基本张量来求结果一样。

g_{ji} 叫做 V_m 的**第一基本张量**。

5.2 切向量 法向量

从前节看到了对于子空间 V_m 里的微小向量 dx^i，对应的环绕空间 V_n 里的微小向量 dx^κ 由

$$dx^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i} dx^i = B_i^\kappa dx^i$$

而定。这里的 dx^κ 是子空间 V_m 的微小切向量，上式表示它是 B_i^κ 的**线性组合**。上式中的 dx^i 可以看做任意微小向量，故将B_i^κ 关于 κ 看作 V_n 里的向量时，是子空间V_m 的 m 个($i=\dot{1},\dot{2},\cdots,\dot{m}$) 切向量。因为前面已经假设由 B_i^κ 所作的矩阵的秩为 m，故 B_i^κ 是 V_m 的 m 个线性无关的切向量。

因此，如果有 V_n 里的向量 v^κ 与 V_m 相切，则此向量应由 m 个线性无关的 B_i^κ 的线性组合表达出来。即应存在满足

$$v^\kappa = B_i^\kappa v^i$$

的 v^i。这里出现的 v^i 是向量 v^κ 在 V_m 上的分量。

再者，若在子空间 V_m 上取一点，则在此点有 V_m 的 m 个线性无关切向量 B_i^κ，但在 V_n 中的某点线性无关的向量共可取 n 个，故在此点尚能取 $n-m$ 个线性无关的向量。我们选这些向量与 V_m 正交，即与所有的 B_i^κ 正交，而且互相正交的单位向量 B_P^κ($P,Q,R,\cdots=\dot{m}+\dot{1},\dot{m}+\dot{2},\cdots,\dot{n}$)。

由假设知

$$g_{\mu\lambda}B_i^\mu B_P^\lambda = 0, \qquad g_{\mu\lambda}B_P^\mu B_Q^\lambda = \delta_{PQ} = \begin{cases}1 & P=Q,\\ 0 & P\neq Q.\end{cases}$$

B_P^κ 叫做子空间 V_m 在各点的**单位法向量**。

由 V_m 的共变基本张量 g_{ji} 作出反变基本张量 g^{ih}，定义

$$B^i{}_\lambda = g_{\lambda\mu}g^{ij}B_j^\mu.$$

因
$$B^i{}_\lambda B_k^\lambda = g_{\lambda\mu}g^{ij}B_j^\mu B_k^\lambda = g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i,$$

故令

$$B_{P\lambda} = g_{\lambda\mu}B_P^\mu$$

时，便得以下四式。

$$B^i{}_\lambda B_k{}^\lambda = \delta^i_k,\quad B_{P\lambda}B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ},\quad B^i{}_\lambda B_P{}^\lambda = 0,\quad B_{P\lambda}B_k{}^\lambda = 0.$$

这些式子说明二 n 行 n 列矩阵 $(B^i{}_\lambda, B_{P\lambda})$ 与 $(B_k{}^\lambda,\ B_Q{}^\lambda)$ 互为逆矩阵，故由上式又得恒等式

$$B^i{}_\mu B_i{}^\lambda + B_{P\mu}B_P{}^\lambda = \delta^\lambda_\mu.$$

在此式中升标，降标得

$$g^{ji}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda + B_P{}^\mu B_P{}^\lambda = g^{\mu\lambda},$$

$$g_{ji}B^j{}_\mu B^i{}_\lambda + B_{P\mu}B_{P\lambda} = g_{\mu\lambda}.$$

今在 V_m 上的一点考虑未必与 V_n 相切的一向量 v^κ。这个向量在这一点应该由向量 $B_i{}^\kappa$ 与 $B_P{}^\kappa$ 的线性组合表达，即

$$v^\kappa = B_i{}^\kappa v^i + B_P{}^\kappa v_P,$$

式中 $B_i{}^\kappa v^i$ 是与切子空间 V_m 相切方向上的分量，$B_P{}^\kappa v_P$ 是与子空间 V_m 正交方向上的分量。

5.3 V_n 的$\left\{ {}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda} \right\}$与 V_m 的$\left\{ {}_{j}{}^{h}{}_{i} \right\}$之间的关系

在前二节里看到 V_m 里的基本张量 g_{ji} 由

$$g_{ji} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$$

而定。又因子空间 V_m 也是一个黎曼空间，故应该能作出定义 V_m 的共变导数时所需要的克氏记号

$$\left\{ {}_{j}{}^{h}{}_{i} \right\} = \frac{1}{2} g^{ha}\left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a}\right).$$

在本节里求 V_n 的$\left\{ {}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda} \right\}$ 与 V_m 的$\left\{ {}_{j}{}^{h}{}_{i} \right\}$之间的关系。

$$g_{ia} = B_i{}^\nu B_a{}^\mu g_{\nu\mu}$$

对 x^j 求偏导数得

$$\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} = \frac{\partial B_i{}^\nu}{\partial x^j} B_a{}^\mu g_{\nu\mu} + B_i{}^\nu \frac{\partial B_a{}^\mu}{\partial x^j} g_{\nu\mu} + B_i{}^\nu B_a{}^\mu B_j{}^\lambda \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda},$$

同理得

$$\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} = \frac{\partial B_j{}^\nu}{\partial x^i} B_a{}^\mu g_{\nu\mu} + B_j{}^\nu \frac{\partial B_a{}^\mu}{\partial x^i} g_{\nu\mu} + B_j{}^\nu B_a{}^\mu B_i{}^\lambda \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda},$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a} = \frac{\partial B_j^{\nu}}{\partial x^a} B_i^{\mu} g_{\nu\mu} + B_j^{\nu} \frac{\partial B_i^{\mu}}{\partial x^a} g_{\nu\mu} + B_j^{\nu} B_i^{\mu} B_a^{\lambda} \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}.$$

注意 $\dfrac{\partial B_j^{\nu}}{\partial x^i} = \dfrac{\partial B_i^{\nu}}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^j \partial x^i}$，故得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a}\right)$$

$$= \frac{1}{2} B_a^{\nu} B_j^{\mu} B_i^{\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) + B_a^{\nu} \frac{\partial B_i^{\mu}}{\partial x^j} g_{\nu\mu}.$$

此式乘以 g^{ha} 并关于 a 缩短得

$$\left\{{h \atop j\,i}\right\} = \frac{1}{2} g^{ha}\left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} - \frac{\partial g^{ji}}{\partial x^a}\right)$$

$$= g^{ha} B_a^{\nu}\left[\frac{1}{2} B_j^{\mu} B_i^{\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) + \frac{\partial B_i^{\mu}}{\partial x^j} g_{\nu\mu}\right]$$

$$= B^h_{\kappa}\left[\frac{1}{2} B_j^{\mu} B_i^{\lambda} g^{\kappa\nu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) + \frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}\right].$$

因此

$$\left\{{h \atop j\,i}\right\} = B^h_{\kappa}\left(B_j^{\mu} B_i^{\lambda}\left\{{\kappa \atop \mu\,\lambda}\right\} + \frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}\right).$$

这是今后常用的公式。

5.4 沿 V_m 的广义共变导数，欧拉·斯高天曲率张量

以前定义的量

$$B_i^{\kappa} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^i}$$

关于指标 κ 表示一个 V_n 的反变向量.原因是，对于V_n 里的坐标变换

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n),$$

B_i^{κ} 的变换规律是

$$B_i^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} B_i^{\kappa}.$$

至于 B_i^κ 关于下指标 i 又表示怎样的几何量呢？今在 V_m 里进行坐标变换

$$x^{i'}=x^{i'}(\dot{x}^1,\ \dot{x}^2,\cdots,\ \dot{x}^m),$$

B_i^κ 的变换规律是

$$B_{i'}^\kappa=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}B_i^\kappa.$$

可见 B_i^κ 关于下指标 i 是 V_m 中的共变向量。

我们知道 V_n 里的向量 u^κ 的共变微分 δu^κ 是

$$\delta u^\kappa=du^\kappa+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\}dx^\mu u^\lambda,$$

V_m 里的向量 v^h 的共变微分 δv^h 是

$$\delta v^h=dv^h+\{{}_j{}^h{}_i\}dx^j v^i.$$

象 B_i^κ 兼有 V_n 的指标与 V_m 的指标的量，它的共变微分应怎样定义呢？

为了找出规律，用 V_n 里的反变向量 u^κ，V_m 里的共变向量 v_i 作出与 B_i^κ 类似的量 v_iu^κ。假设它的共变微分服从普通微分的规律，则

$$\begin{aligned}\delta(v_iu^\kappa)&=(\delta v_i)u^\kappa+v_i(\delta u^\kappa)\\&=(dv_i-\{{}_j{}^h{}_i\}dx^jv_h)u^\kappa+v_i(du^\kappa+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\}dx^\mu u^\lambda)\\&=d(v_iu^\kappa)+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\}dx^\mu v_iu^\lambda-\{{}_j{}^h{}_i\}dx^jv_hu^\kappa,\end{aligned}$$

所以象 B_i^κ 这样量的共变微分定义为

$$\delta B_i^\kappa=dB_i^\kappa+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\}dx^\mu B_i^\lambda-\{{}_j{}^h{}_i\}dx^jB_h^\kappa,$$

共变导数定义为

$$\nabla_jB_i^\kappa=\frac{\partial B_i^\kappa}{\partial x^j}+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\}B_j^\mu B_i^\lambda-\{{}_j{}^h{}_i\}B_h^\kappa$$

是很自然的。为了使这种规律更明确，写下 $T_{i\lambda}{}^\kappa$ 的共变微分与共变导数：

$$\delta T_{i\lambda}{}^\kappa=dT_{i\lambda}{}^\kappa+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\alpha\}dx^\mu T_{i\lambda}{}^\alpha-\{{}_\mu{}^\alpha{}_\lambda\}dx^\mu T_{i\alpha}{}^\kappa-\{{}_j{}^h{}_i\}dx^jT_{h\lambda}{}^\kappa.$$

$$\nabla_jT_{i\lambda}{}^\kappa=\frac{\partial T_{i\lambda}{}^\kappa}{\partial x^j}+\{{}_\mu{}^\kappa{}_\alpha\}B_j^\mu T_{i\lambda}{}^\alpha-\{{}_\mu{}^\alpha{}_\lambda\}B_j^\mu T_{i\alpha}{}^\kappa-\{{}_j{}^h{}_i\}T_{h\lambda}{}^\kappa.$$

这样定义的共变微分与共变导数分别叫做**沿 V_m 的广义共变微分与共变导数**,或 **Van der Waerden Bortolotti 共变微分与共变导数**。与第三章第二节的方法相同可以证明这样的共变微分与共变导数仍然具备张量性质。并与普通微分服从相同的规律。但在这里不再赘述。

再注意 $B_i^{\kappa}=\dfrac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^i}$,改写 $\nabla_j B_i^{\kappa}$,则得

$$\nabla_j B_i^{\kappa}=\frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}B_j^{\mu}B_i^{\lambda}-\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}B_h^{\kappa}$$

$$=\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^j\partial x^i}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^j}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^i}-\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^h}.$$

令此张量为

$$H_{ji}{}^{\kappa}=\nabla_j B_i^{\kappa},$$

叫做 **V_m 关于 V_n 的曲率张量**或**欧拉·斯高天曲率张量**。

由上述定义可见,欧拉·斯高天曲率张量关于 j 与 i 对称。以下计算 $B^h{}_{\kappa}H_{ji}{}^{\kappa}$ 得

$$B^h{}_{\kappa}H_{ji}{}^{\kappa}=B^h{}_{\kappa}\left(\frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}B_j^{\mu}B_i^{\lambda}-\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}B_h^{\kappa}\right)$$

$$=B^h{}_{\kappa}\left(\frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}B_j^{\mu}B_i^{\lambda}\right)-\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}.$$

由前节末证明的公式可见,此式右边恒为 0。

故得 $B^h{}_{\kappa}H_{ji}{}^{\kappa}=0$,即 $g_{\mu\lambda}B_h^{\mu}H_{ji}{}^{\lambda}=0$。

此式说明如果将 $H_{ji}{}^{\kappa}$ 关于 κ 看做 V_n 中的反变向量,则和 B_i^{κ} 全正交,故与 V_m 正交,从而它们可用 B_P^{κ} 的线性组合表达[1]:

$$H_{ji}{}^{\kappa}=H_{jiP}B_P^{\kappa}.$$

这里的 H_{jiP} 可由

$$H_{jiP}=g_{\mu\lambda}H_{ji}{}^{\mu}B_P^{\lambda}$$

求出。H_{jiP} 叫做子空间 V_m 关于法向量 B_P^{κ} 的**第二基本张量**。

---

1) 下式是高斯公式的推广。(译者注)

特别是维数为 $m=n-1$ 的子空间叫做**超曲面**。这时正交于子空间的单位法向量只有一个。故令

$$B_{\dot{n}}^{\cdot\kappa}=B^{\kappa},\qquad H_{ji\dot{n}}=H_{ji},$$

则得

$$H_{jk}{}^{\kappa}=H_{jk}B^{\kappa}$$

如果环绕黎曼空间 V_n 是三维欧氏空间，$m=2$ 时 H_{ji} 就是普通微分几何里的第二基本形式

$$H_{\dot{1}\dot{1}}dx^{\dot{1}}dx^{\dot{1}}+2H_{\dot{1}\dot{2}}dx^{\dot{1}}dx^{\dot{2}}+H_{\dot{2}\dot{2}}dx^{\dot{2}}dx^{\dot{2}}$$

的系数。

5.5 子空间 V_m 上的曲线

在子空间 V_m 之中，考虑一条曲线 $x^h(s)$。这里 s 是曲线的弧长。将此曲线看做 V_n 中的曲线，求其方程。将 $x^h(s)$代入

$$x^{\kappa}=x^{\kappa}(x^{\dot{1}},\ x^{\dot{2}},\cdots,\ x^{\dot{m}})$$

得 $x^{\kappa}(s)$。这是所求方程。此 $x^{\kappa}(s)$对 s 求导数得单位切向量

$$\frac{dx^{\kappa}}{ds}=B_h{}^{\kappa}\frac{dx^h}{ds}\quad .$$

再沿曲线求此式的共变导数得

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}=B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}+H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}.$$

这里出现的三个张量$\frac{\delta}{ds}\frac{dx^{\kappa}}{ds}$,$B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$，$H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$分别叫做$V_m$ 上曲线的**绝对曲率向量，相对曲率向量，法曲率向量**，其长分别叫做**绝对曲率，相对曲率，法曲率**.因为 $B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$ 是子空间V_m 的切向量，$H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$是子空间 V_m 的法向量，故由上式得以下各种有意思的定理。

定理 1. 绝对曲率向量等于相对曲率向量与法曲率向量之和。

此定理由定义显然。

定理 2. 绝对曲率的平方等于相对曲率的平方与法曲率的平方之和。

原因是，用 A^κ 表示绝对曲率向量，R^κ 表示相对曲率向量，N^κ 表示法曲率向量，则

$$A^\kappa = R^\kappa + N^\kappa.$$

然因 R^κ 与 N^κ 正交，即 $g_{\mu\lambda}R^\mu N^\lambda = 0$。故由上式得

$$g_{\mu\lambda}A^\mu A^\lambda = g_{\mu\lambda}R^\mu R^\lambda + g_{\mu\lambda}N^\mu N^\lambda.$$

定理 3. 用 A 表示绝对曲率，用 N 表示法曲率，θ 表示绝对曲率向量与法曲率向量之间的夹角，则

$$N = A\cos\theta.$$

原因是，由假设知道

$$g_{\mu\lambda}A^\mu N^\lambda = AN\cos\theta.$$

将 $A^\kappa = R^\kappa + N^\kappa$ 代入此式，注意 $g_{\mu\lambda}R^\mu N^\lambda = 0$，$g_{\mu\lambda}N^\mu N^\lambda = N^2$ 得 $N^2 = AN\cos\theta$，即 $N = A\cos\theta$，这是有名的**梅尼定理**的推广。

定理 4. 如果曲线 $x^\kappa(s)$ 是 V_n 里的测地线，则也是子空间 V_m 的测地线。

由假设知道

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds} = B_h{}^\kappa\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} + H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

的左边为 0。然因 $B_h{}^\kappa\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{\delta s}$ 与 $H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ 是互相正交的向量，其和为 0，则必然每个都是 0。从而

$$B_h{}^\kappa\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0. \qquad \text{因此得} \qquad \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0.$$

后式说明 $x^h(s)$ 是 V_m 里的测地线，因此定理得证。

定理 5. $x^h(s)$ 为 V_m 里的测地线的充要条件是曲线 $x^\kappa(s)$ 的绝对曲率向量与 V_m 正交。

原因是，设 $x^h(s)$ 是 V_m 的测地线，则由 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0$ 得

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds}=H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds},$$

即绝对曲率向量与 V_m 正交．故得必要条件．其次设绝对曲率向量 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds}$ 与 V_m 正交，则在

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds}=B_h{}^\kappa\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}+H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

里必须 $B_h{}^\kappa\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$．因此 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$， 即 $x^h(s)$ 是 V_m 的测地线。于是得此条件是充分的。

定理 6. 在子空间中，曲线上一点的法曲率向量等于过此点与此曲线相切在子空间中的测地线的绝对曲率向量。

原因是，法曲率向量 $H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ 仅仅依赖于方向 $\frac{dx^h}{ds}$，只要 $\frac{dx^h}{ds}$ 相同，不论 $\frac{\delta}{ds}\frac{dx^h}{ds}$ 为 0 与否取相同的值。然而当 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$ 时，$H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ 等于 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds}$．

5.6 平均曲率 平均曲率向量

今在 V_m 之中选取标架，即取满足

$$g_{ji}h_{(a)}^{j}h_{(b)}^{i}=\delta_{ab}=\begin{cases}1 & a=b\\ 0 & a\neq b\end{cases}\quad(a,b,c,\cdots=1,2,\cdots,m)$$

的互相正交的 m 个单位向量 $h_{(a)}^{h}$，指向方向 $h_{(a)}^{h}$ 的曲线的法曲率向量是 $H_{ji}{}^\kappa h_{(a)}^{j}h_{(a)}^{i}$．故由关系式 $\sum_{a=1}^{m}h_{(a)}^{j}h_{(a)}^{i}=g^{ji}$ 可见，这些法曲率向量对于所有方向 $h_{(a)}^{h}$ 的平均是

$$\frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m}H_{ji}{}^\kappa h_{(a)}^{j}h_{(a)}^{i}=\frac{1}{m}H_{ji}{}^\kappa g^{ji}.$$

这个结果与 $h_{(a)}^{h}$ 的选法无关。与此子空间V_m 正交的向量$\frac{1}{m}H_{ji}{}^{\kappa}g^{ji}$ 叫做**平均曲率向量**，其长叫做**平均曲率**。由上述诸事实得下列定理。

定理 7. 对于在子空间上一点互相正交的m 个方向，子空间的法曲率向量的平均与这些方向的选法无关。

5.7 曲率线

先从子空间是超曲面的情况开始讨论。这时超曲面只有一个单位法向量，用 B^{κ} 表示之，则欧拉·斯高天曲率张量 $H_{ji}{}^{\kappa}$ 可以写如

$$H_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}B^{\kappa}.$$

故对于超曲面的切方向 h^h，超曲面的法曲率N是

$$N=\frac{H_{ji}h^jh^i}{g_{ji}h^jh^i}.$$

使此法曲率N达到极值的方向 h^h 必须满足

$$(H_{ji}-Ng_{ji})h^i=0.$$

这时N是特征方程

$$|H_{ji}-Ng_{ji}|=0$$

的根，满足这样条件的方向 h^h 叫做**主方向**。N叫做**主曲率**，经常指向主方向的曲线叫做**曲率线**。

假设决定法曲率N的方程 $|H_{ji}-Ng_{ji}|=0$ 的根互不相同，分别以 $N_{(1)},N_{(2)},\cdots,N_{(n-1)}$ 表示，对应于这些值的方向记做 $h_{(1)}^{h}$，$h_{(2)}^{h},\cdots,h_{(n-1)}^{h}$，则

$$(H_{ji}-N_{(a)}g_{ji})h_{(a)}^{i}=0\quad(a=1,2,\cdots,n-1)$$

$$(H_{ji}-N_{(b)}g_{ji})h_{(b)}^{i}=0\quad(b=1,2,\cdots,n-1)$$

向前式乘以 $h_{(b)}^{j}$，后式乘以 $h_{(a)}^{j}$ 并缩短之，然后边边相减得

$$(N_{(a)}-N_{(b)})g_{ji}h_{(a)}^{j}h_{(b)}^{i}=0.$$

当 $a\neq b$ 时，$N_{(a)}\neq N_{(b)}$，故由上式得

$$g_{ji}h_{(a)}^{j}h_{(b)}^{i}=0.\qquad(a\neq b)$$

因此，在这种情况下主方向全都互相正交[1)]，故 $h_{(a)}^{\ i}$ 作成切于V_m 的正交标架。因此任何单位向量 h^h 都应表达为 $h_{(a)}^{\ h}$ 的线性组合：

$$h^h = \cos\alpha_1 h_{(1)}^{\ h} + \cos\alpha_2 h_{(2)}^{\ h} + \cdots + \cos\alpha_{n-1} h_{(n-1)}^{\ h}.$$

但这里的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 分别表示 h^h 与 $h_{(1)}^{\ h}, h_{(2)}^{\ h}, \cdots, h_{(n-1)}^{\ h}$ 之间的夹角。故将此式代入 h^h 方向上的法曲率的定义式

$$N = \frac{H_{ji}h^jh^i}{g_{ji}h^jh^i} = H_{ji}h^jh^i$$

中得

$$N = N_{(1)}\cos^2\alpha_1 + N_{(2)}\cos^2\alpha_2 + \cdots + N_{(n-1)}\cos^2\alpha_{n-1}.$$

但式中

$$N_{(a)} = H_{ji}h_{(a)}^{\ j}h_{(a)}^{\ i}.$$

当 $a \neq b$ 时，$H_{ji}h_{(a)}^{\ j}h_{(b)}^{\ i} = 0$. 上式是有名的**欧拉定理**的推广。

其次讨论一般 m 维子空间的曲率线。在这种情况下与子空间正交而且互相正交的单位向量 $B_P{}^\kappa$ 有 $n-m$ 个，故欧拉·斯高天张量 $H_{ji}{}^\kappa$ 可写成

$$H_{ji}{}^\kappa = H_{jiP}B_P{}^\kappa.$$

与前相同，这时满足

$$(H_{jiP} - N_P g_{ji})h^i = 0$$

的 N_P 叫做关于法向量 $B_P{}^\kappa$ 的**主曲率**，h^h 为关于法向量 $B_P{}^\kappa$ 的**主曲率方向**。经常指向主曲率方向的曲线叫做**曲率线**。可见在这种情况下，主曲率方向，曲率线的定义与法线 $B_P{}^\kappa$ 的选法有关。

5.8 渐近曲线

仍然从超曲面的情况开始，这时欧拉·斯高天曲率张量可以写为

$$H_{ji}{}^\kappa = H_{ji}B^\kappa.$$

如果超曲面的二切向量 u^h 与 v^h 满足

$$H_{ji}u^jv^i = 0,$$

1) 也互相共轭。（译者注）

就说向量 u^h，v^h 在超曲面上具有互相**共轭的方向**。在超曲面上切线方向经常指向共轭方向的两系曲线族叫做**互相共轭的曲线**。如前所述，在超曲面上一点处的主方向互相共轭，两系曲率线也互相共轭。

如果超曲面上一个方向 u^h 与自己共轭．即满足

$$H_{ji}u^j u^i = 0,$$

则 u^h 的方向叫做**渐近方向**.经常指向渐近方向的曲线叫做**渐近曲线**，故渐近曲线 $x^h(s)$ 满足方程

$$H_{ji}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0,\text{ 即 } H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

从而由

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} + H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

得如下定理。

定理 8. 超曲面上的曲线为渐近曲线的充要条件是此曲线的绝对曲率向量与超曲面相切。

原因是，如果此曲线为超曲面的渐近曲线，即 $H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0$，因此 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$，即绝对曲率向量与超曲面相切。又如绝对曲率向量与超曲面相切，则 $H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0$．即得 $H_{ji}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0$.

定理 9. 超曲面上一曲线为环绕空间 V_n 的测地线的充要条件是此曲线是超曲面上的测地线又是渐近曲线。

原因是，如果超曲面上的曲线 $x^h(s)$ 是 V_n 里的测地线，则由

$$0 = \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} + H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

得 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0$ 以及 $H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0$．这说明超曲面上的曲线 $x^h(s)$ 是超曲面上的测地线又是渐近曲线。反之，如果超曲面上的曲线

$x^h(s)$ 是超曲面上的测地线又是渐近曲线，则 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$，$H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}=0$. 因此 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}=0$，即曲线 $x^{\kappa}(s)$是 V_n 的测地线。

其次讨论一般子空间 V_m 的情况。在这种情况下，设与子空间 V_m 正交而又互相正交的 $n-m$ 个单位向量为 $B_P{}^{\kappa}$，则 $H_{ji}{}^{\kappa}=H_{jiP}B_P{}^{\kappa}$，这里 H_{jiP} 与法向量的选法有关。但对于一般的子空间V_m 定义渐近方向与渐近曲线最好与法向量的选法无关，并且当 $m=n-1$ 时又变为前述的定义。为此目的，取张量

$$g_{\mu\lambda}H_{kj}{}^{\mu}H_{ih}{}^{\lambda}=H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda},$$

用

$$H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}u^kv^ju^iv^h=0$$

定义共轭方向 u^h 与 v^h。显然这个定义与法向量 $B_P{}^h$ 的选法无关，当 $m=n-1$ 时 $H_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}B^{\kappa}$，故由

$$H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}u^kv^ju^iv^h=H_{kj}H_{ih}u^kv^ju^iv^h=(H_{ji}u^jv^i)^2=0$$

得 $H_{ji}u^jv^i=0$，因此包含以前的定义。

以后的事与 $m=n-1$ 的情况相同，其切向量经常互相共轭的两系曲线族叫做共轭曲线族。自共轭的方向叫做渐近方向，经常指向渐近方向的曲线叫做渐近曲线。对于渐近曲线 $x^h(s)$来说，

$$H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^h}{ds}=0,\text{即}\ H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}=0.$$

显然定理 8 与 9 对于一般子空间也成立。

5.9 全测地曲面　全脐点曲面

将子空间 V_m 中的任何测地线看做 V_n 中的曲线又是测地线时，此子空间叫做**全测地曲面**. 试问什么是一子空间为全测地曲面的条件呢？当 V_m 的测地线 $x^h(s)$是 V_n 里的测地线，即当 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$ 时，将此曲线看做 V_n 的曲线 $x^{\kappa}(s)$ 又是测地线即 $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}=0$ 也成立，则

由

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds}=B_h{}^\kappa\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}+H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

知，对于 V_m 上的任何曲线，得

$$H_{ji}{}^\kappa\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}=0.$$

故由 $H_{ji}{}^\kappa=H_{ij}{}^\kappa$ 可见

$$H_{ji}{}^\kappa=0.$$

显然这个条件也是充分的．故得

定理 10. 子空间 V_m 为全测地曲面的充要条件是 $H_{ji}{}^\kappa=0$.

定理 11. 全测地曲面是极小流形，且其曲率线不定（参看下节）.

设 v^h 为 V_m 的切向量，把它看做 V_n 里的向量时，其分量为

$$v^\kappa=B_h{}^\kappa v^h.$$

又设 V_m 为全测地曲面，共变微分上式，则

$$\delta v^\kappa=B_h{}^\kappa\delta v^h+H_{ji}{}^\kappa v^j dx^i=B_h{}^\kappa\delta v^h.$$

故得如下定理.

定理 12. 如果全测地超曲面V_m 的一个切向量在环绕空间V_n 中沿曲面平移，则平移后仍与曲面相切，且在 V_m 里也平行.

如果在子空间 V_m 上一点，主曲率方向不定，则此点叫做 V_m 的**脐点**，一点为脐点的条件是在此点

$$H_{ji}{}^\kappa=g_{ji}H^\kappa$$

成立．上式乘以 g^{ji} 并缩短之得

$$g^{ba}H_{ba}{}^\kappa=mH^\kappa \qquad \therefore H^\kappa=\frac{1}{m}g^{ba}H_{ba}{}^\kappa.$$

故上条件变为

$$H_{ji}{}^\kappa=\frac{1}{m}g^{ab}H_{ba}{}^\kappa g_{ji}.$$

如果这个条件在子空间 V_m 上各点成立，则这个子空间叫做**全脐**

点曲面，全测地曲面是全脐点曲面的一种特例。

5.10 极小流形

设于 n 维黎曼空间 V_n 里给定一个闭 $m-1$ 维子空间 V_{m-1}，如果一个包含 V_{m-1} 的 m 维子空间以 V_{m-1} 为边界的 m 维体积取极值，则此 m 维子空间叫做**极小流形**。

以下求一个 m 维子空间 V_m

$$x^{\kappa}=x^{\kappa}(x^{\dot{1}},\ x^{\dot{2}},\cdots,\ x^{\dot{m}})$$

为极小流形的条件。

m 维子空间 V_m 以 V_{m-1} 为边界的 m 维体积由积分

$$\iint\cdots\int_{Vm}\sqrt{g'}\ dx^{\dot{1}}\,dx^{\dot{2}}\cdots dx^{\dot{m}}$$

而定。这里 g' 表示由 V_m 的基本共变张量 $g_{ji}=B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}g_{\mu\lambda}$ 作成的行列式。

表示上面积分的第一变分为 0 的**广义欧拉偏微分方程**是

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_i{}^{\lambda}}\right)-\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial x^{\lambda}}=0.$$

然因

$$g'=|g_{ji}|=|B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}g_{\mu\lambda}|,$$

故

$$\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_h{}^{\lambda}}=\frac{1}{2\sqrt{g'}}\frac{\partial g'}{\partial g_{ji}}\frac{\partial g_{ji}}{\partial B_h{}^{\lambda}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g'}}g'g^{ji}(\delta_j^h B_i{}^{\nu}g_{\lambda\nu}+\delta_i^h B_j{}^{\mu}g_{\mu\lambda})$$

$$=\sqrt{g'}\,g^{hk}B_k{}^{\nu}g_{\lambda\nu}$$

$$=\sqrt{g'}\,B^h{}_{\lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_h{}^{\lambda}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{g'}}\frac{\partial g'}{\partial g_{ji}}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^h}B^h{}_{\lambda}+\sqrt{g'}\frac{\partial B^h{}_{\lambda}}{\partial x^h}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g'}}g'g^{ji}(\{ {}_{h}{}^{a}{}_{j} \}g_{ai}+\{ {}_{h}{}^{a}{}_{i} \}g_{ja})B^{h}{}_{\lambda}+\sqrt{g'}\frac{\partial B^{h}{}_{\lambda}}{\partial x^{h}}$$

$$=\sqrt{g'}\left(\frac{\partial B^{h}{}_{\lambda}}{\partial x^{h}}+B^{h}{}_{\lambda}\{ {}_{h}{}^{i}{}_{i} \}\right),$$

以及

$$\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial x^{\lambda}}=\frac{1}{2\sqrt{g'}}\frac{\partial g'}{\partial g_{ji}}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g'}}g'g^{ji}B_{j}{}^{\nu}B_{i}{}^{\mu}\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{g'}g^{ji}B_{j}{}^{\nu}B_{i}{}^{\mu}(\{ {}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\nu} \}g_{\alpha\mu}+\{ {}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\mu} \}g_{\nu\alpha})$$

$$=\sqrt{g'}B^{i}{}_{\alpha}\{ {}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\mu} \}B_{i}{}^{\mu}.$$

因此由欧拉偏微分方程得

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_{i}{}^{\lambda}}\right)-\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$=\sqrt{g'}\left(\frac{\partial B^{i}{}_{\lambda}}{\partial x^{i}}+B^{i}{}_{\lambda}\{ {}_{i}{}^{h}{}_{h} \}-B^{i}{}_{\alpha}B_{i}{}^{\mu}\{ {}_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\mu} \}\right)$$

$$=\sqrt{g'}\nabla_{i}B^{i}{}_{\lambda}=0.$$

因为

$$\begin{aligned}\nabla_{i}B^{i}{}_{\lambda}&=\nabla_{i}(g^{ih}g_{\lambda\kappa}B_{h}{}^{\kappa})\\&=g^{ih}g_{\lambda\kappa}\nabla_{i}B_{h}{}^{\kappa}\\&=g^{ih}g_{\lambda\kappa}H_{ih}{}^{\kappa},\end{aligned}$$

故 V_m 为极小流形的充要条件是

$$g^{ba}H_{ba}{}^{\kappa}=0.$$

于是得如下定理。

定理 13. V_n 里的 V_m 为极小流形的充要条件是它的平均曲率向量为 0。

5.11 温加顿公式

子空间 V_m 的 m 个切向量 $B_i{}^\kappa$ 以及与 V_m 正交的 $n-m$ 个向量 $B_P{}^\kappa$ 之间满足

$$g_{\mu\lambda}B_i{}^\mu B_P{}^\lambda = 0.$$

沿子空间求此式的共变导数得

$$g_{\mu\lambda}H_{ji}{}^\mu B_P{}^\lambda + g_{\mu\lambda}B_i{}^\mu \nabla_j B_P{}^\lambda = 0.$$

此式乘以 g^{hi} 并缩短之，则

$$H^h{}_{jP} + B^h{}_\lambda \nabla_j B_P{}^\lambda = 0, \quad (H^h{}_{jP} = g^{hi}H_{ijP}).$$

再乘以 $B_h{}^\kappa$ 并缩短之，则

$$B_i{}^\kappa H^i{}_{jP} + B_i{}^\kappa B^i{}_\lambda \nabla_j B_P{}^\lambda = 0.$$

将

$$B_i{}^\kappa B^i{}_\lambda = \delta^\kappa_\lambda - B_Q{}^\kappa B_{Q\lambda}$$

代入上式得

$$B_i{}^\kappa H^i{}_{jP} + (\delta^\kappa_\lambda - B_Q{}^\kappa B_{Q\lambda})\nabla_j B_P{}^\lambda = 0.$$

故令

$$g_{\mu\lambda}(\nabla_j B_P{}^\mu)B_Q{}^\lambda = L_{jPQ},$$

则上式变成

$$B_i{}^\kappa H^i{}_{jP} + \nabla_j B_P{}^\kappa - L_{jPQ}B_Q{}^\kappa = 0.$$

即

$$\nabla_j B_P{}^\kappa = -B_i{}^\kappa H^i{}_{jP} + L_{jPQ}B_Q{}^\kappa.$$

这是**温加顿公式**的推广。再沿曲面求恒等式

$$g_{\mu\lambda}B_P{}^\mu B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ}$$

的共变导数得

$$g_{\mu\lambda}[(\nabla_j B_P{}^\mu)B_Q{}^\lambda + B_P{}^\mu(\nabla_j B_Q{}^\lambda)] = 0,$$

即

$$L_{jPQ} + L_{jQP} = 0.$$

可见 L_{jPQ} 关于P与Q反称。L_{jPQ} 叫做 V_m 关于 $B_P{}^\kappa$ 的**第三基本张量**。当子空间为超曲面时，L_{jPQ} 恒为 0。故温加顿公式变为：

$$\nabla_j B^\kappa = -B_i^\kappa H^i{}_j.$$

由此可得如下定理。

定理 14. 全测地超曲面的法向量全互相平行。

又沿着超曲面的曲率线 $x^h(s)$, $H^h{}_k \dfrac{dx^k}{ds} = N\dfrac{dx^h}{ds}$,

故由上列温加顿公式知道沿着曲率线得

$$\frac{dx^j}{ds}\nabla_j B^\kappa + N B_h{}^\kappa \frac{dx^h}{ds} = 0,$$

$$\frac{\delta B^\kappa}{\delta s} + N\frac{dx^\kappa}{ds} = 0.$$

这是有名的**罗得利克公式**的推广。

5.12 高斯，柯达齐和利齐方程

我们在第三章 3.4 节里证明了利齐公式

$$\nabla_\nu\nabla_\mu u^\kappa - \nabla_\mu\nabla_\nu u^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa u^\lambda.$$

在 V_m 中的相应公式应该是

$$\nabla_k\nabla_j v^h - \nabla_j\nabla_k v^h = K_{kji}{}^h v^i.$$

但式中的 $K_{kji}{}^h$ 是 V_m 的黎曼·克利斯托弗尔曲率张量，是由

$$K_{kji}{}^h = \frac{\partial\left\{{}_j{}^h{}_i\right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial\left\{{}_k{}^h{}_i\right\}}{\partial x^j} + \left\{{}_k{}^h{}_a\right\}\left\{{}_j{}^a{}_i\right\} - \left\{{}_j{}^h{}_a\right\}\left\{{}_k{}^a{}_i\right\}$$

定义的。至于具有 V_n, V_m 的两种指标的量如 B_i^κ，其利齐公式应该怎样？以下计算之。因为

$$\nabla_j B_i^\kappa = \frac{\partial B_i^\kappa}{\partial x_j} + \left\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\right\} B_j^\mu B_i^\lambda - B_h^\kappa\left\{{}_j{}^h{}_i\right\},$$

所以

$$\nabla_k\nabla_j B_i^\kappa = \frac{\partial^2 B_i^\kappa}{\partial x^k\partial x^j} + \frac{\partial\left\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\right\}}{\partial x^\nu} B_k^\nu B_j^\mu B_i^\lambda + \left\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\right\}\frac{\partial B_j^\mu}{\partial x^k} B_i^\lambda$$

$$+\left\{{}_\mu{}^\kappa{}_\lambda\right\} B_j^\mu \frac{\partial B_i^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial B_h^\kappa}{\partial x^k}\left\{{}_j{}^h{}_i\right\} - B_h^\kappa\frac{\partial\left\{{}_j{}^h{}_i\right\}}{\partial x^k}$$

$$+\left\{ {}^{\kappa}_{\nu\alpha} \right\} B_k^{\nu}\left(\frac{\partial B_i^{\alpha}}{\partial x^j} + \left\{ {}^{\alpha}_{\mu\lambda} \right\} B_j^{\mu} B_i^{\lambda} - B_h^{\alpha} \left\{ {}^{h}_{j\,i} \right\} \right)$$

$$-\left(\frac{\partial B_a^{\kappa}}{\partial x^j} + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\} B_j^{\mu} B_a^{\lambda} - B_h^{\kappa} \left\{ {}^{h}_{j\,a} \right\} \right)\left\{ {}^{a}_{k\,i} \right\}$$

$$-\left(\frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^a} + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\} B_a^{\mu} B_i^{\lambda} - B_h^{\kappa} \left\{ {}^{h}_{a\,i} \right\} \right)\left\{ {}^{a}_{k\,j} \right\},$$

于是

$$\nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} - \nabla_j \nabla_k B_i^{\kappa}$$

$$= \left(\frac{\partial \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \left\{ {}^{\kappa}_{\nu\lambda} \right\}}{\partial x^{\mu}} + \left\{ {}^{\kappa}_{\nu\alpha} \right\}\left\{ {}^{\alpha}_{\mu\lambda} \right\} - \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\alpha} \right\}\left\{ {}^{\alpha}_{\nu\lambda} \right\} \right) B_k^{\nu} B_j^{\mu} B_i^{\lambda}$$

$$- B_h^{\kappa}\left(\frac{\partial \left\{ {}^{h}_{j\,i} \right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial \left\{ {}^{h}_{k\,i} \right\}}{\partial x^j} + \left\{ {}^{h}_{k\,a} \right\}\left\{ {}^{a}_{j\,i} \right\} - \left\{ {}^{h}_{j\,a} \right\}\left\{ {}^{a}_{k\,i} \right\} \right).$$

即得

$$\nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} - \nabla_j \nabla_k B_i^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} B_k^{\nu} B_j^{\mu} B_i^{\lambda} - B_a^{\kappa} K_{kji}{}^{a}.$$

这是广义共变导数的利齐公式。

用 $B^h{}_{\kappa}$ 乘此式并缩短之得

$$B^h{}_{\kappa} \nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} - B^h{}_{\kappa} \nabla_j \nabla_k B_i^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} B_{k\,j\,i\,\kappa}^{\nu\mu\lambda h} - K_{kji}{}^{h}.$$

为方便起见，这里采用了符号

$$B_{k\,j\,i\,\kappa}^{\nu\mu\lambda h} = B_k^{\nu} B_j^{\mu} B_i^{\lambda} B_{\kappa}^{h}.$$

将 $B^h{}_{\kappa} \nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} = -(\nabla_k B^h{}_{\kappa})(\nabla_j B_i^{\kappa}) = -H_{ji}{}^{\lambda} H_k{}^h{}_{\lambda}$

代入上式并整理得

$$K_{kji}{}^{h} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} B_{k\,j\,i\,\kappa}^{\nu\mu\lambda h} + H_k{}^h{}_{\lambda} H_{ji}{}^{\lambda} - H_j{}^h{}_{\lambda} H_{ki}{}^{\lambda}.$$

这就是有名的**高斯方程**，其中 $K_{kji}{}^{h}$ 叫做子空间的**绝对曲率张量**，$H_k{}^h{}_{\lambda} H_{ji}{}^{\lambda} - H_j{}^h{}_{\lambda} H_{ki}{}^{\lambda}$ 叫做**相对曲率张量**。

由此高斯方程可得如下二定理。

定理 15. 局部欧氏空间里的全测地曲面仍为局部欧氏空间。

原因是，若$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$，$H_{ji}{}^{\kappa}=0$，则从高斯方程立即可得 $K_{kji}{}^{h}=0$。

定理 16. 常曲率空间中的全脐点曲面仍为常曲率空间。

原因是，将

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=k(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda}),\quad H_{ji}{}^{\kappa}=g_{ji}H^{\kappa}$$

代入高斯方程得

$$\begin{aligned}K_{kji}{}^{h}&=k(\delta_{k}^{h}g_{ji}-\delta_{j}^{h}g_{ki})+H^{\lambda}H_{\lambda}(\delta_{k}^{h}g_{ji}-\delta_{j}^{h}g_{ki})\\&=(k+H^{\lambda}H_{\lambda})(\delta_{k}^{h}g_{ji}-\delta_{j}^{h}g_{ki}).\end{aligned}$$

这时，由休尔定理知道 k 和 $k+H^{\lambda}H_{\lambda}$ 全是常数，故 $H^{\lambda}H_{\lambda}$ 也是常数，从而有

定理 17. 在常曲率空间中，全脐点曲面的平均曲率一定。

以下运用广义利齐公式于法向量 $B_{P}{}^{\kappa}$ 上，得

$$\nabla_{j}B_{P}{}^{\kappa}=\frac{\partial B_{P}{}^{\kappa}}{\partial x^{j}}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}B_{j}{}^{\mu}B_{P}{}^{\lambda},$$

$$\begin{aligned}\nabla_{k}\nabla_{j}B_{P}{}^{\kappa}=&\frac{\partial^{2}B_{P}{}^{\kappa}}{\partial x^{k}\partial x^{j}}+\frac{\partial\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^{\nu}}B_{k}{}^{\nu}B_{j}{}^{\mu}B_{P}{}^{\lambda}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{\partial B_{j}{}^{\mu}}{\partial x^{k}}B_{P}{}^{\lambda}+\\&+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}B_{j}{}^{\mu}\frac{\partial B_{P}{}^{\lambda}}{\partial x^{k}}+\left\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\right\}B_{k}{}^{\nu}\Big(\frac{\partial B_{P}{}^{\alpha}}{\partial x^{j}}+\\&+\left\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\right\}B_{j}{}^{\mu}B_{P}{}^{\lambda}\Big)-\Big(\frac{\partial B_{P}{}^{\kappa}}{\partial x^{h}}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}B_{h}{}^{\mu}B_{P}{}^{\lambda}\Big)\left\{{}^{h}_{kj}\right\}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\nabla_{k}\nabla_{j}B_{P}{}^{\kappa}-\nabla_{j}\nabla_{k}B_{P}{}^{\kappa}=&\Big(\frac{\partial\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\right\}}{\partial x^{\mu}}+\left\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\right\}\left\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\right\}-\\&-\left\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\right\}\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}\Big)B_{k}{}^{\nu}B_{j}{}^{\mu}B_{P}{}^{\lambda},\end{aligned}$$

即得

$$\nabla_{k}\nabla_{j}B_{P}{}^{\kappa}-\nabla_{j}\nabla_{k}B_{P}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}B_{k}{}^{\nu}B_{j}{}^{\mu}B_{P}{}^{\lambda},$$

这就是关于 $B_{P}{}^{\kappa}$ 的广义利齐公式。

将温加顿公式

$$\nabla_{j}B_{P}{}^{\kappa}=-H_{j}{}^{i}{}_{P}B_{i}{}^{\kappa}+L_{jPQ}B_{Q}{}^{\kappa}$$

沿子空间对 x^k 求共变导数得

$$\nabla_k\nabla_j B_P{}^\kappa = -(\nabla_k H_j{}^i{}_P)B_i{}^\kappa - H_j{}^i{}_P H_{kiQ}B_Q{}^\kappa + \\ +(\nabla_k L_{jPQ})B_Q{}^\kappa + L_{jPQ}(\nabla_k B_Q{}^\kappa) .$$

再将温加顿公式

$$\nabla_k B_Q{}^\kappa = -H_k{}^i{}_Q B_i{}^\kappa + L_{kQR}B_R{}^\kappa$$

代入此式得

$$\nabla_k\nabla_j B_P{}^\kappa = -(\nabla_k H_j{}^i{}_P)B_i{}^\kappa - H_j{}^i{}_P H_{kiQ}B_Q{}^\kappa + (\nabla_k L_{jPQ})B_Q{}^\kappa \\ + L_{jPQ}(-H_k{}^i{}_Q B_i{}^\kappa + L_{kQR}B_R{}^\kappa).$$

将此式代入广义利齐公式

$$\nabla_k\nabla_j B_P{}^\kappa - \nabla_j\nabla_k B_P{}^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda$$

得

$$-(\nabla_k H_j{}^i{}_P - \nabla_j H_k{}^i{}_P)B_i{}^\kappa - (H_j{}^i{}_P H_{kiQ} - H_k{}^i{}_P H_{jiQ})B_Q{}^\kappa \\ +(\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ})B_Q{}^\kappa - (L_{jPQ}H_k{}^i{}_Q - L_{kPQ}H_j{}^i{}_Q)B_i{}^\kappa \\ +(L_{jPQ}L_{kQR} - L_{kPQ}L_{jQR})B_R{}^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda.$$

此式乘以 $B^h{}_\kappa$ 并关于 κ 缩短之得

$$\nabla_k H_j{}^h{}_P - \nabla_j H_k{}^h{}_P - L_{kPQ}H_j{}^h{}_P + L_{jPQ}H_k{}^h{}_Q = -K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B_{k\,j\,P\,\kappa}^{\nu\,\mu\,\lambda\,h},$$

乘以 $B_{Q\kappa}$ 并关于 κ 缩短之得

$$\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ} + H_k{}^i{}_P H_{jiQ} - H_j{}^i{}_P H_{kiQ} - L_{kPR}L_{jRQ} + L_{jPR}L_{kRQ} \\ = K_{\nu\mu\lambda\kappa}B_{k\,j\,P\,Q}^{\nu\,\mu\,\lambda\,\kappa}.$$

其中为了方便起见使用了符号

$$B_{k\,j\,P\,\kappa}^{\nu\,\mu\,\lambda\,h} = B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda B^h{}_\kappa, \quad B_{k\,j\,P\,Q}^{\nu\,\mu\,\lambda\,\kappa} = B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda B_Q{}^\kappa.$$

这两个方程分别叫做**柯达齐方程**与**利齐方程** .

5.13 黎曼曲率的几何意义

在第三章3.7节里谈到在黎曼空间里的一定点给定二向量 u^κ 与 v^κ 时，由此作一数量

$$k = \frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa},$$

它叫做关于二方向 u^κ 与 v^κ 的黎曼曲率。但未证明通过此定点，与

给定二方向 u^κ 和 v^κ 所决定的二维平面相切，作所有可能的测地线而成的二维子空间 V_2 在这一点的高斯曲率就是 k。在这节里要通过实际计算证明这件事实。

为此，在 V_n 中取以给定点为原点的黎曼法坐标(x^κ)为 V_n 的坐标系。这时通过原点的所有测地线都可写如

$$x^\kappa=\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0 s$$

的形状。故由原点出发，作所有可能的测地线使之切于由二向量u^κ与v^κ所决定的二维平面。这样形成的二维曲面的方程可以写为

$$x^\kappa=(u^\kappa\alpha+v^\kappa\beta)s.$$

式中 α 与 β 为任意常数。故取 αs 与 βs 为曲面上的曲线坐标 $(x^{\dot 1},x^{\dot 2})$，则曲面的方程为

$$x^\kappa=u^\kappa x^{\dot 1}+v^\kappa x^{\dot 2}.$$

故令

$$B_i^{\kappa}=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}\quad(i,j,\cdots=\dot 1,\dot 2),$$

则得

$$B_{\dot 1}^{\kappa}=u^\kappa,\quad B_{\dot 2}^{\kappa}=v^\kappa.$$

于是曲面V_2的第一基本张量

$$g_{ji}=B_j^{\mu}B_i^{\lambda}g_{\mu\lambda}$$

为

$$g_{\dot 1\dot 1}=g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda,\qquad g_{\dot 1\dot 2}=g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda,\qquad g_{\dot 2\dot 2}=g_{\mu\lambda}v^\mu v^\lambda.$$

以下求欧拉·斯高天张量

$$H_{ji}^{\kappa}=\nabla_j B_i^{\kappa}=\frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}B_j^{\mu}B_i^{\lambda}-B_h^{\kappa}\left\{{}^{h}_{j\,i}\right\}$$

在法坐标原点处的值。因 B_i^{κ} 为常数，故$\dfrac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^j}=0$.又因$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}=0$,所以

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}B_j^{\mu}B_i^{\lambda}=0,$$

$$H_{ji}{}^{\kappa} = -B_h{}^{\kappa}\{{}_j{}^h{}_i\}.$$

然因 $H_{ji}{}^{\kappa}$ 与 V_2 正交，$-B_h{}^{\kappa}\{{}_j{}^h{}_i\}$ 与 V_2 相切。如果二者相等，必然全是 0。从而，在法坐标系(x^{κ})的原点，

$$H_{ji}{}^{\kappa} = 0, \qquad \{{}_j{}^h{}_i\} = 0.$$

设 V_n 的曲率张量为 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$，V_2 的曲率张量为K_{kjih}，将上述关系代入高斯方程

$$K_{kjih} = K_{\nu\mu\lambda\kappa}B_{k\,j\,i\,h}^{\nu\mu\lambda\kappa} + H_{kh}{}^{\lambda}H_{ji\lambda} - H_{jh}{}^{\lambda}H_{ki\lambda}$$

得

$$K_{kjih} = K_{\nu\mu\lambda\kappa}B_{k\,j\,i\,h}^{\nu\mu\lambda\kappa}.$$

因为 K_{kjih} 的指标只取 $\dot{1}$，$\dot{2}$ 两个值，它们之间又满足恒等式

$$K_{kjih} = -K_{jkih}, \quad K_{kjih} = -K_{kjhi},$$

可见 K_{kjih} 之中独立的只有 $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$。由高斯方程得

$$K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} = K_{\nu\mu\lambda\kappa}\,B_{\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{1}\,\dot{2}}^{\nu\mu\lambda\kappa},$$

即

$$K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} = K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa}.$$

这里出现的 $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$ 关于 V_2 的坐标变换

$$\bar{x}^h = \bar{x}^h(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}})$$

已不是张量。以下求其变换规律。由 K_{kjih} 的张量性质得

$$\overline{K}_{kjih} = K_{dcba}\frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^h},$$

故

$$\overline{K}_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} = K_{abcd}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}$$

$$= K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} + K_{\dot{1}\dot{2}\dot{2}\dot{1}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}$$

$$+ K_{\dot{2}\dot{1}\dot{1}\dot{2}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} + K_{\dot{2}\dot{1}\dot{2}\dot{1}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}$$

$$= K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}\left(\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \overline{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \overline{x}^{\dot{2}}} - \frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \overline{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \overline{x}^{\dot{1}}}\right)^2.$$

令

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \overline{x}^{\dot{1}}} & \dfrac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \overline{x}^{\dot{1}}} \\ \dfrac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \overline{x}^{\dot{2}}} & \dfrac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \overline{x}^{\dot{2}}} \end{vmatrix},$$

则得 $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$ 的变换规律

$$\overline{K}_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} = \Delta^2 K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}.$$

再令

$$g' = \begin{vmatrix} g_{\dot{1}\dot{1}} & g_{\dot{1}\dot{2}} \\ g_{\dot{2}\dot{1}} & g_{\dot{2}\dot{2}} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} g' &= g_{\dot{1}\dot{1}}g_{\dot{2}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}}g_{\dot{2}\dot{1}} \\ &= g_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda g_{\mu\kappa}v^\mu v^\kappa - g_{\nu\kappa}u^\nu v^\kappa g_{\mu\lambda}v^\mu u^\lambda \\ &= (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa . \end{aligned}$$

又 g' 的变换式是

$$\overline{g}' = \Delta^2 g',$$

从而

$$\frac{K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}}{g'} = \frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}$$

在坐标变换下不变。

再从另一角度来求 $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}/g'$。在第三章 3.5 节证明了的公式

$$K_{kjih} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^k \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{kh}}{\partial x^j \partial x^i}\right)$$
$$- \left\{ {b \atop j\ i} \right\}\left\{ {a \atop k\ h} \right\} g_{ba} + \left\{ {b \atop k\ i} \right\}\left\{ {a \atop j\ h} \right\} g_{ba}$$

里$\left\{ {a \atop j\ i} \right\}$全是 0，故得

$$K_{1212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2 \partial x^1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1},$$

$$\frac{K_{1212}}{g'} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}.$$

然而线素 ds 由

$$ds^2 = g_{11}dx^1 dx^1 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + g_{22}dx^2 dx^2$$

定义的二维曲面的高斯曲率 k 满足

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})^2 k$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}, & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}, & \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, & g_{11}, & g_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & g_{21}, & g_{22} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & g_{11}, & g_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, & g_{21}, & g_{22} \end{vmatrix}$$

（例如参照吴大任编《微分几何讲义》p.200(1979)（译者注））.

然而在目前的情况下，在原点 $\left\{ {}_{j}{}^{k}{}_{i} \right\} = 0$. 故 $\partial g_{ji}/\partial x^h = 0$. 因此上式变得简单些.

$$(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})^2 k$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}\right)(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}),$$

即
$$k=-\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}.$$

由此证明了

$$k=-\frac{K_{1212}}{g'}=-\frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}.$$

第六章　平坦空间中的子空间

6.1 黎曼空间的类数

以前已经讲过，在黎曼空间 V_n 里如果存在一种坐标系 (x^κ)使得它的基本二次微分形式

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

的系数 $g_{\mu\lambda}$ 全是常数，则V_n 叫做平坦黎曼空间。这种坐标系存在的充要条件是曲率张量　　$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$。

如果正定二次微分形式

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

的系数全是常数，则通过适当的线性变换

$$x^\kappa = \gamma^\kappa_a y^a$$

可以把它化为平方和的形状

$$ds^2 = dy^1dy^1 + dy^2dy^2 + \cdots + dy^n dy^n.$$

这是代数学里周知的结论。其实有如上 ds^2 的空间是局部欧氏空间。这里出现的(y^a)是一种正交坐标系。

可见，$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$ 的黎曼空间是局部欧氏空间。根据正交坐标系的常系数线性变换可得坐标系使基本二次微分形式的系数全变为常数。在欧氏空间里这样的坐标系叫做**仿射坐标系**。

在 n 维欧氏空间 E_n 里，取一直角坐标系(y^κ)，设 E_n 里的一个 m 维子空间是用方程

$$y^\kappa = y^\kappa(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \cdots, \dot{x}^m)$$

定义的，则此子空间中非常接近两点的距离公式是

$$ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i,$$

但

$$g_{ji} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i}.$$

可见，这个子空间是一个 m 维黎曼空间 V_m。

反之，给定了基本二次微分形式为 $ds^2=g_{ji}dx^jdx^i$ 的 m 维黎曼空间 V_m，能否存在一个适当维数 n 的欧氏空间 E_n，以 V_m 为其一个子空间？

其充要条件是 $\frac{1}{2}m(m+1)$个偏微分方程组

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i}=g_{ji}$$

具有 n 个独立解

$$y^\kappa=y^\kappa(x^{\dot{1}},\ x^{\dot{2}},\cdots,\ x^{\dot{m}}).$$

因为偏微分方程组的数目是 $\frac{1}{2}m(m+1)$，若 $n=\frac{1}{2}m(m+1)$，则由微分方程论的定理知上列偏微分方程组一般具有 $n=\frac{1}{2}m(m+1)$个独立解。故 m 维黎曼空间一般可以看做$\frac{1}{2}m(m+1)$维欧氏空间的子空间。

当然，m 维黎曼空间 V_m 也有可能看做维数比$\frac{1}{2}m(m+1)$低的欧氏空间的子空间。设满足这个条件的最小数为 n，则 $n-m=p$ 叫做黎曼空间 V_m 的**类数**。

6.2 类数 p 的黎曼空间 V_m

设黎曼空间 V_m 的类数为 p，则 V_m 可看做以(y^κ)为直角坐标系的$m+p$ 维欧氏空间 E_{m+p} 的子空间

$$y^\kappa=y^\kappa(x^h)$$

$$(\kappa,\lambda,\mu,\nu,\cdots=1,2,3,\cdots,m+p;$$

$$h,i,j,k,\cdots=\dot{1},\dot{2},\cdots,\dot{m}).$$

这时 V_m 的第一基本张量 g_{ji} 可用

$$\sum_{\lambda=1}^{m+p}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i}=g_{ji}$$

表达。当二指标全在右上时，我们也规定表示求总和，则上式可写如

$$\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i}=g_{ji}\ .$$

再采取与前章相同的记法

$$\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^i}=B_i{}^\kappa,$$

则又可写成

$$B_j{}^\kappa B_i{}^\kappa=g_{ji}\ .$$

其次是第二基本张量 $H_{ji}{}^\kappa$，因为 E_{m+p} 里的克氏记号 $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 全是0。故可用

$$H_{ji}{}^\kappa=\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j}-B_h{}^\kappa\{{}^{h}_{ji}\}$$

定义。与前章相同可以证明这里出现的 $H_{ji}{}^\kappa$ 与 E_{m+p} 中的子空间 V_m 正交。设与 V_m 正交而且互相正交的 p 个单位向量为 $B_P{}^\kappa(P,Q,R,\cdots=\dot{m}+\dot{1},\dot{m}+\dot{2},\cdots,\dot{m}+\dot{p})$，即 $B_P{}^\kappa$ 为满足

$$B_j{}^\lambda B_P{}^\lambda=0,\qquad B_P{}^\lambda B_R{}^\lambda=\delta_{PR}$$

的 E_{m+p} 里的向量，于是 $H_{ji}{}^\kappa$ 可以写为

$$H_{ji}{}^\kappa=H_{jiP}B_P{}^\kappa$$

由

$$L_{jPQ}=(\nabla_jB_P{}^\lambda)B_Q{}^\lambda,$$

即由

$$L_{jPQ}=\frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^j}B_Q{}^\lambda$$

定义 $L_{jQP}(=-L_{jPQ})$，则目前情况下的温加顿公式变为

$$\frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^j}=-H_j{}^i{}_PB_i{}^\lambda+L_{jPQ}B_Q{}^\lambda\ .$$

由于 $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa=0$，故这时的高斯，柯达齐与利齐方程分别变为

$$K_{kji}{}^h=H_k{}^h{}_\lambda H_{ji}{}^\lambda-H_j{}^h{}_\lambda H_{ki}{}^\lambda,$$

$$\nabla_k H_j{}^h{}_P - \nabla_j H_k{}^h{}_P - L_{kPQ} H_j{}^h{}_Q + L_{jPQ} H_k{}^h{}_Q = 0,$$

$$\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ} + H_k{}^i{}_P H_{jiQ} - H_j{}^i{}_P H_{kiQ} - L_{kPR} L_{jRQ} + L_{jPR} L_{kRQ} = 0.$$

6.3 基本方程与基本定理

在这一节里讨论上节的相反问题：

设 $g_{ji}(=g_{ij})$，$H_{jiP}(=H_{ijP})$以及 $L_{jPQ}(=-L_{jQP})$ 为 m 个变量 $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \cdots, \dot{x}^m)$ 的已知函数。能否在 E_{m+p} 中决定 V_m 分别以这些函数作为它的第一，第二，第三基本量？以下考虑这个问题。

所谓决定 V_m，就是决定 $m+p$ 个函数

$$y^\kappa = y^\kappa(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \cdots, \dot{x}^m).$$

为决定这个 y^κ，只要能决定满足

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = \frac{\partial B_j{}^\kappa}{\partial x^i}$$

的函数

$$\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^i} = B_i{}^\kappa$$

即可。再者，$B_i{}^\kappa$ 还要满足

$$B_j{}^\kappa B_i{}^\kappa = g_{ji}$$

和

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = B_h{}^\kappa \left\{ {h \atop j\ i} \right\} + H_{jiP} B_P{}^\kappa .$$

满足这些条件的 $B_i{}^\kappa$ 由$\left\{ {h \atop j\ i} \right\}$与 H_{jiP} 的对称性可知必然要满足

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = \frac{\partial B_j{}^\kappa}{\partial x^i}.$$

在上列偏微分方程中出现的$\left\{ {h \atop j\ i} \right\}$与 H_{jiP} 都是(x^h)的已知函数，但后面的 $B_P{}^\lambda$ 要满足

$$B_i{}^\lambda B_P{}^\lambda = 0, \qquad B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ}$$

和
$$\frac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^j} = -H_j{}^i{}_P B_i{}^\kappa + L_{jPQ} B_Q{}^\kappa.$$

归根结蒂，决定 V_m 的问题就是解偏微分方程组

$$
\begin{cases}
B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda = g_{ji}, \quad B_j{}^\lambda B_P{}^\lambda = 0, \quad B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ}, \\
\dfrac{\partial y^\kappa}{\partial x^i} = B_i{}^\kappa, \\
\dfrac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = B_h{}^\kappa \left\{ {}_j{}^h{}_i \right\} + H_{jiP} B_P{}^\kappa, \\
\dfrac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^j} = -B_i{}^\kappa H_j{}^i{}_P + L_{jPQ} B_Q{}^\kappa.
\end{cases}
$$

这个偏微分方程组叫做 V_m 的**基本方程**。今求其完全可积条件。首先由先头的三个方程可见，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^k}(B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji}) \\
&= \frac{\partial B_j{}^\lambda}{\partial x^k} B_i{}^\lambda + B_j{}^\lambda \frac{\partial B_i{}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \\
&= (B_h{}^\lambda \left\{ {}_k{}^h{}_j \right\} + H_{kjP} B_P{}^\lambda) B_i{}^\lambda \\
&\quad + B_j{}^\lambda (B_h{}^\lambda \left\{ {}_k{}^h{}_i \right\} + H_{kiP} B_P{}^\lambda) - (\left\{ {}_k{}^h{}_j \right\} g_{hi} + \left\{ {}_k{}^h{}_i \right\} g_{jh}) \\
&= (B_h{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{hi}) \left\{ {}_k{}^h{}_j \right\} + (B_j{}^\lambda B_h{}^\lambda - g_{jh}) \left\{ {}_k{}^h{}_i \right\} \\
&\quad + H_{kjP} B_P{}^\lambda B_i{}^\lambda + H_{kiP} B_P{}^\lambda B_j{}^\lambda,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^k}(B_j{}^\lambda B_P{}^\lambda) \\
&= \frac{\partial B_j{}^\lambda}{\partial x^k} B_P{}^\lambda + B_j{}^\lambda \frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^k} \\
&= (B_h{}^\lambda \left\{ {}_k{}^h{}_j \right\} + H_{kjQ} B_Q{}^\lambda) B_P{}^\lambda \\
&\quad + B_j{}^\lambda (-H_k{}^i{}_P B_i{}^\lambda + L_{kPQ} B_Q{}^\lambda) \\
&= B_h{}^\lambda B_P{}^\lambda \left\{ {}_k{}^h{}_j \right\} + (B_Q{}^\lambda B_P{}^\lambda - \delta_{QP}) H_{kjQ} \\
&\quad - (B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji}) H_k{}^i{}_P + B_j{}^\lambda B_Q{}^\lambda L_{kPQ},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^k}(B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{PQ}) \\
&= \frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^k} B_Q{}^\lambda + B_P{}^\lambda \frac{\partial B_Q{}^\lambda}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-H_k{}^i{}_P B_i^\lambda + L_{kPR} B_R^\lambda) B_Q^\lambda \\
&\quad + B_P^\lambda (-H_k{}^i{}_Q B_i^\lambda + L_{kQR} B_R^\lambda) \\
&= -B_i^\lambda B_Q^\lambda H_k{}^i{}_P - B_P^\lambda B_i^\lambda H_k{}^i{}_Q \\
&\quad + (B_R^\lambda B_Q^\lambda - \delta_{RQ}) L_{kPR} + (B_P^\lambda B_R^\lambda - \delta_{PR}) L_{kQR}.
\end{aligned}
$$

这些式子说明 $B_j^\lambda B_i^\lambda - g_{ji}$，$B_j^\lambda B_Q^\lambda$，$B_P^\lambda B_Q^\lambda - \delta_{PQ}$ 的一阶偏导数分别可用 $B_j^\lambda B_i^\lambda - g_{ji}$，$B_j^\lambda B_Q^\lambda$，$B_P^\lambda B_Q^\lambda - \delta_{PQ}$ 的齐一次式表达。同理 $B_j^\lambda B_i^\lambda - g_{ji}$，$B_j^\lambda B_Q^\lambda$，$B_P^\lambda B_Q^\lambda - \delta_{PQ}$ 的更高阶偏导数可由这些量以及这些量的低阶偏导数的线性函数表达，故当偏微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial B_i^\kappa}{\partial x^j} = B_h^\kappa \left\{ {h \atop j\ i} \right\} + H_{jiP} B_P^\kappa, \\[2ex]
\dfrac{\partial B_P^\kappa}{\partial x^j} = -B_i^\kappa H_j{}^i{}_P + L_{jPQ} B_Q^\kappa
\end{cases}
$$

的解满足初始条件

$$
B_j^\lambda B_i^\lambda - g_{ji} = 0, \quad B_j^\lambda B_Q^\lambda = 0, \quad B_P^\lambda B_Q^\lambda - \delta_{PQ} = 0
$$

时，则上记偏微分方程组的解对于 x^h 的所有值都要满足这些关系式。

其次求偏微分方程组的完全可积条件。

由前方程得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 B_i^\kappa}{\partial x^k \partial x^j} &= \frac{\partial B_h^\kappa}{\partial x^k} \left\{ {h \atop j\ i} \right\} + B_h^\kappa \frac{\partial \left\{ {h \atop j\ i} \right\}}{\partial x^k} \\
&\quad + \frac{\partial H_{jiP}}{\partial x^k} B_P^\kappa + H_{jiP} \frac{\partial B_P^\kappa}{\partial x^k} \\
&= (B_a^\kappa \left\{ {a \atop k\ h} \right\} + H_{khP} B_P^\kappa) \left\{ {h \atop j\ i} \right\} \\
&\quad + B_h^\kappa \frac{\partial \left\{ {h \atop j\ i} \right\}}{\partial x^k} + \frac{\partial H_{jiP}}{\partial x^k} B_P^\kappa \\
&\quad + H_{jiP} (-B_h^\kappa H_k{}^h{}_P + L_{kPQ} B_Q^\kappa),
\end{aligned}
$$

故有

$$
0 = \frac{\partial^2 B_i^\kappa}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 B_i^\kappa}{\partial x^j \partial x^k}
$$

$$=B_h{}^\kappa\left(\frac{\partial\{{}_j{}^h{}_i\}}{\partial x^k}-\frac{\partial\{{}_k{}^h{}_i\}}{\partial x^j}+\{{}_k{}^h{}_a\}\{{}_j{}^a{}_i\}-\{{}_j{}^h{}_a\}\{{}_k{}^a{}_i\}\right)$$

$$-B_h{}^\kappa(H_{jiP}H_k{}^h{}_P-H_{kiP}H_j{}^h{}_P)$$

$$+\left(\frac{\partial H_{jiP}}{\partial x^k}-\frac{\partial H_{kiP}}{\partial x^j}+H_{khP}\{{}_j{}^h{}_i\}-H_{jhP}\{{}_k{}^h{}_i\}\right)B_P{}^\kappa$$

$$+(H_{jiP}L_{kPQ}-H_{kiP}L_{jPQ})B_Q{}^\kappa,$$

即

$$0=B_h{}^\kappa K_{kji}{}^h-B_h{}^\kappa(H_{jiP}H_k{}^h{}_P-H_{kiP}H_j{}^h{}_P)$$

$$+(\nabla_k H_{jiP}-\nabla_j H_{kiP})B_P{}^\kappa$$

$$+(H_{jiP}L_{kPQ}-H_{kiP}L_{jPQ})B_Q{}^\kappa\ .$$

此式成立的充要条件是向此式分别乘以 $B^a{}_\kappa(=g^{ai}g_{\lambda\kappa}B_i{}^\lambda)$ 以及 $B_R{}^\kappa$ 并且缩短而得之式成立。先乘以 $B^a{}_\kappa$ 关于 κ 缩短得

$$0=K_{kji}{}^a-H_{jiP}H_k{}^a{}_P+H_{kiP}H_j{}^a{}_P.$$

这是高斯方程。其次乘以 $B_R{}^\kappa$ 关于 κ 缩短得

$$\nabla_k H_{jiR}-\nabla_j H_{kiR}+H_{jiP}L_{kPR}-H_{kiP}L_{jPR}=0\ .$$

这是柯达齐方程。

再由偏微分方程组的后式得

$$\frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^k\partial x^j}=-\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^k}H_j{}^i{}_P-B_i{}^\kappa\frac{\partial H_j{}^i{}_P}{\partial x^k}$$

$$+\frac{\partial L_{jPQ}}{\partial x^k}B_Q{}^\kappa+L_{jPQ}\frac{\partial B_Q{}^\kappa}{\partial x^k}$$

$$=-(B_h{}^\kappa\{{}_k{}^h{}_i\}+H_{kiQ}B_Q{}^\kappa)H_j{}^i{}_P$$

$$-B_i{}^\kappa\frac{\partial H_j{}^i{}_P}{\partial x^k}+\frac{\partial L_{jPQ}}{\partial x^k}B_Q{}^\kappa$$

$$+L_{jPQ}(-B_i{}^\kappa H_k{}^i{}_Q+L_{kQR}B_R{}^\kappa).$$

可见

$$0=\frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^k\partial x^j}-\frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^j\partial x^k}$$

$$=-B_h{}^\kappa\left(\frac{\partial H_j{}^h{}_P}{\partial x^k}-\frac{\partial H_k{}^h{}_P}{\partial x^j}+\{{}_k{}^h{}_i\}H_j{}^i{}_P-\{{}_j{}^h{}_i\}H_k{}^i{}_P\right)$$

$$
\begin{aligned}
&-B_h{}^\kappa(L_{jPQ}H_k{}^h{}_Q-L_{kPQ}H_j{}^h{}_Q)\\
&+\left(\frac{\partial L_{jPQ}}{\partial x^k}-\frac{\partial L_{kPQ}}{\partial x^j}\right)B_Q{}^\kappa\\
&-(H_{kiQ}H_j{}^i{}_P-H_{jiQ}H_k{}^i{}_P)B_Q{}^\kappa\\
&+(L_{jPQ}L_{kQR}-L_{kPQ}L_{jQR})B_R{}^\kappa,
\end{aligned}
$$

即得

$$
\begin{aligned}
0=&-B_h{}^\kappa(\nabla_kH_j{}^h{}_P-\nabla_jH_k{}^h{}_P)\\
&-B_h{}^\kappa(L_{jPQ}H_k{}^h{}_Q-L_{kPQ}H_j{}^h{}_Q)\\
&-(H_{kiQ}H_j{}^i{}_P-H_{jiQ}H_k{}^i{}_P)B_Q{}^\kappa\\
&+(\nabla_kL_{jPQ}-\nabla_jL_{kPQ})B_Q{}^\kappa\\
&+(L_{jPQ}L_{kQR}-L_{kPQ}L_{jQR})B_R{}^\kappa.
\end{aligned}
$$

此式成立的充要条件是向此式分别乘以 $B^a{}_\kappa$ 以及 $B_S{}^\kappa$ 并关于 κ 缩短而得之式成立。先乘以 $B^a{}_\kappa$ 并缩短之得

$$-\nabla_kH_j{}^a{}_P+\nabla_jH_k{}^a{}_P-L_{jPQ}H_k{}^a{}_Q+L_{kPQ}H_j{}^a{}_Q=0\ .$$

这是柯达齐方程。再乘以 $B_S{}^\kappa$ 并缩短之得

$$
\begin{aligned}
&\nabla_kL_{jPS}-\nabla_jL_{kPS}-H_{kiS}H_j{}^i{}_P+H_{jiS}H_k{}^i{}_P\\
&+L_{jPQ}L_{kQS}-L_{kPQ}L_{jQS}=0.
\end{aligned}
$$

这是利齐方程。从而得到偏微分方程组

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j}=B_h{}^\kappa\left\{{h \atop j\ i}\right\}+H_{jiP}B_P{}^\kappa,\\
&\frac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^k}=-B_i{}^\kappa H_k{}^i{}_P+L_{kPQ}B_Q{}^\kappa
\end{aligned}
\right.
$$

的完全可积条件是高斯，柯达齐和利齐方程成立。故得如下定理。

定理 如果在 n 维欧氏空间里给定满足高斯，柯达齐，利齐方程的 $(\overset{\cdot}{x}{}^1,\ \overset{\cdot}{x}{}^2,\ \cdots,\ \overset{\cdot}{x}{}^m)$ 的函数 $g_{jk}(=g_{kj})$，$H_{jkP}(=H_{kjP})$ 以及 $L_{kPQ}(=-L_{kQP})$，则一定存在分别以这些量为第一，第二，第三基本量的 m 维子空间 V_m。

这个定理叫做**基本定理**。

后面列举的偏微分方程组中未知函数的数目：

$$B_i^{\lambda} \text{ 是 } nm \text{ 个}, \qquad \text{即}(m+p)m \text{ 个},$$

$$B_Q^{\lambda} \text{ 是 } n(n-m) \text{ 个} \qquad \text{即}(m+p)p \text{ 个},$$

一共正好$(m+p)^2$ 个。然因它们之间满足

$$B_i^{\lambda} B_k^{\lambda} = g_{ik}, \qquad \frac{1}{2} m(m+1)\text{个},$$

$$B_i^{\lambda} B_Q^{\lambda} = 0, \qquad mp\text{个},$$

$$B_P^{\lambda} B_Q^{\lambda} = \delta_{PQ}, \qquad \frac{1}{2} p(p+1)\text{个},$$

一共

$$\frac{1}{2} m(m+1) + mp + \frac{1}{2} p(p+1)$$

$$= \frac{1}{2}(m+p)(m+p+1)$$

个条件，故上述偏微分方程组的解能包含的任意常数有

$$(m+p)^2 - \frac{1}{2}(m+p)(m+p+1)$$

$$= \frac{1}{2}(m+p)(m+p-1)\text{个}.$$

当 B_i^{λ} 求得后，再由

$$\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^i} = B_i^{\lambda}$$

求 y^{λ}，由此积分又带进来 $n = m + p$ 个任意常数，因此为了决定 V_m 而带来的任意常数总共有

$$\frac{1}{2}(m+p)(m+p-1) + (m+p) = \frac{1}{2} n(n+1)\text{个}.$$

这些任意常数的数目可作如下解释。

如果 y^{λ} 以及 B_P^{λ} 为已知偏微分方程组的一解，则用满足

$$a_{\mu}^{\lambda} a_{\nu}^{\lambda} = \delta_{\mu\nu}$$

的 a_{μ}^{λ} 作出的

$$\begin{cases} \bar{y}^{\lambda} = a^{\lambda}_{\mu} y^{\mu} + b^{\lambda}, \\ \bar{B}_{p}{}^{\lambda} = a^{\lambda}_{\mu} B_{p}{}^{\mu} \end{cases}$$

显然也是已知偏微分方程组的解。这里出现的 n^2 个独立常数 a^{λ}_{μ} 满足 $\frac{1}{2}n(n+1)$个条件，故它的数目是 $n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n-1)$，$b^{\lambda}$ 的数目是 n 个，共计正好$\frac{1}{2}n(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，故上式给出偏微分方程组的通解的表达式。因为上式表示欧氏空间的旋转与平移的组合即运动。故得

定理 在基本定理中所说的 V_m 除了欧氏空间的运动外是决定了的。

6.4 列维·齐维塔平行性的几何意义

在本节里以平坦空间 E_n 中的 $n-1$ 维子空间 V_{n-1} 上的平行性为例说明列维·齐维塔平行性的几何意义。

首先在平坦空间 E_n，即 n 维欧氏空间 E_n 中取一直角坐标系(y^{κ})，令子空间 V_{n-1} 的方程为

$$y^{\kappa}=y^{\kappa}(x^h),$$

则子空间 V_{n-1} 上非常接近二点(x^h)与(x^h+dx^h)间的距离 ds 由

$$ds^2=g_{ji}dx^jdx^i \quad 但 \quad g_{ji}=\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^j}\ \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^i}$$

而定。

现在把子空间 V_{n-1} 看做由能够自由变形而不伸缩的物质作成。这时，不论子空间 V_{n-1} 怎样变形，此子空间上二点间的距离不变。例如，在此子空间上取二点 P，Q，用子空间的测地线联结之。因为不论子空间怎样变形，由此变形不引起伸缩，所以联结二点 P，Q 间的测地线之弧长不变。而且原来的测地线在任意变形的子空间上仍是测地线。例如在一张平面上画直线（测地线），把它作成圆柱面，此线在圆柱面上也是测地线。象这样在子空间 V_{n-1} 的性质中，在无伸缩的变形下不变的性质叫做子空间的内蕴性质。

再者，在无伸缩的子空间的变形下，子空间上两点间的距离不变，故在这样变形下，子空间的

$$ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$$

不变。因此在这里出现的只由 g_{ji} 就能导出的子空间的性质是子空间的内蕴性质。因为以前学的黎曼空间的诸性质全是从基本张量 g_{ji} 导出的性质，所以将黎曼空间看做某平坦空间的子空间时，黎曼几何学研究在上述变形下不变的性质，即研究内蕴性质。

故如某子空间 V_{n-1} 在上述变形下能够变成平坦子空间，则从黎曼几何学的角度看，这样子空间和平坦空间完全一样。因此子空间的一种性质、列维·齐维塔平行性和平坦空间的完全一样。即如果在子空间的两点有子空间的二切向量，则在讨论它们的平行性时，将此子空间变形为平坦子空间再观察即可。如果在这样得到的平坦子空间里上述二向量平行，则它们在原来子空间里在列维·齐维塔含义下平行。故在这种情况下平行性与联结二向量的起点的路径无关。

这样的子空间叫做**可展子空间**。这个名称的来历是 E_3 里的可展 V_2 可展开在平面上。例如三维欧氏空间里的圆柱，圆锥等是 E_3 里的可展 V_2。

以下为找出不可展子空间 V_{n-1} 上的列维·齐维塔平行性的几何意义，先注意下列定理。

定理 在 E_n 中只与一个参数有关的 $n-1$ 维平面的包络定义的 $n-1$ 维子空间是一个可展子空间。

在普通三维欧氏空间里，可直观地作这样说明。当然这个证明在高维情况也适用。

首先，设对应于非常接近的参数值依次得到的平面分别为 α_0，α_1，α_2，α_3…，则这些平面依次交于直线 g_1，g_2，g_3，…，互相成无穷小角。问题的包络可看做 g_1g_2，g_2g_3，g_3g_4，… 围成的这些无穷小平面 α_1，α_2，α_3，…所作成的。然而，以 g_1 为轴旋转 α_1 使之与 α_0 迭合，以 g_2 为轴旋转 α_2 使之与 α_1 迭合，…，故可将问题的包络全部展开在平面 α_0 上。因此，定理得证。

再设 E_n 中的 $n-1$ 维子空间 V_{n-1} 不可展，在 V_{n-1} 上考虑一条曲线C，今在C上各点，画与此子空间 V_{n-1} 相切的 $n-1$ 维平面。这些 $n-1$ 维平面只是单参数的 $n-1$ 维平面族。故其包络是一个 $n-1$ 维可展子空间。显然此包络与原来子空间 V_{n-1} 沿给定曲线C相切。这样的可展子空间叫做 V_{n-1} 沿C的**切可展子空间**。

在 V_{n-1} 上两点P与 P' 有 V_{n-1} 的向量 v^κ 与 v'^κ 沿联结P与P'的一条曲线C说明它们在列维·齐维塔含义下的平行性如下。

所谓 v^κ 与 v'^κ 为子空间 V_{n-1} 的向量就是 v^κ 与v'^κ 分别以 V_{n-1} 上的二点P与 P' 为起点并且与 V_{n-1} 相切。今沿 V_{n-1} 上的C作与 V_{n-1} 相切的可展子空间 $\overline{V}_{n-1}$，则 v^κ 与 v'^κ 也与$\overline{V}_{n-1}$ 相切。今将 $\overline{V}_{n-1}$ 展开在 $n-1$ 维平坦空间上，若 v^κ 与v'^κ 在展开后的空间里在普通含义下平行，则在 V_{n-1} 上沿曲线C在列维·齐维塔意义下平行。通过计算证明之。为此，先考虑P与 P' 非常接近时，设P在 V_{n-1} 上的坐标为(x^h)，P' 在 V_{n-1} 上的坐标为(x^h+dx^h)。因为v^κ是P处的向量与 V_{n-1}相切，故设在 V_{n-1} 上的分量为 v^h，则

$$v^\kappa = B_i^\kappa v^i$$

因此，与 $P(x^h)$非常接近的点 $P'(x^h+dx^h)$处的向量 $v'^\kappa = v^\kappa + dv^\kappa$ 由

$$v^\kappa + dv^\kappa = v^\kappa + \frac{\partial B_i^\kappa}{\partial x^j} dx^j v^i + B_i^\kappa dv^i$$

$$= B_i^\kappa v^i + \left(B_h^\kappa \left\{ {h \atop j\,i} \right\} + H_{ji}{}^\kappa\right) dx^j v^i + B_i^\kappa dv^i$$

$$= B_h^\kappa \left(v^h + dv^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} dx^j v^i\right) + H_{ji}{}^\kappa dx^j v^i$$

而定。然因 $H_{ji}{}^\kappa dx^j v^i$ 是与 V_{n-1} 垂直的分量，故 P'处的 $n-1$ 维切平面绕P与 P' 处的 $n-1$ 维切平面之交为轴迭合在P处的 $n-1$ 维切平面上时而得向量是 $v^\kappa+dv^\kappa$ 在P处 $n-1$ 维切平面上的正射影

$$B_h^\kappa \left(v^h + dv^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} dx^j v^i\right).$$

因此，若

$$dv^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} dx^j v^i = 0,$$

则这样得到的向量 $B_h^\kappa v^h$ 与一开始的平行。

如果P与P'的距离有限，在可用V_{n-1}上的曲线C联结的情况下，则在曲线C上依次取无限接近的点$P=P_0$，P_1，P_2，…，$P_n=P'$，继续上述操作即可。归根结蒂，这是沿曲线C求与V_{n-1}相切的可展曲面，再把它展开在平坦空间即P处的$n-1$维切平面上的操作。故若C的方程是

$$x^h=x^h(t),$$

当向量v^h沿曲线C满足

$$\frac{dv^h}{dt}+\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}\frac{dx^j}{dt}v^i=0$$

时，就说v^h沿C平移。

第七章 变 换 论

7.1 微小运动 开玲方程

用方程

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon\xi^\kappa$$

将 n 维黎曼空间 V_n 的各点(x^κ)变为非常接近的点$(\bar{x}^\kappa)$，如果点(x^κ)与$(x^\kappa + dx^\kappa)$之间的距离总是不变时，则上列点变换叫做**微小运动**。这里设 ξ^κ 是一反变向量的分量。ε 是一无穷小常数。

以下计算在上列变换下，两点(x^κ)与$(x^\kappa + dx^\kappa)$的距离 ds 要怎样变化。因为

$$d\bar{x}^\kappa = dx^\kappa + \varepsilon\partial_\alpha\xi^\kappa dx^\alpha, \quad (\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha)$$

所以

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= g_{\mu\lambda}(\bar{x})d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\lambda \\ &= (g_{\mu\lambda} + \varepsilon\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda})(dx^\mu + \varepsilon dx^\gamma\partial_\gamma\xi^\mu)(dx^\lambda + \varepsilon dx^\beta\partial_\beta\xi^\lambda) \\ &= g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda + \varepsilon[\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda} + g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha]dx^\mu dx^\lambda + \cdots \end{aligned}$$

故为了保持 ds 不变，ξ^λ 必须满足方程

$$\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda} + g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha = 0.$$

将

$$\partial_\nu g_{\mu\lambda} = \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda} + \left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\mu\alpha}$$

代入上式得

$$\xi^\nu\left(\left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda} + \left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\mu\alpha}\right) + g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha = 0,$$

$$g_{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu\xi^\alpha + \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}\xi^\nu\right) + g_{\mu\alpha}\left(\partial_\lambda\xi^\alpha + \left\{{\alpha \atop \lambda\nu}\right\}\xi^\nu\right) = 0,$$

$$g_{\alpha\lambda}\nabla_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\lambda\xi^\alpha = 0,$$

令 $g_{\alpha\lambda}\xi^\alpha = \xi_\lambda$，则得

$$\nabla_\mu\xi_\lambda + \nabla_\lambda\xi_\mu = 0.$$

这是微小变换

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon\xi^\kappa$$

定义微小运动时，ξ^κ 必须满足的条件．上方程叫做**开玲方程**．

微小运动是不改变长度的微小变换．以下证明它也不改变角度．

设 $\underset{1}{d}x^\kappa$，$\underset{2}{d}x^\kappa$ 是在(x^κ)处的两个向量．它们的夹角 θ 是由下式给出的．

$$\cos\theta=\frac{g_{\mu\lambda}\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda}\underset{1}{d}x^\mu\underset{1}{d}x^\lambda}\sqrt{g_{\mu\lambda}\underset{2}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda}}$$

因为上式的分母不因

$$\bar{x}^\kappa=x^\kappa+\varepsilon\xi^\kappa \quad \text{即} \quad \delta x^\kappa=\varepsilon\xi^\kappa$$

而改变．故只求分子的变化得

$$\begin{aligned}&\delta(g_{\mu\lambda}\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda)\\&=\varepsilon(\partial_\nu g_{\mu\lambda})\xi^\nu\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda+\varepsilon g_{\mu\lambda}(\partial_\nu\xi^\mu)\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\lambda+\varepsilon g_{\mu\lambda}(\partial_\nu\xi^\lambda)\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\nu\\&=\varepsilon(\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda}+g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha+g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha)\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda=0.\end{aligned}$$

因此
$$\delta\cos\theta=0,$$
即得如下定理．

定理 1． 在微小运动下，长度以及角度不变，而且测地线变为测地线．

如果特选坐标系(x^κ)使得 ξ^κ 的分量为

$$\xi^\kappa=\delta^\kappa_1,$$

则由开玲方程可知

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^1}=0.$$

即 $g_{\mu\lambda}$ 与变量 x^1 无关，故在变换

$$\bar{x}^1=x^1+t,\qquad \bar{x}^i=x^i\qquad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

下，基本二次形式 $ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ 不改变它的形状．因此得如下定理．

定理 2． 如果 V_n 容许一个微小运动时，则 V_n 容许此微小运动生成的单参数有限连续变换群：

$$\bar{x}^1=x^1+t,\qquad \bar{x}^i=x^i\quad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ n).$$

其次设 V_n 容有一个由 ξ^κ 定义的运动，即 ξ^κ 满足开玲方程

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = 0.$$

在 V_n 里考虑由微分方程

$$\frac{dx^\kappa}{dt} = \xi^\kappa$$

定义的曲线 $x^\kappa(t)$，其切向量是 ξ^κ。这样曲线叫做微小变换的**道路**。开玲方程乘以 ξ^λ 并缩短之得

$$(\nabla_\mu \xi_\lambda)\xi^\lambda + \xi^\lambda \nabla_\lambda \xi_\mu = 0 \qquad \frac{1}{2}\nabla_\mu(\xi_\lambda \xi^\lambda) + g_{\mu\lambda}\frac{\delta}{\delta t}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0,$$

故得如下定理。

定理 3. 道路的曲率向量是梯度。

再考虑与 ξ^λ 正交的曲线 $x^\kappa(s)$，则

$$\xi_\lambda \frac{dx^\lambda}{ds} = 0,$$

沿此曲线共变微分之得

$$\nabla_\mu \xi_\lambda \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + \xi_\lambda \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0.$$

然由开玲方程知道，上式左边第一项为 0，故

$$\xi_\lambda \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0.$$

因此得下列定理。

定理 4. 与 ξ^κ 正交的曲线的曲率向量与 ξ^κ 正交。

以下研究两个微小运动

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon\xi^\kappa, \qquad \bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon\eta^\kappa.$$

因为它们都是运动，故都满足开玲方程

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = 0, \qquad \nabla_\mu \eta_\lambda + \nabla_\lambda \eta_\mu = 0.$$

如果两个微小运动有相同的道路，则必存在数量 σ 使得

$$\xi^\kappa = \sigma\eta^\kappa.$$

将此式代入第一个开玲方程中去得

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = \sigma\nabla_\mu \eta_\lambda + (\nabla_\mu \sigma)\eta_\lambda + \sigma\nabla_\lambda \eta_\mu + (\nabla_\lambda \sigma)\eta_\mu,$$

$$(\nabla_\mu \sigma)\eta_\lambda + (\nabla_\lambda \sigma)\eta_\mu = 0.$$

因为 η_λ 不全为 0，故设 $\eta_1 \neq 0$。今在上式中令 $\lambda=\mu=1$ 得

$$\nabla_1 \sigma = 0.$$

在上式里再令 $\lambda=1$ 得

$$(\nabla_\mu \sigma)\eta_1 = 0 \qquad 故 \nabla_\mu \sigma = 0.$$

即 σ 是常数，因此二微小运动本质上相同。从而得

定理 5. V_n 中的两个微小运动不能有相同的道路。

在微小运动

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon \xi^\kappa \quad 即 \quad \delta x^\kappa = \varepsilon \xi^\kappa$$

下，各点移动了

$$\sqrt{g_{\mu\lambda}\delta x^\mu \delta x^\lambda} = \pm \varepsilon \sqrt{g_{\mu\lambda}\xi^\mu \xi^\lambda}$$

如果这个距离在空间各点一定，即

$$g_{\mu\lambda}\xi^\mu \xi^\lambda = 一定$$

时，此微小运动叫做**微小直移**。在这种情况下，开玲方程 $\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = 0$ 乘以 ξ^λ 并缩短之得

$$(\nabla_\mu \xi_\lambda)\xi^\lambda + \xi^\lambda \nabla_\lambda \xi_\mu = 0,$$

$$\frac{1}{2}\nabla_\mu(\xi_\lambda \xi^\lambda) + \xi^\lambda \nabla_\lambda \xi_\mu = 0,$$

即

$$\xi^\lambda \nabla_\lambda \xi^\kappa = 0.$$

可见

定理 6. 微小直移的道路是测地线。

7.2 黎曼空间的射影变换

在第二章 2.6 节里得到，在度量为 $ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ 的黎曼空间 V_n 中，测地线的微分方程是

$$\frac{d^2 x^\kappa}{dt^2} + \left\{ {}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda} \right\} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} - \frac{dx^\kappa}{dt} \frac{\dfrac{d^2 s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}} = 0.$$

为了从此式消去 $\dfrac{d^2 s}{dt^2} \Big/ \dfrac{ds}{dt}$，两边乘以 $\dfrac{dx^\omega}{dt}$ 得

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\ \frac{dx^\omega}{dt}+\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}\ \frac{dx^\omega}{dt}-\frac{dx^\kappa}{dt}\ \frac{dx^\omega}{dt}\ \frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0.$$

于此式中对调 κ 与 ω得

$$\frac{d^2x^\omega}{dt^2}\ \frac{dx^\kappa}{dt}+\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}\ \frac{dx^\kappa}{dt}-\frac{dx^\omega}{dt}\ \frac{dx^\kappa}{dt}\ \frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0.$$

此二方程边边相减得

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\ \frac{dt^\omega}{dt}-\frac{d^2x^\omega}{dt^2}\ \frac{dx^\kappa}{dt}$$
$$+\left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\omega}{dt}-\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\kappa}{dt}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}=0.$$

这是采用一般参数 t 时的测地线微分方程。

现在假设除了 V_n 之外另有一个黎曼空间 V'_n，V_n 的各点与V'_n的各点间建立了一一对应，而且设相对应的点分别有相同坐标$(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$。又设 V'_n 的度量由

$$ds'^2=g'_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

定义，当采用与前相同的参数 t 时，V'_n 的测地线的微分方程是

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\ \frac{dx^\omega}{dt}-\frac{d^2x^\omega}{dt^2}\ \frac{dx^\kappa}{dt}$$
$$+\left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'\ \frac{dx^\omega}{dt}-\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}'\ \frac{dx^\kappa}{dt}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}=0.$$

但这里设$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'$是由 $g'_{\mu\lambda}$ 作成的克氏记号。

因为 V_n 的点与 V'_n 的点间已建立一一对应，此外，我们还要假设在此对应下 V_n 的测地线与 V'_n 的测地线总是相对应。在这种情况下，将上列两个测地线的微分方程边边相减得

$$\left[\left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'-\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\right)\frac{dx^\omega}{dt}-\left(\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}'-\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}\right)\frac{dx^\kappa}{dt}\right]\frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\lambda}{dt}=0.$$

然而，这里出现的$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'-\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$是一个三阶混合张量的分量。原因是，

$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'$ 与$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$在坐标变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1, \ x^2, \ \cdots, \ x^n)$$

下的变换式分别是

$$\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}'=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right),$$

$$\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right).$$

边边相减得

$$\{{}^{\mu'}_{\mu'\lambda'}\}'-\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}(\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'-\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}).$$

故令
$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'-\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}=\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

时，前式变为

$$\left(\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}\frac{dx^{\omega}}{dt}-\phi_{\mu\lambda}{}^{\omega}\frac{dx^{\kappa}}{dt}\right)\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\lambda}}{dt}=0.$$

此式又可写如

$$(\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}\delta_{\nu}^{\omega}-\phi_{\mu\lambda}{}^{\omega}\delta_{\nu}^{\kappa})\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\lambda}}{dt}=0.$$

因为不论对于任何$\dfrac{dx^{\kappa}}{dt}$这个方程总应该成立，从而得

$$\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}\delta_{\nu}^{\omega}+\phi_{\lambda\nu}{}^{\kappa}\delta_{\mu}^{\omega}+\phi_{\nu\mu}{}^{\kappa}\delta_{\lambda}^{\omega}-\phi_{\mu\lambda}{}^{\omega}\delta_{\nu}^{\kappa}-\phi_{\lambda\nu}{}^{\omega}\delta_{\mu}^{\kappa}-\phi_{\nu\mu}{}^{\omega}\delta_{\lambda}^{\kappa}=0.$$

关于 ω，ν 缩短之得

$$n\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}+\phi_{\lambda\mu}{}^{\kappa}+\phi_{\lambda\mu}{}^{\kappa}-\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}-\phi_{\lambda\omega}{}^{\omega}\delta_{\mu}^{\kappa}-\phi_{\omega\mu}{}^{\omega}\delta_{\lambda}^{\kappa}=0,$$

即
$$\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{1}{n+1}(\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda\omega}{}^{\omega}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu\omega}{}^{\omega}).$$

令
$$\frac{1}{n+1}\phi_{\nu\omega}{}^{\omega}=\phi_{\nu},$$

则
$$\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu},$$

故得$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'$ 与$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$之间的关系

$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}+\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu}.$$

在此式中关于 κ，μ 缩短可见，

$$\frac{\partial \log\sqrt{g'}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x^\lambda} + (n+1)\phi_\lambda.$$

因此 ϕ_λ 是一个梯度。这样，将测地线变为测地线的点对应或点变换叫做**射影对应**或**射影变换**。这和在欧氏空间里将直线变为直线的点变换叫做射影变换一样。

以下研究，当 V'_n 的$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'$ 与 V_n 的$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$间有了如上关系时，求 V'_n 的曲率张量$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与 V_n 的曲率张量$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 间的关系。将关系式$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}' = \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\} + \delta^{\kappa}_{\mu}\phi_\lambda + \delta^{\kappa}_{\lambda}\phi_\mu$ 代入

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = \frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\}'}{\partial x^\mu} + \{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\}'\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}' - \{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\}'\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}'$$

得
$$\begin{aligned}K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = {} & \frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu} + \delta^{\kappa}_{\mu}\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial x^\nu} + \delta^{\kappa}_{\lambda}\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\}}{\partial x^\mu} - \delta^{\kappa}_{\nu}\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial x^\mu} - \delta^{\kappa}_{\lambda}\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x^\mu} \\ & + (\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\} + \delta^{\kappa}_{\nu}\phi_\alpha + \delta^{\kappa}_{\alpha}\phi_\nu)(\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\} + \delta^{\alpha}_{\mu}\phi_\lambda + \delta^{\alpha}_{\lambda}\phi_\mu) \\ & - (\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\} + \delta^{\kappa}_{\mu}\phi_\alpha + \delta^{\kappa}_{\alpha}\phi_\mu)(\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\} + \delta^{\alpha}_{\nu}\phi_\lambda + \delta^{\alpha}_{\lambda}\phi_\nu),\end{aligned}$$

计算之得

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \delta^{\kappa}_{\nu}(\nabla_\mu\phi_\lambda - \phi_\mu\phi_\lambda) + \delta^{\kappa}_{\mu}(\nabla_\nu\phi_\lambda - \phi_\nu\phi_\lambda),$$

在此式里关于 κ 与 ν 缩短得

$$K'_{\mu\lambda} = K_{\mu\lambda} - (n-1)(\nabla_\mu\phi_\lambda - \phi_\mu\phi_\lambda),$$

故得
$$\nabla_\mu\phi_\lambda - \phi_\mu\phi_\lambda = -\frac{1}{n-1}(K'_{\mu\lambda} - K_{\mu\lambda}).$$

将此式代入前式中得

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} + \frac{1}{n-1}\delta^{\kappa}_{\nu}(K'_{\mu\lambda} - K_{\mu\lambda}) - \frac{1}{n-1}\delta^{\kappa}_{\mu}(K'_{\nu\lambda} - K_{\nu\lambda}),$$

即

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K'_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}K'_{\nu\lambda}) = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda}).$$

此式说明张量

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda})$$

在射影变换下不变，它叫做**外尔射影曲率张量**。外尔射影曲率张量为 0 的空间叫做**射影平坦空间**。

可见黎曼空间 V_n 为射影平坦的充要条件是 V_n 的曲率张量 $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 满足

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda})=0,$$

即满足
$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{1}{n-1}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda}).$$

降指标 κ，则上式变成

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=\frac{1}{n-1}(g_{\nu\kappa}K_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}K_{\nu\lambda}).$$

但 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 满足 $K_{\nu\mu\lambda\kappa}+K_{\nu\mu\kappa\lambda}=0$，故由上式得

$$(g_{\nu\kappa}K_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}K_{\nu\lambda})+(g_{\nu\lambda}K_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}K_{\nu\kappa})=0.$$

用 $g^{\nu\kappa}$ 乘之并缩短得

$$nK_{\mu\lambda}-Kg_{\mu\lambda}=0,$$

即
$$K_{\mu\lambda}=\frac{1}{n}Kg_{\mu\lambda}.$$

将此式代入

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{1}{n-1}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda}),$$

得
$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{K}{n(n-1)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda}).$$

因此如下定理成立。

定理 7. 射影平坦的黎曼空间是常曲率空间。

再者，外尔射影曲率张量

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda})$$

在射影变换下不变。故射影平坦空间，即

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda})=0$$

的空间在射影变换下变为

$$W'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K'_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K'_{\nu\lambda})=0$$

的空间。故由定理 7 得下列**贝尔特腊米定理。**

定理 8. 在射影变换下常曲率空间变为常曲率空间。

然而人们知道$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 与$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 之间有以下关系

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda}-\phi_{\mu}\phi_{\lambda})+\delta^{\kappa}_{\mu}(\nabla_{\nu}\phi_{\lambda}-\phi_{\nu}\phi_{\lambda}),$$

故将由上式得到的

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{K}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda}),\quad K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{K'}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g'_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g'_{\nu\lambda})$$

代入此式得

$$\frac{K'}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g'_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g'_{\nu\lambda})=\frac{K}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda})$$
$$-\delta^{\kappa}_{\nu}(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda}-\phi_{\mu}\phi_{\lambda})+\delta^{\kappa}_{\mu}(\nabla_{\nu}\phi_{\lambda}-\phi_{\nu}\phi_{\lambda}).$$

在此式中关于 κ 与 ν 缩短得

$$K'g'_{\mu\lambda}=Kg_{\mu\lambda}-n(n-1)(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda}-\phi_{\mu}\phi_{\lambda}).$$

此式给出V'_n 的 $g'_{\mu\lambda}$ 与V_n 的 $g_{\mu\lambda}$ 的关系。

7.3 托麻斯的射影联络系数

在前节讨论了V'_n 的测地线与V_n 的测地线对应的射影变换由

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'=\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\delta^{\kappa}_{\mu}\phi_{\lambda}+\delta^{\kappa}_{\lambda}\phi_{\mu}$$

而定。在此式中关于 κ 与 λ 缩短得

$$\left\{{}^{\lambda}_{\nu\lambda}\right\}'=\left\{{}^{\lambda}_{\nu\lambda}\right\}+(n+1)\phi_{\nu},$$

即
$$\phi_{\nu}=\frac{1}{n+1}(\left\{{}^{\alpha}_{\nu\alpha}\right\}'-\left\{{}^{\alpha}_{\nu\alpha}\right\}).$$

将此式代入前式得

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'=\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\mu}(\left\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\right\}'-\left\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\right\})+\frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\lambda}(\left\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\right\}'-\left\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\right\}),$$

即
$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'-\frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\mu}\left\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\right\}'-\frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\lambda}\left\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\right\}'=$$

$$=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\}.$$

此式说明

$$\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\}$$

表示的量在黎曼空间的射影变换下不变，叫做**T. Y. 托麻斯的射影联络系数。**

此射影联络系数 $\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$ 和克氏记号 $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 的变换规律不同。以下寻找它的变换式。首先

$$\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\,\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}+\frac{\partial^{2}x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right),$$

其次
$$\{{}^{\alpha'}_{\mu'\alpha'}\}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}},$$

故得
$$\Pi_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}=\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa'}_{\mu'}\{{}^{\alpha'}_{\lambda'\alpha'}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa'}_{\lambda'}\{{}^{\alpha'}_{\mu'\alpha'}\}$$

$$=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\,\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left(\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{2}x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right]-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa'}_{\mu'}\,\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa'}_{\lambda'}\,\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu}},$$

于是得 $\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$ 的变换式

$$\Pi_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\,\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\,\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}+\frac{\partial^{2}x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)$$

$$-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa'}_{\mu'}\,\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa'}_{\lambda'}\,\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}}.$$

从
$$\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}-\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\}$$

得到的
$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}=\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}+\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}+\frac{1}{n+1}\,\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\},$$

代入测地线的微分方程

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

中得
$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}+\frac{2}{n+1}\left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\right\}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}=0.$$

式中若采用
$$\frac{2}{n+1}\left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\right\}\frac{dx^\nu}{ds}=\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2},$$

即满足
$$t=\int e^{-\frac{2}{n+1}\int\left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\right\}dx^\nu}ds$$

的参数 t，则上列测地线的微分方程为

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}+\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}\frac{dx^\kappa}{ds}=0,$$

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^\kappa}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}+\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}+\Pi_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}=0.$$

这样的参数 t 叫做**T. Y. 托麻斯的射影参数.**

7.4 黎曼空间的共形变换

有二黎曼空间 V'_n 与 V_n，假设在它们的各点间建立了一一对应。与前相同，假设在 V'_n 与 V_n 里已选取坐标系使对应点有相同的坐标$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$。并设 V'_n 的度量
$$ds'^2=g'_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

与 V_n 的度量
$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

之间存在关系
$$ds'=\rho(x)ds,$$

式中 $\rho(x)$是大于 0 的一个函数，即

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda},$$

则在 V'_n 与 V_n 里，相对应二向量 $dx^\kappa,\delta x^\kappa$ 之间的夹角，不论在 V'_n 里测量还是在 V_n 里测量是相同的。原因是

$$\frac{g'_{\mu\lambda}dx^\mu\delta x^\lambda}{\sqrt{g'_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{g'_{\mu\lambda}\delta x^\mu\delta x^\lambda}}=\frac{\rho^2 g_{\mu\lambda}dx^\mu\delta x^\lambda}{\sqrt{\rho^2 g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{\rho^2 g_{\mu\lambda}\delta x^\mu\delta x^\lambda}}$$

$$=\frac{g_{\mu\lambda}dx^\mu\delta x^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{g_{\mu\lambda}\delta x^\mu\delta x^\lambda}}.$$

在这种意义下，二黎曼空间 V'_n 与 V_n 间的这样对应或变换叫做**共形对应**或**共形变换**。在共形变换下可以互相转化的二黎曼空间叫做**互相共形的**。

今设二黎曼空间 V'_n 与 V_n 是互相共形的，试求 V'_n 的 $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'$ 与 V_n 的 $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$间的关系。在 V'_n 的$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'$

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'=\frac{1}{2}g'^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g'_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)$$

里的 $g'_{\mu\lambda}$ 用 $\rho^2 g_{\mu\lambda}$; $g'^{\kappa\alpha}$ 用$\frac{1}{\rho^2}g^{\kappa\alpha}$ 代换之得：

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'=\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial\rho^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial\rho^2 g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\rho^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}g^{\kappa\alpha}\left(\rho^2\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}+\rho^2\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}-\rho^2\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right.$$

$$\left.+2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x^\lambda}g_{\mu\alpha}+2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}g_{\lambda\alpha}-2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x^\alpha}g_{\mu\lambda}\right)$$

$$=\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\delta^\kappa_\mu\frac{\partial\log\rho}{\partial x^\lambda}+\delta^\kappa_\lambda\frac{\partial\log\rho}{\partial x^\mu}-g^{\kappa\alpha}\frac{\partial\log\rho}{\partial x^\alpha}g_{\mu\lambda},$$

故令

$$\rho_\nu=\frac{\partial\log\rho}{\partial x^\nu},$$

则得$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'$ 与$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$之间的关系式

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'=\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\delta^\kappa_\mu\rho_\lambda+\delta^\kappa_\lambda\rho_\mu-g^{\kappa\alpha}\rho_\alpha g_{\mu\lambda}.$$

在上式里令 $\kappa=\lambda=\omega$ 求总和，则得

$$\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}'=\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}+n\rho_{\mu},$$

即
$$\rho_{\mu}=\frac{1}{n}(\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}'-\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}).$$

再将此式代入前方程中得

$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}+\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\mu}(\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}'-\{{}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\})+\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\lambda}(\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\}'-\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\})$$

$$-\frac{1}{n}g^{\kappa\alpha}(\{{}^{\omega}_{\alpha\omega}\}'-\{{}^{\omega}_{\alpha\omega}\})g_{\mu\lambda},$$

即
$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'-\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\omega}_{\lambda\omega}\}'-\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}'+\frac{1}{n}g'^{\kappa\alpha}\{{}^{\omega}_{\alpha\omega}\}'g'_{\mu\lambda}$$

$$=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\omega}_{\lambda\omega}\}-\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}+\frac{1}{n}g^{\kappa\alpha}\{{}^{\omega}_{\alpha\omega}\}g_{\mu\lambda}.$$

此式说明由

$$K_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}=\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\mu}\{{}^{\omega}_{\lambda\omega}\}-\frac{1}{n}\delta^{\kappa}_{\lambda}\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}+\frac{1}{n}g^{\kappa\alpha}\{{}^{\omega}_{\alpha\omega}\}g_{\mu\lambda}$$

定义的量 $K_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$ 在黎曼空间的共形变换

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^{2}g_{\mu\lambda}$$

下不变。此$K_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$叫做**J．M．托麻斯共形联络系数．**

这里必须注意的是，此J．M．托麻斯共形联络系数$K_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$在坐标变换

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^{1},\ \cdots,\ x^{n})$$

下和 $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 的变换规律不同．以下求其变换规律．首先 $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ 的变换规律是

$$\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}+\frac{\partial^{2}x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right),$$

$\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}$的变换规律是

$$\{{}^{\omega'}_{\mu'\omega'}\}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\{{}^{\omega}_{\mu\omega}\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}},$$

故得

$$K_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}=\{{}_{\mu'}{}^{\kappa'}{}_{\lambda'}\}-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\{{}_{\lambda'}{}^{\omega'}{}_{\omega'}\}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\{{}_{\mu'}{}^{\omega'}{}_{\omega'}\}+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\{{}_{\alpha'}{}^{\omega'}{}_{\omega'}\}g_{\mu'\lambda'}$$

$$=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\{{}_{\lambda}{}^{\omega}{}_{\omega}\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}\right)$$

$$-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\{{}_{\mu}{}^{\omega}{}_{\omega}\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}}\right)+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\{{}_{\alpha}{}^{\omega}{}_{\omega}\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\alpha'}}\right)g_{\mu'\lambda'}$$

$$=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left(\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}-\frac{1}{n}\delta_{\mu}^{\kappa}\{{}_{\lambda}{}^{\omega}{}_{\omega}\}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda}^{\kappa}\{{}_{\mu}{}^{\omega}{}_{\omega}\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}g^{\kappa\alpha}\{{}_{\alpha}{}^{\omega}{}_{\omega}\}g_{\mu\lambda}\right)+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right]-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}}$$

$$+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\alpha'}}g_{\mu'\lambda'},$$

即 $$K_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}K_{\mu\lambda}^{\kappa}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\phi_{\lambda'}$$

$$-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\phi_{\mu'}+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\phi_{\alpha'}g_{\mu'\lambda'},$$

但 $$\phi'_{\lambda}=\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}.$$

这是 J. M. 托麻斯的共形联络系数$K_{\mu\lambda}^{\kappa}$的变换式。

7.5 外尔共形曲率张量

在前节讨论了克氏记号$\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}$在黎曼度量的共形变换

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda}$$

下的变换规律是

$$\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}'=\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}+\delta_{\mu}^{\kappa}\rho_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\rho_{\mu}-g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda}.$$

在这节里要通过计算研究在黎曼度量的共形变换下，黎曼·克利斯托费尔曲率张量$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$应怎样变换。

首先将上式代入

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}'}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}'}{\partial x^{\mu}}+\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\}'\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}'-\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\}'\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}',$$

得 $$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\lambda}+\delta^{\kappa}_{\lambda}\rho_{\mu}-g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda})-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\}+\delta^{\kappa}_{\nu}\rho_{\lambda}$$
$$+\delta^{\kappa}_{\lambda}\rho_{\nu}-g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\nu\lambda})+(\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\}+\delta^{\kappa}_{\nu}\rho_{\alpha}+\delta^{\kappa}_{\alpha}\rho_{\nu}-g^{\kappa\omega}\rho_{\omega}g_{\nu\alpha})(\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}$$
$$+\delta^{\alpha}_{\mu}\rho_{\lambda}+\delta^{\alpha}_{\lambda}\rho_{\mu}-g^{\alpha\omega}\rho_{\omega}g_{\mu\lambda})-(\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\alpha}+\delta^{\kappa}_{\alpha}\rho_{\mu}$$
$$-g^{\kappa\omega}\rho_{\omega}g_{\mu\alpha})(\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}+\delta^{\alpha}_{\nu}\rho_{\lambda}+\delta^{\alpha}_{\lambda}\rho_{\nu}-g^{\alpha\omega}\rho_{\omega}g_{\nu\lambda})$$
$$=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}\left(\frac{\partial\rho_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\rho_{\alpha}\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}-\rho_{\mu}\rho_{\lambda}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}g_{\mu\lambda}\right)$$
$$+\delta^{\kappa}_{\mu}\left(\frac{\partial\rho_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\rho_{\alpha}\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}-\rho_{\nu}\rho_{\lambda}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}g_{\nu\lambda}\right)$$
$$-g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial\rho_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\rho_{\omega}\{{}_{\nu}{}^{\omega}{}_{\alpha}\}-\rho_{\nu}\rho_{\alpha}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}g_{\nu\alpha}\right)g_{\mu\lambda}$$
$$+g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial\rho_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\rho_{\omega}\{{}_{\mu}{}^{\omega}{}_{\alpha}\}-\rho_{\mu}\rho_{\alpha}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}g_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\lambda},$$

故令 $$\rho_{\mu\lambda}=\frac{\partial\rho_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\rho_{\alpha}\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\}-\rho_{\mu}\rho_{\lambda}+\frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\rho_{\beta}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda},\quad \rho_{\lambda}{}^{\kappa}=g^{\kappa\mu}\rho_{\mu\lambda}$$

时得 $$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}\rho_{\mu\lambda}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\nu\lambda}-\rho_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}+\rho_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda}.$$

在此式中，关于 κ 与 ν 缩短得

$$K'_{\mu\lambda}=K_{\mu\lambda}-(n-2)\rho_{\mu\lambda}-\rho_{\alpha}{}^{\alpha}g_{\mu\lambda}.$$

此式乘以 $g'^{\mu\lambda}=\frac{1}{\rho^{2}}g^{\mu\lambda}$ 并缩短之变成

$$K'=\frac{1}{\rho^{2}}[K-2(n-1)\rho_{\alpha}{}^{\alpha}],$$

即 $$\rho_{\alpha}{}^{\alpha}=-\frac{1}{2(n-1)}(\rho^{2}K'-K).$$

将此式代入原式得

$$K'_{\mu\lambda}=K_{\mu\lambda}-(n-2)\rho_{\mu\lambda}+\frac{1}{2(n-1)}(\rho^{2}K'-K)g_{\mu\lambda},$$

即得

$$\rho_{\mu\lambda}=\left[-\frac{K'_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{K'g'_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]-\left[-\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right].$$

将此式代入

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}\rho_{\mu\lambda}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\nu\lambda}-\rho_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}+\rho_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda}$$

得 $K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$

$$+\delta^{\kappa}_{\nu}\left[\frac{K'_{\mu\lambda}}{n-2}-\frac{K'g'_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}-\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]$$

$$-\delta^{\kappa}_{\mu}\left[\frac{K'_{\nu\lambda}}{n-2}-\frac{K'g'_{\nu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}-\frac{K_{\nu\lambda}}{n-2}+\frac{Kg_{\nu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]$$

$$+\left[\frac{K'_{\nu}{}^{\kappa}}{n-2}-\frac{K'\delta^{\kappa}_{\nu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g'_{\mu\lambda}-\left[\frac{K_{\nu}{}^{\kappa}}{n-2}-\frac{K\delta^{\kappa}_{\nu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g_{\mu\lambda}$$

$$-\left[\frac{K'_{\mu}{}^{\kappa}}{n-2}-\frac{K'\delta^{\kappa}_{\mu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g'_{\nu\lambda}+\left[\frac{K_{\mu}{}^{\kappa}}{n-2}+\frac{K\delta^{\kappa}_{\mu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g_{\nu\lambda},$$

即 $$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta^{\kappa}_{\nu}K'_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K'_{\nu\lambda}+K'_{\nu}{}^{\kappa}g'_{\mu\lambda}-K'_{\mu}{}^{\kappa}g'_{\nu\lambda})$$

$$+\frac{K'}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g'_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g'_{\nu\lambda})$$

$$=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda}+K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda})$$

$$+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda}).$$

此式说明，由

$$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda}+K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda})$$

$$+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda})$$

定义的张量在黎曼空间的共形变换下不变。此张量叫做**外尔共形曲率**

张量。但当 $n=3$ 时，这个外尔共形曲率张量恒为0。为了证明它，取正交标架 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$，降$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 的指标 κ，记

$$C_{\nu\mu\lambda\kappa}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}-\frac{1}{n-2}(g_{\nu\kappa}K_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}K_{\nu\lambda}+K_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda})$$

$$+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}),$$

令
$$C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}=C_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\delta)}^{\nu}h_{(\gamma)}^{\mu}h_{(\beta)}^{\lambda}h_{(\alpha)}^{\kappa},$$

为了证明 $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}\equiv0$，只要证出 $C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}\equiv0$ 就行。

当 $n=3$ 时，

$$C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}=K_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}-(\delta_{\delta\alpha}K_{(\gamma)(\beta)}-\delta_{\gamma\alpha}K_{(\delta)(\beta)}+K_{(\delta)(\alpha)}\delta_{\gamma\beta}$$

$$-K_{(\gamma)(\alpha)}\delta_{\delta\beta})+\frac{1}{2}K(\delta_{\delta\alpha}\delta_{\gamma\beta}-\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\delta\beta}).$$

但式中
$$K_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\delta)}^{\nu}h_{(\gamma)}^{\mu}h_{(\beta)}^{\lambda}h_{(\alpha)}^{\kappa},$$

$$K_{(\gamma)(\beta)}=\sum_{\alpha}K_{(\alpha)(\gamma)(\beta)(\alpha)},$$

$$K=\sum_{\beta}K_{(\beta)(\beta)}.$$

今计算 $C_{(1)(2)(3)(1)}$如下所示。

$$C_{(1)(2)(3)(1)}=K_{(1)(2)(3)(1)}-(\delta_{11}K_{(2)(3)}-\delta_{21}K_{(1)(3)}+K_{(1)(1)}\delta_{23}$$

$$-K_{(2)(1)}\delta_{13})+\frac{1}{2}K(\delta_{11}\delta_{23}-\delta_{21}\delta_{13})$$

$$=K_{(1)(2)(3)(1)}-K_{(2)(3)}=K_{(1)(2)(3)(1)}-(K_{(1)(2)(3)(1)}$$

$$+K_{(2)(2)(3)(2)}+K_{(3)(2)(3)(3)})=0.$$

这里应注意 $K_{(2)(2)(3)(2)}=K_{(3)(2)(3)(3)}=0$。用类似的方法可以证明其它的 $C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}$全为0。请读者自证。

又由共形曲率张量 $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ 的定义式易证，共形曲率张量 $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$满足 $C_{\omega\mu\lambda}{}^{\omega}=0$。求共形曲率张量

$$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda}+K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda})+$$

$$+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_\nu^\kappa g_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa g_{\nu\lambda})$$

对 x^ω 的共变导数

$$\nabla_\omega C_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa=\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa-\frac{1}{n-2}(\delta_\nu^\kappa\nabla_\omega K_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa\nabla_\omega K_{\nu\lambda}+\nabla_\omega K_\nu{}^\kappa g_{\mu\lambda}$$

$$-\nabla_\omega K_\mu{}^\kappa g_{\nu\lambda})+\frac{\nabla_\omega K}{(n-1)(n-2)}(\delta_\nu^\kappa g_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa g_{\nu\lambda}),$$

关于 κ 与 ω缩短得

$$\nabla_\omega C_{\nu\mu\lambda}{}^\omega=\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\omega-\frac{1}{n-2}(\nabla_\nu K_{\mu\lambda}-\nabla_\mu K_{\nu\lambda}+\nabla_\omega K_\nu{}^\omega g_{\mu\lambda}-\nabla_\omega K_\mu{}^\omega g_{\nu\lambda})$$

$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}(\nabla_\nu K g_{\mu\lambda}-\nabla_\mu K g_{\nu\lambda}).$$

但在比安基恒等式

$$\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa+\nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\kappa+\nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda}{}^\kappa=0$$

里关于 κ 与 ω缩短便得

$$\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\omega=\nabla_\nu K_{\mu\lambda}-\nabla_\mu K_{\nu\lambda},$$

再乘以 $g^{\mu\lambda}$ 并缩短之得

$$\nabla_\omega K_\nu{}^\omega=\frac{1}{2}\nabla_\nu K.$$

将这些式子代入上式可见

$$\nabla_\omega C_{\nu\mu\lambda}{}^\omega=(n-3)C_{\nu\mu\lambda}.$$

其中 $$C_{\mu\nu\lambda}=\frac{\nabla_\nu K_{\mu\lambda}}{n-2}-\frac{\nabla_\nu K g_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}-\frac{\nabla_\mu K_{\nu\lambda}}{n-2}+\frac{\nabla_\mu K g_{\nu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}.$$

7.6 黎曼空间与局部欧氏空间互相共形的条件

到此作好了准备，我们来求黎曼空间与局部欧氏空间共形的条件。为此将前节讨论的 V'_n 看作局部欧氏空间，这时 $K'_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa=0$。故

$$C'_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa=C_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa=0.$$

这时 $K'_{\mu\lambda}$ 与 K' 也应是 0，故从

$$\rho_{\mu\lambda}=\left[-\frac{K'_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{K'g'_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]-\left[-\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]$$

得到的

$$\nabla_\mu\rho_\lambda-\rho_\mu\rho_\lambda+\frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\rho_\beta\rho_\alpha g_{\mu\lambda}=\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}-\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}$$

必须是可积的。反之，若上式可积，则$K'_{\mu\lambda}=K'=0$，从 $C'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 可得$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$。

求上式的可积条件就是计算

$$\nabla_\nu\nabla_\mu\rho_\lambda-\nabla_\mu\nabla_\nu\rho_\lambda=-\rho_\kappa K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}。$$

实际计算此可积条件得

$$C_{\nu\mu\lambda}=0。$$

然而由

$$\Delta_\omega C_{\nu\mu\lambda}{}^{\omega}=(n-3)C_{\nu\mu\lambda}$$

可见，当 $n>3$ 时此条件可由 $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ 导出。故得下列定理。

定理 9. 黎曼空间 V_n 与局部欧氏空间共形的充要条件是当 $n=3$ 时，$C_{\nu\mu\lambda}=0$；当 $n>3$ 时，$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$。

如果黎曼空间 V_n 是常曲率空间，则

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{K}{n(n-1)}(\delta^\kappa_\nu g_{\mu\lambda}-\delta^\kappa_\mu g_{\nu\lambda}),$$

$$K_{\mu\lambda}=\frac{K}{n}g_{\mu\lambda}。$$

故
$$\begin{aligned}C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}&=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta^\kappa_\nu K_{\mu\lambda}-\delta^\kappa_\mu K_{\nu\lambda}+K_\nu{}^\kappa g_{\mu\lambda}-K_\mu{}^\kappa g_{\nu\lambda})\\&\quad+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^\kappa_\nu g_{\mu\lambda}-\delta^\kappa_\mu g_{\nu\lambda})\\&=\frac{K}{n(n-1)}(\delta^\kappa_\nu g_{\mu\lambda}-\delta^\kappa_\mu g_{\nu\lambda})-\frac{2K}{n(n-2)}(\delta^\kappa_\nu g_{\mu\lambda}-\delta^\kappa_\mu g_{\nu\lambda})\\&\quad+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^\kappa_\nu g_{\mu\lambda}-\delta^\kappa_\mu g_{\nu\lambda})=0。\end{aligned}$$

故得下列定理。

定理 10. 常曲率空间与局部欧氏空间共形。

7.7 在 V_n 里 V_m 的共形性质

在前节里，对黎曼空间 V_n 的基本共变张量 $g_{\mu\lambda}$ 作共形变换

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda},$$

则其克氏记号发生如下变换

$$\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}'=\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\lambda}+\delta^{\kappa}_{\lambda}\rho_{\mu}-g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda}.$$

今在 V_n 里考虑用

$$x^{\kappa}=x^{\kappa}(y^h)$$

定义的 m 维子黎曼空间 V_m，其基本共变张量

$$g_{ji}=B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}g_{\mu\lambda}$$

在上述共形变换下发生变换

$$g'_{ji}=\rho^2 g_{ji}.$$

故 V_m 的克氏记号$\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}$发生变换

$$\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}'=\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}+\delta^{h}_{j}\rho_{i}+\delta^{h}_{i}\rho_{j}-g^{ha}\rho_{a}g_{ji}.$$

但式中
$$\rho_i=\frac{\partial\log\rho}{\partial x^i}=\rho_{\lambda}B_i{}^{\lambda}.$$

以下计算欧拉·斯高天张量

$$H_{ji}{}^{\kappa}=\partial_j B_i{}^{\kappa}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}-B_h{}^{\kappa}\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}$$

在上述共形变换下发生的变换。为此，将上述$\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}'$与$\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}'$代入

$$H'_{ji}{}^{\kappa}=\partial_j B_i{}^{\kappa}+\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}'B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}-B_h{}^{\kappa}\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}'$$

得
$$\begin{aligned}H'_{ji}{}^{\kappa}&=\partial_j B_i{}^{\kappa}+\left(\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\lambda}+\delta^{\kappa}_{\lambda}\rho_{\mu}-g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda}\right)B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}\\&\quad-B_h{}^{\kappa}\left(\left\{{}_{j}{}^{h}{}_{i}\right\}+\delta^{h}_{j}\rho_{i}+\delta^{h}_{i}\rho_{j}-g^{ha}\rho_{a}g_{ji}\right)\\&=H_{ji}{}^{\kappa}-g_{ji}\left(g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}-B_h{}^{\kappa}B_a{}^{\mu}g^{ha}\rho_{\mu}\right)\\&=H_{ji}{}^{\kappa}-g_{ji}\left(g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}-B_h{}^{\kappa}B_a{}^{\alpha}g^{ha}\rho_{\alpha}\right)\\&=H_{ji}{}^{\kappa}-g_{ji}\left(g^{\kappa\alpha}-B_h{}^{\kappa}B_a{}^{\alpha}g^{ha}\right)\rho_{\alpha}.\end{aligned}$$

然因
$$g^{\kappa\alpha}=B_h{}^{\kappa}B_a{}^{\alpha}g^{ta}+B_P{}^{\kappa}B_P{}^{\alpha},$$

故得 $H_{ji}{}^{\kappa}$ 的变换式

$$H'_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-g_{ji}B_P{}^{\kappa}B_P{}^{\alpha}\rho_{\alpha}.$$

再向上式两边乘以

$$g'^{ji}=\frac{1}{\rho^2}g^{ji},$$

关于 j 与 i 缩短得

$$g'^{ji}H'_{ji}{}^{\kappa}=\frac{1}{\rho^2}(g^{ji}H_{ji}{}^{\kappa}-mB_P{}^{\kappa}B_P{}^{\alpha}\rho_\alpha),$$

故 $$B_P{}^{\kappa}B_P{}^{\alpha}\rho_\alpha=\frac{1}{m}(g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}-\rho^2 g'^{cb}H'_{cb}{}^{\kappa}),$$

将此式代入原来的 $H_{ji}{}^{\kappa}$ 的变换式中得

$$H'_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g_{ji}(g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}-\rho^2 g'^{cb}H'_{cb}{}^{\kappa}),$$

即 $$H'_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g'_{ji}g'^{cb}H'_{cb}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g_{ji}g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}.$$

此式说明张量

$$M_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g_{ji}g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}$$

在 V_n 的共形变换下不变。此张量叫做**共形欧拉·斯高天张量**. 显然，此$M_{ji}{}^{\kappa}$ 关于 κ 与 V_m 垂直，故可令

$$M_{ji}{}^{\kappa}=M_{jiP}B_P{}^{\kappa}.$$

式中出现的 M_{jiP} 是**共形第二基本张量**.

再者,$M_{ji}{}^{\kappa}=0$ 说明此点为脐点,因此由上述考察得下列二定理。

定理 11. 在共形变换下，脐点变为脐点。

定理 12. 在共形变换下，全脐点曲面变为全脐点曲面。

已经求到第一基本张量 g_{ji}， 第二基本张量 H_{jiP} 在共形变换下的变换式，以下求子空间的基本向量 L_{jPQ} 的变换式。

首先，L_{jPQ} 的定义是

$$L_{jPQ}=g_{\mu\lambda}(\nabla_j B_P{}^{\mu})B_Q{}^{\lambda},$$

在 V_n 的共形变换

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda}$$

下，设上式变为

$$L'_{jPQ}=g'_{\mu\lambda}(\nabla'_j B'_P{}^{\mu})B'_Q{}^{\lambda}.$$

然因式中的

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda},$$

$$\nabla'_j B'_P{}^{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{\rho}B_P{}^{\mu}\right)+\left[\left\{{}^{\mu}_{\nu\omega}\right\}+\delta^{\mu}_{\nu}\rho_{\omega}+\delta^{\mu}_{\omega}\rho_{\nu}-g^{\mu\alpha}\rho_{\alpha}g_{\nu\omega}\right]B_j{}^{\nu}\frac{1}{\rho}B_P{}^{\omega},$$

$$B'_Q{}^{\mu}=\frac{1}{\rho}B_Q{}^{\mu},$$

故将这些式子代入上式得

$$L'_{jPQ}=\rho^2 g_{\mu\lambda}\left[-\frac{\rho_j}{\rho}B_P{}^{\mu}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_P{}^{\mu}}{\partial x^j}+\frac{1}{\rho}\left\{{}^{\mu}_{\nu\omega}\right\}B_j{}^{\nu}B_P{}^{\omega}+\frac{1}{\rho}B_j{}^{\mu}\rho_{\omega}B_P{}^{\omega}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho}\rho_j B_P{}^{\mu}\right]\frac{1}{\rho}B_Q{}^{\lambda}$$

$$=g_{\mu\lambda}\left[\frac{\partial B_P{}^{\mu}}{\partial x^j}+\left\{{}^{\mu}_{\nu\omega}\right\}B_j{}^{\nu}B_P{}^{\omega}\right]B_Q{}^{\lambda}=L_{jPQ}.$$

因此得下列定理。

定理 13. 在共形变换下基本向量 L_{jPQ} 不变。

索　　引

（按汉语拼音排列）

A

爱因斯坦（Einstein）空间…………68

B

贝尔特腊米（Beltrami）第一微分参数……………………………… 59
贝尔特腊米定理……………………137
比安基（Bianchi）第二恒等式 ……64
比安基第一恒等式 ………………61
不变量（数量）……………………22,31
不变量 f 的共变导数 ……………51

C

常曲率空间 ………………………66
超曲面 ……………………………96
测地坐标 …………………………77
以一点 x_0^K 为极点的——………77
测地线 ……………………………46
测地线方程的级数展开 …………75

D

单参数有限连续变换群…………130
单位法向量 ………………………91
单位张量 …………………………56
道路……………………………2,131
第二基本张量 ……………………95
第二基本形式 ……………………96
第二类黎曼记号 …………………61
第一基本张量 ……………………90
第一类黎曼记号 …………………61
第三基本张量……………………106
对称 ………………………………33

E

Euler（欧拉）定理………………100
Euler-Schouten（欧拉·斯高天）曲率张量 ……………………………95
Euler 微分方程 …………………46
二阶反变张量的分量……………23,33
二阶共变张量的分量……………23,33
二阶混合张量的分量……………24,33
二向量间的夹角 …………………43
二维曲面的高斯曲率……………114

F

法曲率 ……………………………96
法曲率向量 ………………………96
法张量 ……………………………83
法张量与曲率张量的关系式 ……84
法坐标 ……………………………78
反变向量 …………………………31
—— u^K 的共变导数 ……………53
——的分量……………………22,31
——的共变微分 …………………53
反变指标……………………………26,33
反称 ………………………………33
弗雷内·塞雷（Frenet-Serret）公式 ……………………………………88

G

高斯（Gauss）方程 …………108,118
高斯公式 …………………………95
广义共变导数 ……………………95
共变导数（绝对导数）……51,52,53,55
在 dx^ν 方向上的—— …51,52,53,55
共变曲率张量 ……………………61
共变向量的分量…………………22,32
共变微分………………51,52,53,55
共变指标…………………………26,33
共轭方向…………………………101
共形变换…………………………140
共形第二基本张量………………149
共形对应…………………………140
共形欧拉·斯高天张量…………149

H

函数行列式 ……………………………………29
函数矩阵的秩 …………………………………89
互相共轭……………………………………………101
互相共形……………………………………………140

J

J. M. 托麻斯 (Thomas) 共形
联络系数…………………………………………141
—— $K_{\mu\lambda}^{\kappa}$ 的变换规律 ………………142
基本定理……………………………………………123
基本反变张量 …………………………………40
基本方程……………………………………………120
基本共变张量 …………………………………40
极小流形……………………………………………104
渐近方向……………………………………………101
渐近曲线……………………………………………101
绝对曲率 ……………………………………………96
绝对曲率向量 ……………………………………96
绝对曲率张量……………………………………108
绝对微分…………………………51,52,53,55
在 dx^{ν} 方向上的—— …51,52,53,55
绝对微分学 ……………………………………2,48

K

开玲 (Killing) 方程 ………………………130
柯达齐(Codazzi) 方程………110,119
克拉美(Cramer)定律 ……………………20
克氏(Christoffel) 三指标记号 ……48
可定向 …………………………………………………45
可展子空间………………………………………126
切—— …………………………………………………127

L

拉氏算子(Laplacian) ……………………59
列维·齐维塔(Levi-Civita) 平行性
……………………………………………………………70
—— 的几何意义………………………………125
类数…………………………………………………………117
类数 p 的黎曼空间 V_m ………………117
黎曼(Riemann)度量 ……………………39
黎曼几何学 ……………………………………………39
黎曼记号 …………………………………………………61
黎曼·克利斯托弗尔 (Riemann-Christoffel)张量 ………………………………60
黎曼空间 ……………………………………………39
—— 的共形变换……………………………139
—— 的射影变换……………………………132
—— 与局部欧氏空间互相共形的
条件……………………………………………………146
黎曼曲率 ……………………………………………65
—— 的几何意义……………………………110
利齐方程…………………………………110,119
利齐(Ricci)公式 ……………………………61
利齐张量 ……………………………………………61
利齐主方向 …………………………………………68
罗德利克 (Rodrigues) 公式………107

M

m 维子空间 ………………………………………89
梅尼(Meusnier)定理 …………………97
密度 …………………………………………34,113

N

n 维黎曼空间 ……………………………………39
—— V_n 中的 m 维子空间 ………89
内积…………………………………………………36,43

O

欧拉(Euler) 定理……………………………100
欧拉·斯高天 (Euler-Schouten)
曲率张量 …………………………………………95
欧拉微分方程 ……………………………………46
广义欧拉偏微分方程…………………104

P

平移 …………………………………………………………70
沿无穷小闭曲线—— ………………………73
平均曲率……………………………………………67,99
—— 向量 …………………………………………99
平坦空间 ……………………………………………65

Q

脐点……………………………………………………103
切向量 ………………………………………………88
曲率数量 ……………………………………………61
曲率线 …………………………………………99,100
曲率张量 ……………………………………………6
曲线的第二法向量 ……………………………88

曲线的第二曲率 ……………………………88
曲线的第一法向量 …………………………88
曲线的第一曲率 ……………………………88
曲线的第 $n-1$ 法向量 ……………………88
曲线的第 $n-1$ 曲率 ………………………88
曲线的弧长 …………………………………41
曲线的切向量 ………………………………88
曲线论 ………………………………………75
全测地曲面…………………………………102
全脐点曲面…………………………………103

S

Schur（休尔）定理 ………………………66
三阶反变张量 ………………………………24
三阶共变张量 ………………………………24
三阶混合张量 ………………………………24
射影变换……………………………………135
射影参数……………………………………139
射影对应……………………………………135
射影平坦空间………………………………136
数量的分量 …………………………………31
数量的梯度 …………………………………58
缩短……………………………………26,36

T

T. Y. 托麻斯(Thomas)射影联络
　系数………………………………………138
梯度……………………………………32,58
体积素 ………………………………………43

V

Van der Waerden-Bortolotti 共变
　导数 ………………………………………95
V_n 中的 V_m 的共形性质……………148
V_n 的 $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ 与 V_m 的 $\left\{ {h \atop j\,i} \right\}$
　之间的关系 ………………………………92

W

外尔(Weyl)共形曲率张量 ………………144
外尔射影曲率张量…………………………136

完全可积条件 ……………………70,123,147
微小变换的道路……………………………131
微小运动……………………………………129
微小直移……………………………………132
温加顿(Weingarten)公式 …………106,118
无穷小距离 …………………………………39

X

线性相关 ……………………………………27
线性无关 ……………………………………27
相对曲率 ……………………………………96
　——向量 …………………………………96
　——张量…………………………………108
向量的平移 …………………………………70
向量的散度 …………………………………59
向量的旋度 …………………………………58
向量 u^κ 的长（或模）…………………41
向量 u_λ 的共变导数 ……………………52
休尔(Schur)定理 …………………………66

Y

沿 V_m 的广义共变导数 …………………95

Z

张量的差 ……………………………………24
张量的共变微分 ……………………………55
张量的和……………………………………24,35
张量的积……………………………………25,36
张量的绝对微分 ……………………………55
张量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 的 t 阶展开………………82
张量方程 ……………………………………25
正交标架 ……………………………………66
指标记法 ……………………………………13
子空间的内蕴性质…………………………125
子空间 V_m 上的曲线 ……………………96
主方向……………………………………68,99
主曲率 ……………………………………99,100
　——方向…………………………………100

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝黎曼几何学入门
作者＝（日）矢野健太郎著　　王运达译
页数＝１５３
ＳＳ号＝１１０２０５４２
出版日期＝１９８２年

前言
第一章　张量代数学
１．１　指标记法
１．２　关于求总和的规定
１．３　行列式
１．４　一次方程组
１．５　齐线性变换
１．６　在齐线性变换下的不变量，反变向量与共变向量
１．７　在齐线性变换下的张量
１．８　张量的加法，乘法与缩短
１．９　关于张量的一个定理
１．１０　向量的线性无关性
１．１１　一般变量变换
１．１２　在一般变量变换下的不变量，向量与张量
１．１３　在一般变量变换下张量的加法，乘法与缩短
１．１４　关于一般变量变换下张量的一个定理
第二章　黎曼空间
２．１　黎曼度量　基本张量
２．２　曲线的长　向量的长
２．３　二向量间的夹角
２．４　体积素
２．５　变分法的一个引理
２．６　测地线
第三章　绝对微分学
３．１　克氏记号
３．２　绝对微分或共变微分
３．３　梯度　旋度　散度
３．４　黎曼·克利斯托费尔张量　利齐张量　曲率数量
３．５　黎曼·克利斯托费尔张量与利齐张量的性质
３．６　比安基恒等式
３．７　黎曼曲率
３．８　休尔定理
３．９　平均曲率　利齐主方向　爱因斯坦空间
３．１０　Ｋ？＝０　的空间
３．１１　向量的平移
３．１２　沿无穷小闭曲线向量的平移
第四章　曲线论
４．１　测地线方程的级数展开
４．２　测地坐标
４．３　法坐标
４．４　张量的展开
４．５　弗雷内·塞雷公式
第五章　曲面论
５．１　ｎ维黎曼空间Ｖｎ中的m维子空间Ｖm

５．２　　切向量法向量
５．３　　Ｖｍ的？与Ｖｍ的？之间的关系
５．４　　沿Ｖｍ的广义共变微分　　欧拉·斯高天曲率张量
５．５　　子空间Ｖｍ上的曲线
５．６　　平均曲率　　平均曲率向量
５．７　　曲率线
５．８　　渐近曲线
５．９　　全测地曲面　　全脐点曲面
５．１０　　极小流形
５．１１　　温加顿公式
５．１２　　高斯，柯达齐和利齐方程
５．１３　　黎曼曲率的几何意义
第六章　　平坦空间中的子空间
６．１　　黎曼空间的类数
６．２　　类数ｐ的黎曼空间Ｖｍ
６．３　　基本方程与基本定理
６．４　　列维·齐维塔平行性的几何意义
第七章　　变换论
７．１　　微小运动　　开玲方程
７．２　　黎曼空间的射影变换
７．３　　托麻斯的射影联络系数
７．４　　黎曼空间的共形变换
７．５　　外尔共形曲率张量
７．６　　黎曼空间与局部欧氏空间互相共形的条件
７．７　　Ｖｎ中的Ｖｍ的共形性质
索引